УДК 371.312:517.0

М.А.Калавур

Навучанне доказам тэарэм

У метадычнай літаратуры існуе два пункты гледжання на вызначэнне мэтаў навучання доказам у сярэдняй школе. Адны аўтары [1] пад навучаннем доказам разумеюць навучанне ўзнаўленню і завучванню гатовых доказаў.

Другі пункт гледжання заключаецца ў тым, што навучанне доказам дапускае навучанне разумовым працэсам пошуку, адкрыцця і пабудовы доказу [2,112].

У сваім даследванні мы будзем прытрымлівацца другога пункту гледжання, які адпавядае адной з задач школьнай матэматыкі – развіццю лагічнага мыслення вучняў. Пры гэтым падыходзе «ў арсенал прыёмаў і метадаў чалавечага мыслення натуральным чынам уключаюцца індукцыя і дэдукцыя, абагульненне і канкрэтызацыя, аналіз і сінтэз, класіфікацыя і сістэматызацыя, абстрагаванне і аналогія. Аб'екты матэматычных разумовых заключэнняў і правілы іх канструявання раскрываюць механізм лагічных пабудоў, выпрацоўваюць уменні фармуляваць, абгрунтоўваць і даказваць разважанні, тым самым развіваюць лагічнае мысленне» [3,4].

Разгледзім методыку вывучэння тэарэм і іх доказаў курса алгебры і пачаткаў аналізу праз задачы. Калі прасачыць за метадамі, якія прымяняюцца для доказу тэарэм, то можна вылучыць наступныя: метад ад процілеглага, прымяненне алгарытму знаходжання вытворнай у алгебраічным і геаметрычным сэнсе, аналітычны, сінтэтычны.

У апошні час доказ многіх тэарэм у алгебры і пачатках аналізу апускаецца. Іншым разам доказ замяняецца рашэннем адпаведнай задачы. У некаторых выпадках узнікае неабходнасць паказу справядлівасці сцвярджэння, якое выкарыстоўваецца. Таму важна падбіраць такія задачы, якія падводзілі б вучняў да дадзенага сцвярджэння і паказвалі яго справядлівасць.

Дэдуктыўны характар выкладання матэрыялу ў алгебры і пачатках аналізу дазваляе выкарыстоўваць задачы для ўстанаўлення ўзаемасувязі паміж рознымі раздзеламі курсу, дае магчымасць падбіраць для навучання доказу такія задачы і размяркоўваць іх у такой паслядоўнасці, што неабходнасць рашэння наступнай задачы выцякае з рашэння папярэдняй.

Пры навучанні доказам праз задачы ў працэсе перапрацоўкі тэарэтычнага матэрыялу ўлічваюцца ўжо засвоеныя вучнямі веды, уменні праводзіць розныя разважанні. У доказе тэарэм часта выкарыстоўваюцца ўласцівасці пэўных аперацый, вядомых вучням. Напрыклад:

уласцівасці лімітавага пераходу $\rightarrow$ правілы дыферэнцавання; уласцівасці першаіснай $\rightarrow$ правілы інтэгравання.

Прасочым некаторыя асаблівасці навучання доказам тэарэм праз задачы. Разгледзім вывучэнне тэмы «Правілы вылічэння вытворных», якая ў апошнія гады ўключана ў праграму ўступных экзаменаў па матэматыцы ў вышэйшыя навучальныя ўстановы. На аснове ўжо ўведзенага азначэння вытворнай і ўстаноўленага пры гэтым алгарытму вытворная зручна вылічваецца толькі для прасцейшых функцый. Знаходжанне ліку, да якога імкнецца стасунак прыросту функцыі да прыросту аргумента ў пункце, для больш складаных функцый прыводзіць да значных тэхнічных цяжкасцяў. Аблягчае справу прымяненне правіл дыферэнцавання. Пры аналізе тэарэтычнага матэрыялу ўстанаўліваем, што правілы дыферэнцавання з'яўляюцца прамымі вынікамі вядомых уласцівасцяў лімітавага пераходу. Вывучэнне гэтага пункту можна пачынаць з рашэння задачы аб вылічэнні вытворнай функцыі $y = (2x^2 + x + 1)/(x^2 - x + 1)$.

