УДК 371.312:517.0

М.А. Калавур

ВЫВУЧЭННЕ ПАНЯЦЦЯЎ ПРАЗ ЗАДАЧЫ

При навучанні праз задачы фармаванне паняцця ўяўляе сабой актыўную дзейнасць, скіраваную на рашэнне сістэмы задач, атрыманых пасля перапрацоўкі тэарэтычнага матэрыялу; пры гэтым улічваюцца і выкарыстоўваюцца сувязі новага паняцця з раней засвоенымі паняццямі. Улічваецца таксама тое, што важную ролю ў засваенні новых паняццяў выконвае ўменне прымяняць на практыцы веды аб іх пры рашэнні новых задач. Задачы, якія прыводзяць да неабходнасці вывучэння новых паняццяў, пасля ўвядзення гэтых паняццяў рашаюцца з прымяненнем атрыманых ведаў. На этапе замацавання рашаюцца задачы, у якіх веды аб новым паняцці прымяняюцца ў спецыфічных сітуацыях.

"Утварэнне паняцця можна лічыць толькі тады адносна закончаным, калі вучні ўключылі дадзенае паняцце ва ўжо існуючую сістэму паняццяў, г.з. калі адбылася сістэматызацыя, калі яны могуць адвольна выкарыстоўваць яго ў новых сітуацыях, даваць яму адназначнае азначэнне, прымяняць яго ў канкрэтных абставінах, уключаючы і спецыфічныя выпадкі" [1, с. 33].

Разгледзім, як дзейнічаюць вышэйвыкладзеныя патрабаванні пры навучанні паняццям алгебры і пачаткаў аналізу праз задачы. Паняцці ўводзяцца па-рознаму. Большасць паняццяў ўводзіцца шляхам азначэння. Для некаторых паняццяў даецца дэфініцыя і дадатковыя тлумачэнні (паняцце ліміту). Многія паняцці звязаны з ужо вядомымі раней паняццямі. Але ёсць паняцці, пры ўвядзенні якіх апора на папярэдні матэрыял вельмі малая (паняцце ліміту). Некаторыя паняцці маюць вялікую значнасць у курсе алгебры і пачаткаў аналізу (паняцце вытворнай). На іх трэба звяртаць больш увагі. Пры ўвядзенні асобных паняццяў трэба разглядаць дапаможныя паняцці (пры ўвядзенні паняцця вытворнай трэба разглядаць паняцці прыросту незалежнай пераменнай і прыросту функцыі). Мэтазгодна ўводзіць гэтыя паняцці адначасова, каб паказаць іх узаемасувязь і неабходнасць разгляду.

У асноўным паняцці ўтвараюцца шляхам абагульнення і абстрагавання. Паняцце павінна ўзнікнуць пры дастатковай колькасці ўспрыманняў і ўяўленняў для абагульнення. На гэты конт А.М.Кабанава-Мелер адзначае, што "калі настаўнік пры ўвядзенні паняцця фармулюе азначэнне, ілюструючы яго толькі адным прыкладам (з падручніка), і не вар'іруе нагляднны матэрыял, то вучні нярэдка засвойваюць паняцце няправільна. Паколькі іх пры гэтым не навучылі абагульненню, яны самі спрабуюць абагульняць матэрыял па неістотных прыкметах, змешваюць іх з істотнымі" [2, с. 59]. Асабліва важна ўлічваць вышэйвыкладзеныя патрабаванні пры навучанні праз задачы, каб вучні маглі самастойна і правільна правесці абагульненне пры азначэнні паняцця.

Разгледзім прыклады. Пры ўвядзенні паняцця вытворнай мы прапануем указаць на мноства практычных задач, якія прыводзяць да ўзнікнення паняцця вытворнай, а непасрэдна разгледзець дзве задачы, якія паказваюць неабходнасць вывучэння ліміту асобнага віду. Прычым спачатку разглядаецца задача аб імгненнай скорасці руху цела, вядомая вучням з курса фізікі.

Задача 1. Няхай цела рухаецца прамалінейна, але не раўнамерна. Вызначыць скорасць цела ў любым пункце яго траекторыі, гэта значыць знайсці імгненную скорасць цела.

Рашэнне.