Па азначэнні вельмі цяжка знайсці вытворную гэтай функцыі. Лягчэй было б, калі б мы ведалі, чаму роўныя вытворныя дзелі, сумы і здабытку элементарных функцый. Іншымі словамі, трэба ведаць, як вытворныя дзелі, сумы і здабытку выражаюцца праз вытворныя прасцейшых функцый.

У працэсе аналізу доказу тэарэмы аб вытворнай сумы, выдзеліўшы крокі доказу, бачым, што доказ праводзіцца прымяненнем алгарытму знаходжання вытворнай па азначэнні. Пасля перапрацоўкі тэарэтычнага матэрыялу атрымліваем наступныя задачы.

1. Выразіць прырост сумы дзвюх функцый у пункце праз прыросты гэтых функцый у тым жа пункце.

Пасля рашэння задачы робім выснову, што прырост сумы дзвюх функцый у пункце роўны суме прыростаў гэтых функцый у тым жа пункце.

2. Знайсці лік (ліміт), да якога імкнецца стасунак прыросту сумы дзвюх функцый у пункце да прыросту незалежнай пераменнай у тым жа пункце пры імкненні апошняга да нуля.

Пасля рашэння атрымаем наступную роўнасць:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta (u(x_0) + v(x_0))/\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta u(x_0)/\Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta v(x_0)/\Delta x) = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Дапусцім, што функцыі $u(x)$ і $v(x)$ дыферэнцаваныя ў пункце x_0, тады існуюць ліміты, якія стаяць справа ў роўнасці. Прымяніўшы ўласцівасць сумы лімітаў, атрымаем, што існуе ліміт, які стаіць злева ў разглядаемай роўнасці. Але гэты ліміт ёсць вытворная сумы дзвюх функцый, г.з. сума дзвюх функцый дыферэнцаваная ў пункце x_0, і з папярэдняй роўнасці атрымаем:

$$(u(x_0) + v(x_0))' = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Такім чынам, мы даказалі тэарэму.

ТЭАРЭМА 1. Калі функцыі u і v дыферэнцаваныя ў пункце x_0, то і іх сума дыферэнцаваная ў гэтым жа пункце і $(u + v)' = u' + v'$.

На заключным этапе доказу думка вучняў накіроўваецца пры дапамозе адпаведных пытанняў на самастойную фармулёўку тэарэмы. Разважанні праводзяцца з дапамогай роўнасці, атрыманай пасля рашэння другой задачы, у двух напрамках: злева – направа, справа – налева. Перад вучнямі ставяцца наступныя пытанні.

У якім выпадку можна прымяніць правіла знаходжання ліміту сумы? Якую выснову можна зрабіць з існавання лімітаў складаемых? Што азначае дыференцаванасць функцый u і v? Што вынікае з існавання лімітаў складаемых? Якую выснову можна зрабіць з існавання ліміта сумы?

Пры ўзнікненні цяжкасцяў задачы могуць разбівацца на больш простыя задачы. Напрыклад, другую задачу можна разбіць на дзве падзадачы.

1. Знайсці стасунак прыросту сумы дзвюх функцый у пункце да прыросту незалежнай пераменнай у гэтым жа пункце.

2. Знайсці лік (ліміт), да якога імкнецца стасунак $(\Delta u(x_0) + \Delta v(x_0))/\Delta x$ пры $\Delta x \to 0$.

У канцы доказу з дапамогай адпаведных пытанняў яшчэ раз звяртаецца ўвага вучняў на тое, што, каб функцыя была дыферэнцавана ў пункце, павінен існаваць лік (ліміт), да якога імкнецца прырост функцыі да прыросту аргументу пры імкненні апошняга да нуля, што выкарыстоўваецца ўласцівасць лімітавага пераходу сумы. У працэсе такога доказу адбываецца паўтарэнне азначэння вытворнай, замацаванне ўмення знаходзіць вытворную па азначэнні з выкарыстаннем алгарытму на больш высокім ўзроўні.

Для вылічэнняў прыводзіцца кароткая фармулёўка: вытворная сумы роўная суме вытворных.

Можна зрабіць некаторыя высновы па працэсе доказу. Пасля рашэння кожнай задачы робіцца тэарэтычная выснова, якая выкарыстоўваецца пры рашэнні наступнай задачы. Фармулёўка тэарэмы прыводзіцца звычайна напрыканцы доказу. Ведаючы алгарытм знаходжання вытворнай па азначэнні, вучні ўжо дапускаюць паслядоўнасць і неабходнасць рашэння задач.