Вылучым невялікі ўчастак траекторыі, які ўтрымлівае наш пункт. Малое перамяшчэнне на гэтым ўчастку абазначым праз ΔS_1, а малы прамежак часу, за які цела гэта перамяшчэнне выканала, праз Δt_1. Падзелім ΔS_1 на Δt_1 і атрымаем сярэднюю скорасць на гэтым участку. Паменшым даўжыню першага ўчастка, атрымаем перамяшчэнне ΔS_2, якое цела праходзіць за прамежак часу Δt_2. Стасунак $\Delta S_2/\Delta t_2$ дае сярэднюю скорасць для другога ўчастку. Паступова памяншаючы прамежак часу, атрымаем, што ўчастак траекторыі сцягнецца ў пункт, у якім трэба знайсці скорасць цела. Тады сярэдняя скорасць стане імгненнай скорасцю. Такім чынам, у нас атрымалася паслядоўнасць стасункаў $\Delta S/\Delta t$ якая пры $\Delta t \to 0$ імкнецца да імгненнай скорасці $v_{імг.}$, г.з. $(\Delta S/\Delta t) \to v_{імг.}$

А зараз разгледзім яшчэ адну практычную задачу.

Задача 2. Колькасць электрычнасці, якая праходзіць праз праваднік, пачынаючы з моманту $t = 0$, выражаецца формулай $q(t) = 3t^2 - 2t$ (кулонаў). Вывесці формулу для вызначэння сілы току ў любы момант часу t_0, вылічыць сілу току напрыканцы шостай секунды.

Рашэнне.

Вылучым прамежак часу $\Delta t_1 = t_1 - t_0$, які ўтрымлівае момант t_0. Знойдзем змяненне колькасці электрычнасці за гэты прамежак: $\Delta q_1 = q(t_1) - q(t_0)$. Тады сярэдняе значэнне сілы току за гэты прамежак будзе роўна $\Delta q_1/\Delta t_1$. Памяншаючы прамежак часу, атрымаем Δt_2 і адпаведна Δq_2. Паступова прамежак часу пяройдзе ў момант часу t_0. Тады адпаведнае сярэдняе значэннне сілы току і будзе сілай току ў дадзены момант часу t_0. Такім чынам, мы атрымалі паслядоўнасць стасункаў $\Delta q/\Delta t$, якая пры $\Delta t \to 0$ імкнецца да I, г.з $\Delta q / \Delta t \to I$.

Параўноўваючы рашэнні гэтых дзвюх задач, заўважаем, што ў абодвух выпадках рашэнне зводзіцца да знаходжання ліміту асобнага віду. Можна прывесці шмат іншых задач з розных галінаў, рашэнне якіх праводзіцца разглядам ліку, да якога імкнецца стасунак змянення функцыі да змянення велічыні, ад якой залежыць функцыя (ліміт). Гэта падштурхоўвае да думкі аб вывучэнні такіх лімітаў і ўвядзенні паняцця для іх. Намі прапануецца вывучэннне паняццяў прыросту аргумента, прыросту функцыі і вытворнай у адным пункце. У гэтым выпадку вучні бачаць, як ўзнікаюць паняцці прыростаў, навошта яны вывучаюцца. Працэс увядзення паняцця вытворнай правядзём шляхам абагульнення на выпадак адвольнай функцыі рашэння адной з прыведзеных вышэй задач.

Абагульнім рашэнне задачы аб імгненнай скорасці цела на выпадак адвольнай функцыі.

Канкрэтная задача	Абагульненне канкрэтнай задачы
Разгледзім задачу аб знаходжанні імгненнай скорасці нераўнамернага і прамалінейнага руху цела, якое праходзіць за час t шлях $S(t)$.	Абагульнім для адвольнай функцыі, якая мае ў пункце x значэннне $f(x)$.
1. Выбіраем прамежак часу $\Delta t = t - t_0$. За час t_0 цела праходзіць шлях $S(t_0)$, за час $t = t_0 + \Delta t$ яно праходзіць шлях $S(t) = S(t_0 + \Delta t)$.	1. Выбіраем два значэнні пераменнай x_0 і x з абсягу вызначэння функцыі і разглядзім іх рознасць. Гэта рознасць называецца **прыростам незалежнай пераменнай у пункце x_0** і абазначаецца Δx. Знаходзім значэнні функцыі ў пунктах x_0 і x: $f(x_0)$, $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$.
2. Знаходзім змяненне шляху за прамежак часу Δt $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$.	2. Знойдзем рознасць паміж новым значэннем функцыі $f(x_0 + \Delta x)$ і першапачатковым $f(x_0)$. Гэта рознасць называецца **прыростам функцыі ў пункце x_0** і абазначаецца $\Delta f(x_0)$.
3.Знаходзім сярэднюю скорасць руху цела на прамежку $[t_0;t]$. Для гэтага знаходзім стасунак ΔS да Δt $v_{сяр.} = \Delta S/\Delta t$.	3. Знойдзем сярэднюю скорасць змянення функцыі на прамежку $[x_0;x]$. Для гэтага знаходзім стасунак прыросту функцыі да прыросту незалежнай пераменнай $\Delta f(x_0)/\Delta x$.
4. Знаходзім лік (ліміт), да якога імкнецца стасунак $\Delta S/\Delta t$ пры $\Delta t \to 0$. Гэты лік (ліміт) называецца імгненнай скорасцю і абазначаецца $v_{імг.}$, г.з. $(\Delta S/\Delta t) \to v_{імг.}$ пры $\Delta t \to 0$.	4. Знаходзім лік (ліміт), да якога імкнецца стасунак $\Delta f(x_0)/\Delta x$ пры $\Delta x \to 0$. Гэты лік (ліміт) называецца **вытворнай функцыі f у пункце x_0** і абазначаецца $f'(x_0)$ (чытаецца: "эф штрых у пункце x_0"), г.з. $(\Delta f(x_0)/\Delta x) \to f'(x_0)$ пры $\Delta x \to 0$.