Іншым разам для доказу тэарэмы даводзіцца ўводзіць у навучальную сістэму дадатковыя задачы, каб атрымаць тэарэтычныя высновы, неабходныя для працэсу доказу. Вынікі абагульнення такіх задач паглыбляюць веды вучняў аб вывучаемых матэматычных аб'ектах. Напрыклад, для вываду правіла дыферэнцавання здабытку дзвюх функцый можна рашыць наступныя задачы.

1. Выразіць прырост здабытку дзвюх функцый у пункце праз прыросты гэтых функцый у тым жа пункце і самі функцыі.

Пасля рашэння вучні атрымаюць наступны выраз:

$$\Delta(u(x_0)\times v(x_0)) = \Delta u(x_0)\times v(x_0) + u(x_0)\times\Delta v(x_0) + \Delta u(x_0)\times\Delta v(x_0).$$

2. Знайсці лік (ліміт), да якога імкнецца стасунак прыросту здабытку дзвюх функцый у пункце да прыросту незалежнай пераменнай у тым жа пункце пры імкненні апошняга да нуля.

Пры рашэнні вучні прыходзяць да наступнага:

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta(u(x_0)\times v(x_0))/\Delta x) = v(x_0)\times\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta u(x_0)/\Delta x) + u(x_0)\times\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta v(x_0)/\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta u(x_0)\times\Delta v(x_0)/\Delta x).$$

Узнікае неабходнасць рашэння дзвюх дадатковых задач.

3. Знайсці $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta u(x_0)\times\Delta v(x_0)/\Delta x)$ пры ўмове, што u(x) і v(x) дыферэнцаваныя ў пункце x_0.

Рашэнне.

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta u(x_0)\times\Delta v(x_0)/\Delta x) = \lim_{\Delta x\to 0}((\Delta u(x_0)/\Delta x)\times(\Delta v(x_0)/\Delta x)\times\Delta x) = u'(x_0)\times v'(x_0)\times 0=0.$$

4. Няхай функцыя v(x) дыферэнцаваная ў пункце x_0, знайсці $\lim\limits_{x\to x_0} v(x)$.

Праводзячы разважанні, аналагічныя разважанням пры доказе тэарэмы аб вытворнай сумы дзвюх функцый і выкарыстаўшы вынікі рашэнняў задач 3 і 4, атрымаем: калі функцыі u(x) і v(x) дыферэнцаваныя ў пункце x_0, то і іх здабытак дыферэнцаваны ў тым жа пункце і $(u\times v)' = u'\times v + u\times v'$. Вучні самастойна фармулююць даказаную тэарэму 2.

Звяртаецца ўвага вучняў на адрозненне правіл дыферэнцавання сумы і здабытку дзвюх функцый.

Далей рашаецца задача, якая замяняе доказ выніку.

Задача. Знайсці вытворную выразу Cu пры ўмове, што функцыя u дыферэнцаваная ў пункце x_0, а C – пастаянная.

Прымяняючы даказаную вышэй тэарэму і тое, што вытворная C роўная нулю, вучні рашаюць задачу і гэтым даказваюць наступную тэарэму.

ВЫНІК. Калі функцыя u дыферэнцаваная ў пункце x_0, а C – пастаянная, то функцыя Cu дыферэнцаваная ў тым жа пункце і $(Cu)' = C \times u'$.

Для практычных вылічэнняў вытворнай карыстаюцца кароткай фармулёўкай: пастаянны множнік можна выносіць за знак вытворнай.

Для доказу трэцяй тэарэмы можна рашыць наступныя задачы.

1. Выразіць прырост функцыі 1/v у пункце праз прырост функцыі v у тым жа пункце і саму функцыю.

2. Знайсці лік (ліміт), да якога імкнецца стасунак прыросту функцы 1/v у пункце да прыросту аргументу ў тым жа пункце пры імкненні апошняга да нуля.

3. Знайсці вытворную функцыі u/v пры ўмове, што функцыі u і v дыферэнцаваныя ў пункце x_0 і $v(x_0) \neq 0$.

Зараз можна рашыць задачу, прапанаваную ў пачатку вывучэння тэмы.
$y' = ((2x^2 + x + 1)/(x^2 - x + 1))' = ((2x^2 + x + 1)' \times (x^2 - x + 1) - (2x^2 + x + 1) \times (x^2 - x + 1)')/(x^2 - x + 1)^2 = (-3x^2 + 2x + 2)/(x^2 - x + 1)^2$.

Вывучаючы правілы дыферэнцавання, мы выкарысталі першы падыход да навучання доказам тэарэм праз задачы. Для доказу тэарэм прымяняўся ўжо вядомы вучням алгарытм знаходжання вытворнай па азначэнні. Таму вучні праводзілі доказ, разглядаючы гэты алгарытм у новай сітуацыі. Фармулёўка тэарэмы даецца пры першым падыходзе ў канцы доказу.

Калі вучням невядомы спосаб разважанняў пры доказе тэарэмы, выкарыстоўваецца другі падыход навучання доказам тэарэм праз задачы.

Часта вучні не разумеюць, як узніклі фармулёўкі тых ці іншых тэарэм. У гэтым выпадку школьнікі падводзяцца да самастойнай фармулёўкі тэарэм. На аснове рашэння задач і абагульнення вынікаў вылучаюцца гіпотэзы, якія затым пацвярджаюцца доказам тэарэм або абвяргаюцца пры рашэнні спецыяльных задач, контрпрыкладаў. Іншым разам вылучаная гіпотэза ўдакладняецца перад доказам. У гэтым выпадку тэарэма фармулюецца таксама напрыканцы пацвярджэння гіпотэзы.

Прасочым дзеянне другога падыходу на прыкладзе вывучэння тэмы «Дастатковая ўмова нарастання (спадання) функцыі». Вывучэнне можна пачынаць з рашэння задачы аб пабудове графіка функцыі $h(x) = x - x^3$. Правільна пабудаваць графік гэтай функцыі «па пунктах» вельмі цяжка. Таму карысна пры пабудове графіка выкарыстаць веданне прамежкаў нарастання і спадання функцыі. Разгледзім задачу.

Задача. Дакажыце прыкмету нарастання функцыі: для таго каб функцыя f(x) нарастала на мностве P, неабходна і дастаткова, каб для любых двух значэнняў x і $x + \Delta x$ ($\Delta x>0$) з мноства P выконвалася ўмова $(\Delta f(x)/\Delta x)>0$.

Рашэнння.

Успомнім азначэнне нарастання функцыі на мностве. Функцыя f(x) нарастае на мностве P, калі для любых лікаў x_1 і x_2, якія належаць мноству P, з няроўнасці $x_1<x_2$ вынікае няроўнасць $f(x_1)<f(x_2)$.

Калі $x_1<x_2$, то $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$. З $f(x_1)<f(x_2)$ вынікае $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) > 0$. Адсюль атрымаем: функцыя f нарастае на мностве P, калі для любых $\Delta x>0$ з гэтага мноства выконваецца няроўнасць $\Delta f(x)>0$. Гэта значыць, атрымаем

$(\Delta f(x)/\Delta x)>0$. (1)

Абазначым x праз x_1, а $x + \Delta x$ праз x_2. Тады $x_1<x_2$. З няроўнасці $(\Delta f(x)/\Delta x)>0$ пры ўмове $\Delta x>0$ атрымаем $f(x + \Delta x) - f(x) = f(x_2) - f(x_1) >0$. Адсюль атрымаем $f(x_1)<f(x_2)$. Тады па азначэнні нарастання функцыі атрымаем, што f(x) нарастае на мностве P.

Такім чынам, калі для любых $\Delta x>0$ з мноства выконваецца няроўнасць (1), то функцыя нарастае на гэтым мностве, з якога бярэцца Δx. Паспрабуем прымяніць атрыманую прыкмету нарастання на практыцы. Рашым задачу.

Задача. Знайсці прамежкі манатоннасці для функцыі $y = x^2$.

Для рашэння прыменім выведзеную прыкмету. Возьмем два пункты x_0 і x такія, што $\Delta x = x - x_0 >0$. Знойдзем адпаведны прырост функцыі $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - -x_0^2 = 2x_0 \times \Delta x + (\Delta x)^2$. Знаходзім стасунак Δy да Δx $(\Delta y/\Delta x) = 2x_0 + \Delta x$.