Функцыя, якая мае вытворную ў пункце, называецца **дыферэнцаванай** у гэтым пункце. Але такіх пунктаў можа быць некалькі, а можа і наогул не быць, калі разглядаемы лік (ліміт) не існуе. Абазначым мноства пунктаў, у якіх функцыя дыферэнцавана, праз D_1. Што мы атрымаем, калі супаставім кожнаму ліку $x \in D_1$ лік $f'(x)$? У нас атрымаецца функцыя, якая называецца вытворнай функцыі f і абазначаецца $f'(x)$. Аперацыя знаходжання вытворонай функцыі называецца **дыферэнцаваннем.**

Зыходзячы з вышэйуказанага ўвядзення азначэння вытворнай функцыі ў пункце, можна скласці наступны алгарытм дыферэнцавання функцыі па азначэнні.

1. Для пункта x_0 надаем прырост Δx, атрымліваем пункт $x = x_0 + \Delta x$.
2. Знаходзім прырост функцыі ў пункце x_0 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$.

3. Знаходзім стасунак прыросту функцыі да прыросту незалежнай пераменнай у пункце x_0 $\Delta f(x_0)/\Delta x$.

4. Калі існуе лік (ліміт), да якога імкнецца стасунак $\Delta f(x_0)/\Delta x$ пры $\Delta x \to 0$, то пераходзім да ўказання 5, у адваротным выпадку пераходзім да ўказання 6.

5. Знаходзім лік $f'(x_0)$, да якога імкнецца $\Delta f(x_0)/\Delta x$ пры $\Delta x \to 0$.

6. Функцыя ў дадзеным пункце x_0 не мае вытворнай. Працэс закончаны.

А зараз звернемся да задачы 1. Выкарыстоўваючы ўведзенае намі азначэнне вытворнай, можна зрабіць выснову.

Імгненная скорасць ёсць вытворная ад шляху па часе.

Для другой задачы аналагічна можна зрабіць выснову.

Сіла току ёсць вытворная ад колькасці працякаючай электрычнасці па часе.

Значыць, каб вывесці формулу для вылічэння сілы току ў любы момант часу, трэба знайсці вытворную функцыі, якая выражае колькасць працякаючай электрычнасці, па пераменнай, якая выражае час. Прыменім вышэйуказаны алгарытм і знойдзем шуканую вытворную. У нас дадзена функцыя $q(t) = 3t^2 - 2t$.

1. Для пункта t_0 надаем прырост Δt, атрымаем пункт $t = t_0 + \Delta t$.

2. Знаходзім прырост функцыі $q(t)$ у пункце t_0 $\Delta q(t_0) = 3\,(t_0 + \Delta t)^2 - 2(t_0 + +\Delta t) - 3t_0^2 + 2t_0 = 3t_0^2 + 6t_0 \times \Delta t + 3\,(\Delta t)^2 - 2t_0 - 2\Delta t - 3t_0^2 + 2t_0 = 6t_0 \times \Delta t - 2\Delta t + +3(\Delta t)^2$.

3. Знаходзім стасунак прыросту функцыі да прыросту аргумента

$\Delta q(t_0)/\Delta t = 6t_0 - 2 + 3\Delta t$.

4. Паколькі існуе лік (ліміт), да якога імкнецца стасунак $\Delta q(t_0)/\Delta t$ пры $\Delta t \to 0$, знаходзім яго: $(6t_0 - 2 + 3\Delta t) \to (6t_0 - 2)$, калі $\Delta t \to 0$.

Значыць, сілу току ў любы момант часу t_0 можна знайсці па формуле

$I(t_0) = 6t_0 - 2$.

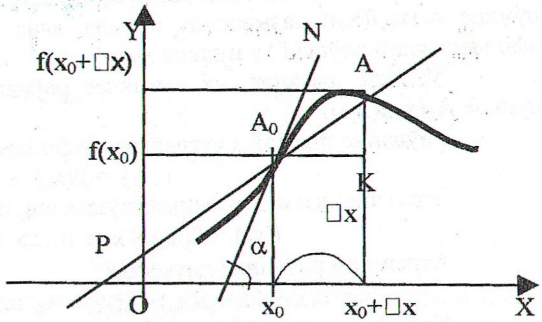
Тады сіла току ў канцы шостай секунды будзе роўная $I(6) = 6 \times 6 - 2 = 34(A)$.