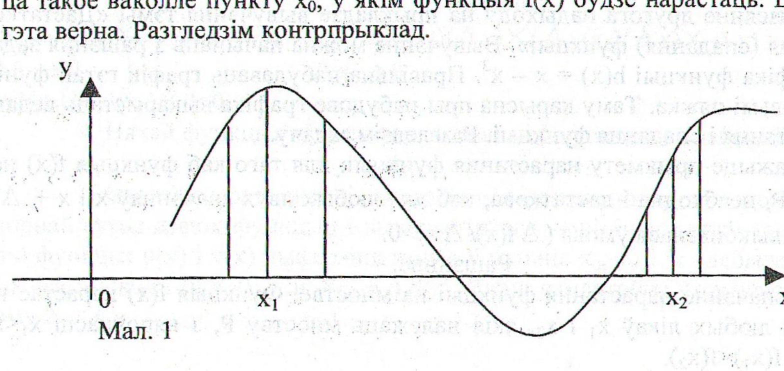
Атрымаўся выраз, які залежыць ад дзвюх пераменных. Гэта робіць цяжкім даследаванне знака атрыманага выразу. Як бачна, прыкмета не вельмі эфектыўная на практыцы. Паспрабуем яе ўдасканаліць. Лягчэй было б, калі б выраз залежаў ад адной пераменнай. Ці нельга перайсці да функцыі, якая залежыць ад адной пераменнай, а менавіта ад x_0? Напрамую дапусціць $\Delta x = 0$ не можам, а зрабіць, каб яно імкнулася да нуля і перайсці да ліміту магчыма.

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y/\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Апошняе падштурхоўвае да думкі аб прымяненні вытворнай для ўдасканалення атрыманай прыкметы нарастання. Фіксуем пункт x_0 і любое Δx з прамежку, які належыць абсягу вызначэння функцыі f(x). Пераходзім да ліміту ў няроўнасці (1) і атрымаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\Delta f(x_0)/\Delta x) \geq 0.$$

Параўнаўшы азначэнне нарастання функцыі і азначэнне вытворнай у пункце, бачым, што ў азначэнні нарастання фігуруе $\Delta x>0$, а ў азначэнні вытворнай – любое $\Delta x \neq 0$. Пры гэтым у азначэнні вытворнай $\Delta x \to 0$. Значыць, калі $f'(x_0)>0$, то знойдзецца такое ваколле пункту x_0, у якім функцыя f(x) будзе нарастаць. Высветлім, ці заўсёды гэта верна. Разгледзім контрпрыклад.



Мал. 1

Для функцыі, графік якой паказаны на малюнку 1, можна знайсці пункты (x_2), у якіх $f'(x)>0$ і існуе ваколле, у якім функцыя нарастае. Але гэта не заўсёды выконваецца. Можна ўказаць пункты (x_1), у якіх $f'(x)>0$, а ваколля, у якім функцыя нарастае, можа не быць. Такім чынам, у агульным вылучаная гіпотэза няправільная. Дастатковай умовай для нарастання функцыі на ўсім прамежку тады будзе дадатнасць вытворнай ва ўсіх пунктах прамежку. Гэта будзе ўдакладненая гіпотэза. Паспрабуем яе праверыць. Разгледзім задачы.

Няхай дадзена функцыя $y = 2x + 3$. Возьмем два пункты x_1 і x_2, для якіх выконваецца $x_1<x_2$. Знойдзем для нашай функцыі $y_2 - y_1$. Атрымаем:
$y_2 - y_1 = 2\times(x_2 - x_1)$.

Аналагічна для функцыі $y = x^2$ атрымаем:
$y_2 - y_1 = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)\times(x_2 - x_1)$.

Для функцыі $y = x^3$ атрымаецца наступны выраз:
$y_2 - y_1 = x_2^3 - x_1^3 = (x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)\times(x_2 - x_1)$.

Абагульнім атрыманыя вынікі. Ва ўсіх выпадках справа ў роўнасці стаіць якісьці лік, памножаны на $x_2 - x_1$, г.з.