Іншым разам пры разглядзе ўжо вядомых паняццяў у новых умовах узнікаюць новыя паняцці, якія паглыбляюць веды аб першапачатковых аб'ектах.

"Аб'ект (паняцце) у працэсе мыслення ўключаецца ва ўсё новыя сувязі, у выніку чаго выступае ва ўсё новых якасцях, якія фіксуюцца ў новых паняццях; з аб'екта, такім чынам, як бы вычэрпваецца ўсё новы змест; ён як бы паварочваецца кожны раз іншым сваім бокам, у ім выяўляюцца ўсё новыя ўласцівасці" [3, с.98-99].

Прывядзём прыклад. Для ўвядзення паняцця датычнай да графіка функцыі ў пункце рашаецца задача аб знаходжанні геаметрычнай інтэрпрэтацыі паняцця вытворнай. Гэтая задача рашаецца пры дапамозе геаметрычнай канкрэтызацыі алгарытму знаходжання вытворнай у пункце пры ўмове, што яна існуе.

Працэс знаходжання вытворнай	Канкрэтная практычная задача
Няхай дадзена функцыя h(x), якая дыферэнцавана на некаторым мностве, г.з. функцыя h(x) у кожным пункце гэтага мноства мае вытворную.	Разгледзім графік дыферэнцаванай на некаторым прамежку функцыі.



Мал. 1

1. Выбіраем пункт x_0 з мноства, у якім функцыя $h(x)$ дыферэнцавана, і надаем прырост Δx, атрымаем пункт x. Знаходзім значэнні функцыі $h(x)$ у пунктах x_0 і x: $h(x_0)$, $h(x) = h(x_0 + \Delta x)$.
2. Знаходзім адпаведны прырост функцыі $\Delta h(x_0) = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)$.
3. Знаходзім стасунак прыросту функцыі да прыросту аргумента $\Delta h(x_0)/ \Delta x = (h(x_0 + \Delta x) - h(x_0))/ \Delta x$.
4. Знаходзім лік, да якога імкнецца стасунак прыросту функцыі ў пункце x_0 да прыросту незалежнай пераменнай у тым жа пункце пры імкненні апошняга да нуля $(\Delta h(x_0)/ \Delta x) \rightarrow h'(x_0)$.

1. Выбіраем на восі Ox пункт x_0 і разгледзім некаторы прамежак Δx ад x_0 да $x = x_0 + \Delta x$. Знойдзем значэнні функцыі $f(x)$ у гэтых пунктах: $f(x_0)$, $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$.
2. Знойдзем рознасць паміж значэннямі функцыі ў пунктах x_0 і x $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = AK$.
3. Праводзім праз пункты $A_0(x_0;f(x_0))$ і $A(x_0 + \Delta x;f(x_0 + \Delta x))$ сякучую A_0A. Знаходзім стасунак $\Delta f(x_0)$ да Δx. Для трохвугольніка A_0AK гэта будзе стасунак процілеглага катэта да прылеглага, г.з. тангенс вугла AA_0K. Але вугал AA_0K роўны вуглу A_0Px. Значыць стасунак $\Delta f(x_0)$ да Δx ёсць тангенс вугла A_0Px, роўны вуглавому каэфіцыенту сякучай A_0A

$$(\Delta f(x_0)/ \Delta x) = k.$$

4. Пры $\Delta x \rightarrow 0$ сякучая A_0A імкнецца да прамой A_0N, якая называецца датычнай, г.з. чым менш Δx, тым велічыня вугла A_0Px бліжэй да α. Тады пры $\Delta x \rightarrow 0$ $(\Delta f(x_0)/ \Delta x) \rightarrow tg\,\alpha = f'(x_0)$. Але $tg\,\alpha$ ёсць вуглавы каэфіцыент датычнай A_0N.

Зробім выснову. **Вытворную функцыі ў пункце x_0 можна геаметрычна інтэрпрэтаваць як вуглавы каэфіцыент датычнай, праведзенай да графіка функцыі ў пункце x_0.**

Значыць, можна даць такое азначэнне датычнай: **датычнай** да графіку функцыі ў пункце $A_0(x_0;f(x_0))$ называецца прамая, якая праходзіць праз пункт A_0, і вуглавы каэфіцыент якой роўны f' у пункце x_0.

Узнікае пытанне, як выглядае раўнанне датычнай да графіка функцыі $f(x)$ у пункце $A_0(x_0;f(x_0))$.