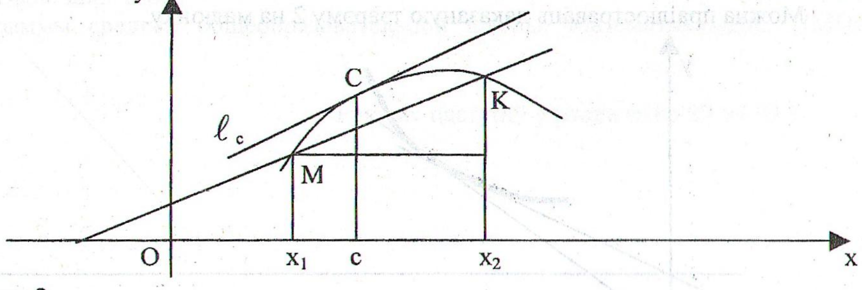
$f(x_2) - f(x_1) = A\times(x_2 - x_1)$ (2)

Гэты лік А К.Маркс у сваіх «Матэматычных рукапісах» называў «папярэдняй вытворнай».

Каб разважаць пра знак выразу $f(x_2) - f(x_1)$, мы павінны ведаць лік А. Як знайсці А? З роўнасці (2) знаходзім:

$A = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1) = \Delta f(x)/\Delta x$.

Разгледзім дыферэнцаваную ў кожным пункце некаторага прамежку функцыю f(x).



Мал. 2

Геаметрычна стасунак $f(x_2) - f(x_1)$ да $x_2 - x_1$ азначае тангенс вугла нахілу сякучай, якая праходзіць праз пункты $M(x_1; f(x_1))$ і $K(x_2; f(x_2))$. Але для адвольнай функцыі спосабы знаходжання тангенса вугла нахілу сякучай невядомыя. Такія спосабы вядомы для датычнай. Ці нельга перайсці ад сякучай да датычнай? Пры гэтым вугал нахілу не павінен змяніцца. Правядзём датычную да графіку функцыі паралельна сякучай МК. Ці заўсёды існуе такая датычная? Аказваецца, так. Але доказ гэтага факта выходзіць за рамкі школьнай праграмы. Абазначым пункт дотыку праз $C(c; f(c))$. Зыходзячы з геаметрычнага сэнсу вытворнай, мы ведаем, што вуглавы каэфіцыент датычнай будзе роўны $f'(c)$. Але $\ell_c \parallel MK$ і іх вуглавыя каэфіцыенты роўныя. Можна запісаць роўнасць:
$(f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1) = f'(c)$.

Адкуль вынікае $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\times(x_2 - x_1)$. (3)

Узнікае гіпотэза: для дыферэнцаванай ва ўсіх пунктах некаторага прамежку функцыі f паміж двума значэннямі гэтага прамежку знойдзецца пункт, для якога выконваецца роўнасць (3). Гэта гіпотэза пацвярджаецца доказам тэарэмы Лагранжа, што выходзіць за рамкі школьнай праграмы.

ТЭАРЭМА 1 (Лагранжа). Няхай функцыя дыферэнцаваная ў кожным пункце некаторага прамежку.Тады паміж любымі двума пунктамі a і b гэтага прамежку знойдзецца пункт c такі, што $f(b) - f(a) = f'(c)\times(b - a)$.

Гэтую тэарэму мы будзем выкарыстоўваць у наступных разважаннях.

Няхай нам дадзена функцыя, якая мае дадатную вытворную ў кожным пункце прамежку I. Возьмем два любыя пункты з прамежку I x_1 і x_2, такія, што $x_1 < x_2$. Узнікае пытанне, якімі будуць значэнні функцыі ў гэтых пунктах у параўнанні адно з адным. Для параўнання $f(x_1)$ і $f(x_2)$ паклічам на дапамогу тэарэму Лагранжа. Па гэтай тэарэме для інтэрвала $(x_1;x_2)$ знойдзецца такі пункт c, што выконваецца роўнасць

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\times(x_2 - x_1),\ x_1<c<x_2. \tag{4}$$

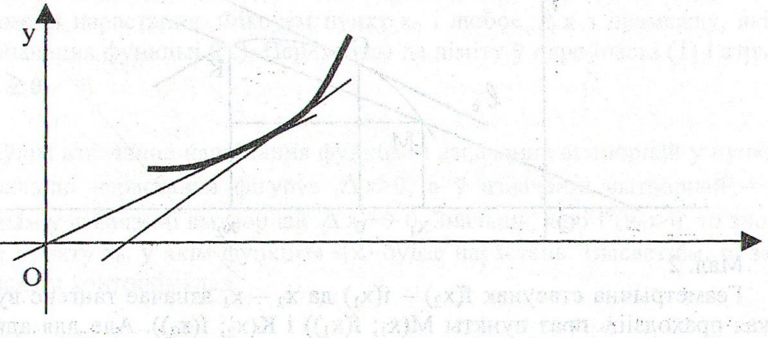
Каб ацаніць рознасць значэнняў функцыі, мы павінны ведаць яшчэ знак вытворнай $f'(c)$. Улічваючы, што функцыя мае дадатную вытворную ў кожным пункце прамежку I, а пункт c належыць гэтаму прамежку, атрымаем: $f'(c)>0$. І таму што $x_2 - x_1 > 0$, то з роўнасці (4) вынікае, што $f(x_2) - f(x_1) > 0$, г.з. $f(x_1)<f(x_2)$. Аб'яднаўшы падкрэсленыя выразы, атрымаем, што функцыя f(x) нарастае на прамежку I.

Такім чынам, мы пацвердзілі нашу гіпотэзу і даказалі наступную тэарэму.

ТЭАРЭМА 2. Калі функцыя f мае дадатную вытворную ў кожным пункце прамежку I, то f нарастае на гэтым прамежку.

Аналагічна даказваецца тэарэма аб спаданні функцыі на прамежку. Пасля гэтага рашаецца задача, прапанаваная ў пачатку вывучэння тэмы. Рашэнне задачы паказана ў падручніку.

Можна праілюстраваць даказаную тэарэму 2 на малюнку.



Мал. 3

Датычныя да графіка функцыі на малюнку 3 утвараюць вострыя вуглы з дадатным напрамкам восі Ox, г.з. вытворныя ў гэтых пунктах дадатныя.

Часта вылучаная гіпотэза здаецца вучням справядлівай, а яе доказ лішнім. У гэтым выпадку на дапамогу прыходзяць задачы-контрпрыклады. Напрыклад, пры вывучэнні асноўнай ўласцівасці першаіснай вучні станоўча адказваюць на пытанне: ці ўсе першаісныя ўваходзяць у F(x) + C. Свой адказ яны аргументуюць наступным чынам: таму што першаісных F(x) + C бясконца многа з-за адвольнасці C, F(x) + C ахоплівае ўсе першаісныя. Значыць, даказваць гэты факт не трэба. У гэтым выпадку можна прывесці наступны контрпрыклад.

Няхай маем раўнанне Sin x = 1/2. Яго рашэннем будзе $x = \pi/6 + 2\pi n$, $n \in Z$. Значыць, рашэнняў бясконца многа. Але прыведзены выраз не ахоплівае ўсіх рашэнняў прапанаванага раўнання, таму што $x = 5\pi/6 + 2\pi n$, $n \in Z$ таксама з'яўляецца рашэннем дадзенага раўнання. Гэта паказвае неабходнасць доказу вылучанай гіпотэзы.

Зробім некаторыя высновы.

1. Навучанне доказам тэарэм праз задачы эфектыўна рашае важную задачу школьнай матэматыкі – развіццё лагічнага мыслення вучняў, таму што яны набываюць уменні фармуляваць, абгрунтоўваць і даказваць разважанні.

2. Пры перапрацоўцы тэарэтычнага матэрыялу вылучаюцца крокі доказу тэарэмы. Калі гэтыя крокі могуць выконвацца вучнямі, то кожны крок перафармулюецца ў задачу. Рашаючы гэтыя задачы і праводзячы тэарэтычныя высновы, вучні даказваюць тэарэму. Тэарэма фармулюецца самімі вучнямі напрыканцы доказу.

3. Калі вучні не бачаць неабходнасці доказу вылучанай гіпотэзы або праводзяць яго няправільна, то выкарыстоўваюцца задачы-контрпрыклады, якія дазваляюць наглядна і хутка паказаць вучням іх памылкі і мэтазгоднасць дадатковых дзеянняў.

4. Працэс удакладнення вылучанай гіпотэзы адбываецца пры рашэнні адпаведных задач, накіраваных на дасягненне канчатковай мэты.

1. Слепкань З.И. Психолого-дидактические основы обучения математике. – Киев: Рад. школа, 1983.
2. Столяр А.А. Педагогика математики: Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов.- Мн.: Выш. шк., 1986.
3. Программы средней общеобразовательной школы. Математика.-Мн.: НМЦентр, 1997.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 27.04.99 г.