Раўнанне прамой з вуглавым каэфіцыентам $к = f'(x_0)$ мае выгляд:

$$y = f'(x_0) \times x + b.$$

Зараз знойдзем b, выкарыстаўшы тое, што датычная праходзіць праз пункт A_0:

$$f(x_0) = f'(x_0)\times x_0 + b \Longrightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)\times x_0.$$

Атрымаем раўнанне датычнай:

$$y = f'(x_0)\times x + f(x_0) - f'(x_0)\times x_0 \Longrightarrow y = f(x_0) + f'(x_0)\times (x - x_0).$$

Калі прасачыць шлях, па якіом мы прыйшлі да паняцця датычнай да графіка функцыі, то можна ўстанавіць наступнае. Ад практычных задач мы перайшлі да тэарэтычнага абагульнення і ўвялі паняцце вытворнай функцыі ў пункце, а затым прымянілі нашыя веды аб вытворнай для ўвядзення паняцця датычнай.

Часта пры ўвядзенні паняццяў навучальная сістэма задач будуецца з улікам паслядоўнасці псіхалагічных працэсаў. Напрыклад, пры вывучэнні тэмы "Крытычныя пункты функцыі, яе максімумы і мінімумы" вылучаюцца чатыры агульныя этапы вывучэння гэтага матэрыялу.

1. Фармаванне паняцця экстрэмуму.
2. Распазнаванне пунктаў экстрэмуму.
3. Знаходжанне пунктаў экстрэмуму (тэарэтычная частка).
4. Прымяненне прыкмет экстрэмуму.

Для матывацыі вывучэння дадзенага матэрыялу можна выкарыстаць задачу аб пабудове графіка функцыі $y = 1/ ((x - 0,5)^2 + 0,1)$.

Пры пабудове графіка для хуткага знаходжання значэнняў функцыі ў зададзеных пунктах можна выкарыстаць калькулятар.

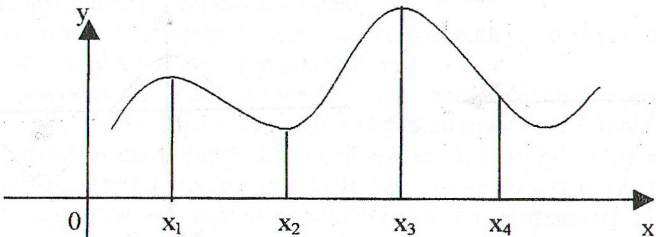
Пасля вылічэнняў атрымаецца наступная табліца:

x	- 2	- 1	0	1	2	3
y	0,157	0,426	2,857	2,857	0,426	0,157

Пабудова графіка вядомым вучням спосабам "па пунктах" можа даць памылку, таму што звычайна прапускаецца пункт x = 0,5.

Знайшоўшы значэнне функцыі ў пункце x = 0,5, вучні бачаць, што пункт (0,5; 10) прапушчаны на графіку, г.з. графік пабудаваны няправільна. Значыць, спосаб пабудовы графіка "па пунктах" не заўсёды зручны. Для пабудовы графіка трэба ведаць такія характэрныя пункты, у якіх функцыя рэзка нарастае або спадае, г.з. мае экстрэмальнае значэнне. Такія пункты атрымалі назву пункты экстрэмуму. Калі дадзены графік функцыі, то знайсці пункты экстрэмуму проста. Але часцей функцыя задаецца формулай. Таму трэба навучыцца адшукваць экстрэмальныя пункты для функцый, зададзеных формулай.

Пасля таго, як у вучняў склалася ўяўленне аб экстрэмальных пунктах, уводзіцца азначэнне пунктаў максімуму і мінімуму. Разгледзім графік некаторай функцыі, якая мае экстрэмальныя пункты. Мэтазгодна ўводзіць паняцці пунктаў максімуму і мінімуму на адным малюнку. Возьмем адзін экстрэмальны пункт і паспрабуем знайсці для яго характэрныя ўласцівасці.



Мал. 2

Прасочым, як паводзіць сябе функцыя да пункту x_2 (лявей за яго) і пасля пункту x_2 (правей за яго). Параўнаўшы значэнні функцыі, прыходзім да высновы, што спаданне змяняецца нарастаннем пры пераходзе праз пункт x_2. Гэта запісваецца на алгебраічнай мове

$$x_1<x<x_2 \Longrightarrow f(x)>f(x_2),$$

$$x_2<x<x_3 \Longrightarrow f(x)>f(x_2).$$

Аб'яднаўшы гэтыя дзве няроўнасці, атрымаем:

$$x_1<x<x_3 \Longrightarrow f(x) \geq f(x_2).$$

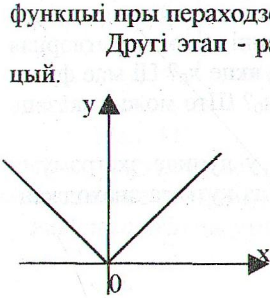
Высветлім, адкуль узнік знак роўнасці. Вучні самастойна ўстанаўліваюць, што пункт x_2 уваходзіць у прамежак $(x_1;x_3)$. Зараз вучні могуць сфармуляваць паняцце пункту мінімуму.

АЗНАЧЭННЕ. Пункт x_2 называецца пунктам мінімуму, калі знойдзецца такое ваколле пункту x_2 $(x_1;x_3)$, што для ўсіх $x \in (x_1;x_3)$ выконваецца $f(x) \geq f(x_2)$.

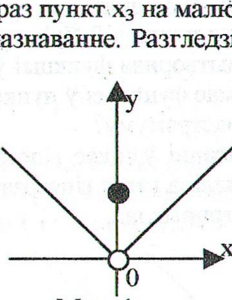
Праводзім параўнальную працу з азначэннем у падручніку.

Аналагічна ўводзіцца азначэнне пункту максімуму з дапамогай аналізу паводзін функцыі пры пераходзе праз пункт x_3 на малюнку 2.

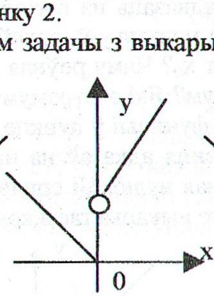
Другі этап - распазнаванне. Разгледзім задачы з выкарыстаннем графікаў функцый.



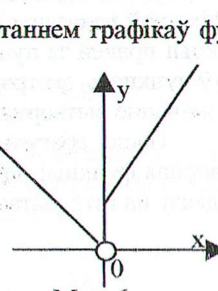
Мал. 3



Мал. 4



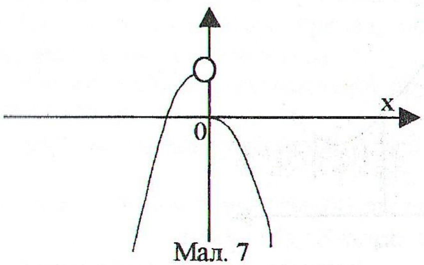
Мал. 5



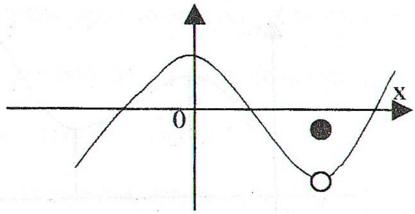
Мал. 6

Перад вучнямі ставяцца пытанні. Ці мае функцыя мінімум? Чаму функцыі, графікі якіх паказаны на малюнках 4-6, не маюць у пункце x = 0 мінімуму? Якой агульнай уласцівасцю валодаюць функцыі, графікі якіх паказаны на малюнках 4-6?

Адначасова больш моцным вучням даюцца прыклады графікаў функцый на картках, дзе трэба вызначыць наяўнасць пунктаў максімуму і аргументаваць свой адказ. Можна даць, напрыклад, такія графікі:



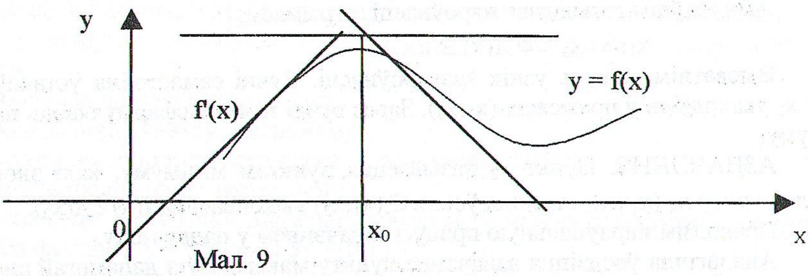
Мал. 7



Мал. 8

Такія графікі трэба падрыхтаваць на другой дошцы. З іх дапамогай хутка праводзіцца праверка выканання заданняў.

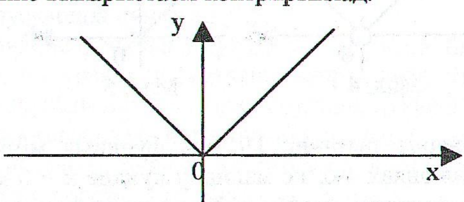
Затым пачынаецца трэці этап вывучэння тэмы. На гэтым этапе праводзіцца знаходжанне пунктаў экстрэмуму функцый, зададзеных формуламі. Ставіцца задача перад вучнямі: навучыцца ўстанаўліваць без графіка, дзе функцыя мае экстрэмум. Спачатку праводзім працу па малюнку.



Мал. 9

Вучні павінны адказаць на пытанні. Якія значэнні прымае вытворная функцыі, графік якой паказаны на малюнку 9, лявей за пункт x_0? Якія значэнні прымае вытворная функцыі правей за пункт x_0? Чаму роўная вытворная функцыі ў пункце x_0? Ці мае функцыя ў пункце x_0 экстрэмум? Які экстрэмум мае функцыя ў пункце x_0? Што можна сказаць пра значэнне вытворнай функцыі ў пункце экстрэмуму?

Пасля абагульнення адказаў на пытанні ўзнікае гіпотэза: у пункце экстрэмуму вытворная функцыі роўная нулю. Ці справядліва гэтая гіпотэза? Для хуткага знаходжання адказу на гэта пытанне выкарыстаем контрприклад.



Мал. 10

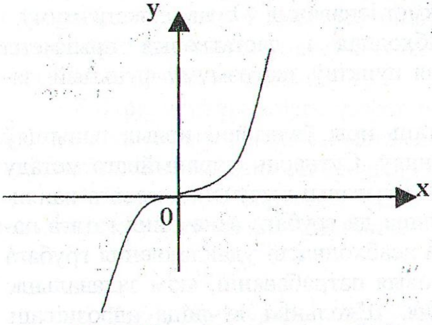
Ці мае функцыя, графік якой паказаны на малюнку 10, экстрэмум? Што можна сказаць пра вытворную функцыі ў пункце $x = 0$? Адказаўшы на гэтыя пытанні, вучні самастойна ўстанаўліваюць, што для функцыі, графік якой паказаны на малюнку 10, у пункце $x = 0$ не існуе вытворнай, але экстрэмум у гэтым пункце ёсць. Праводзіцца

ўдакладненне гіпотэзы: калі функцыя мае ў пункце экстрэмум і ў гэтым пункце існуе вытворная функцыі, то яна роўная нулю.
Гэтая гіпотэза апраўдваецца доказам неабходнай прыкметы існавання экстрэмуму, якая фармулюецца ў выглядзе тэарэмы Ферма.

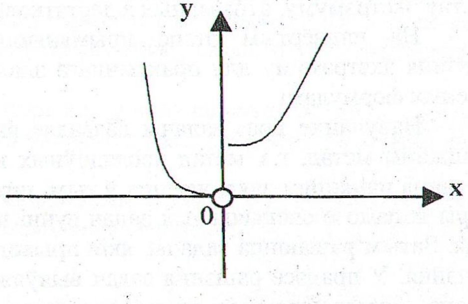
Якую ролю выконвае неабходная прыкмета? Ці можна з яе дапамогай знаходзіць экстрэмумы? Разгледзім задачу. Ці з'яўляецца пункт $x = 0$ пунктам экстрэмуму функцыі $y = x^3$? Знаходзім вытворную дадзенай функцыі: $y' = 3x^2$. У пункце $x = 0$ гэтая вытворная роўная нулю, але ў пункце $x = 0$ функцыя не мае экстрэмуму. Значыць, з дапамогай неабходнай прыкметы мы не можам знайсці пункты экстрэмуму. Але мы можам з дапамогай неабходнай прыкметы адкінуць з абсягу вызначэння функцыі ўсе пункты x, у якіх вытворная не роўная нулю. Экстрэмум не можа быць у пунктах, дзе вытворная не роўная нулю. Такім чынам, засталіся пункты, у якіх вытворная функцыі роўная нулю. Узнікае пытанне, ці толькі гэтыя пункты засталіся. Зноў на дапамогу прыходзіць контрпрыклад з графікам функцыі $y = |x|$. З яго вынікае, што трэба яшчэ ўлічваць пункты, дзе вытворная не існуе.

Усе пункты, у якіх вытворная функцыі роўная нулю або не існуе, называюцца **крытычнымі пунктамі**.

Перад намі ўзнікае пытанне, ці ў любым крытычным пункце існуе экстрэмум. Выкарыстаем для знаходжання адказу на гэта пытанне контрпрыклады.

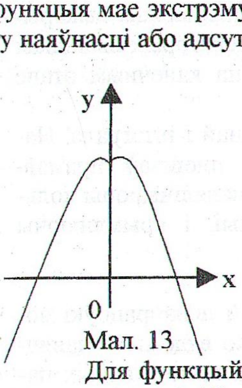


Мал. 11

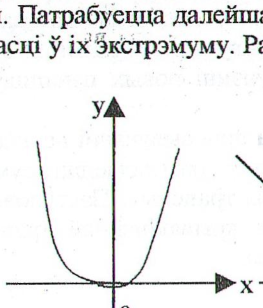


Мал. 12

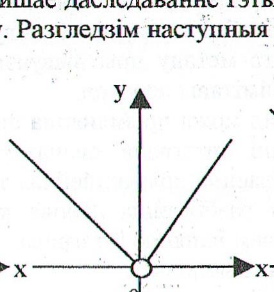
Дадзеныя контрпрыклады паказваюць, што не ў кожным крытычным пункце функцыя мае экстрэмум. Патрабуецца далейшае даследаванне гэтых пунктаў на прыкмету наяўнасці або адсутнасці ў іх экстрэмуму. Разгледзім наступныя задачы.



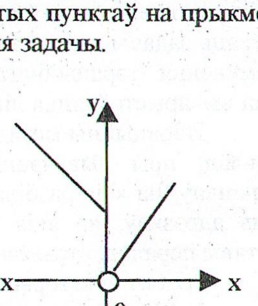
Мал. 13



Мал. 14



Мал. 15



Мал. 16

Для функцый, графікі якіх паказаны на малюнках 13-16, трэба адказаць на наступныя пытанні. Ці маюць функцыі экстрэмум у пункце $x = 0$? У якім выпадку экстрэмум будзе мінімумам (максімумам)? Якому патрабаванню павінна задавальняць функцыя, каб у яе крытычным пункце быў экстрэмум? Як сябе паводзіць функцыя да (лявей) пункту мінімуму (максімуму) і пасля (правей) яго? Што можна сказаць пра паводзіны вытворнай функцыі каля пункту мінімуму (максімуму)?

Пры рашэнні задач і абагульненні вынікаў узнікае гіпотэза: функцыя павінна быць непарыўнай у крытычным пункце, каб у гэтым пункце быў экстрэмум. Для вызначэння правіла знаходжання пунктаў максімуму ўдакладнім нашу гіпотэзу. Пры ўвядзенні паняццяў пунктаў мінімуму і максімуму мы даследавалі паводзіны функцыі да пункту экстрэмуму і пасля яго. Улічваючы гэта, а таксама вынікі рэшаных вышэй задач, можна ўстанавіць, што функцыя да пункту максімуму нарастае, а пасля яго спадае, г.з. $f'(x)>0$ да пункту максімуму і $f'(x)<0$ пасля яго. Гэтая ўдакладненая гіпотэза пацвярджаецца доказам тэарэмы 2.

ТЭАРЭМА 2. Калі функцыя f непарыўна ў пункце x_0, а $f'(x)>0$ на інтэрвале $(a;x_0)$ і $f'(x)<0$ на інтэрвале $(x_0;b)$, то пункт x_0 з'яўляецца пунктам максімуму функцыі f.

Для практычных вылічэнняў карыстаюцца спрошчанай фармулёўкай: калі пры пераходзе праз пункт x_0 вытворная мяняе знак з плюса на мінус, то пункт x_0 ёсць пункт максімуму (натуральна, сама функцыя павінна быць непарыўнай у пункце x_0).

Аналагічна можна атрымаць правіла для знаходжання пунктаў мінімуму функцыі, зададзенай формулай. Такім чынам, мы тэарэтычна вызначылі правіла знаходжання пунктаў экстрэмуму, атрыманых з дастатковых прыкмет існавання ў пункце экстрэмуму.

На чацвёртым этапе прымяняюцца неабходная і дастатковыя прыкметы існавання экстрэмуму для практычнага знаходжання пунктаў экстрэмуму функцый, зададзеных формуламі.

Навучанне праз задачы дазваляе выкарыстаць пры ўвядзенні новых паняццяў ітэрацыйны метад, г.з. метад паслядоўных набліжэнняў. Сутнасць ітэрацыйнага метаду навучання паняццям заключаецца ў тым, што пасля матывацыі вывучэння новага паняцця пры дапамозе спецыяльных задач вучні падводзяцца да грубага азначэння гэтага паняцця. Затым рашаюцца задачы, якія прыводзяць да неабходнасці ўдакладнення грубага азначэння. У працэсе рашэння задач выяўляюцца новыя патрабаванні, якім задавальняе паняцце, новыя істотныя прыкметы гэтага паняцця. Школьнікі вучацца адрозніваць істотныя прыкметы ад неістотных, устанаўліваць змест паняцця, вызначаць яго аб'ём. Пры рашэнні задач на ўдакладненне паняцця адначасова выпрацоўваюцца ўменні і навыкі прымянення ведаў пра паняцце на практыцы. На этапе замацавання можна выкарыстоўваць задачы для паглыблення ведаў аб вывучаемым паняцці. У некаторых выпадках прымянення ітэрацыйнага метаду пры вывучэнні новых паняццяў на канечным этапе можа выкарыстоўвацца лімітавы пераход.

Ітэрацыйны метад можа прымяняцца пры вывучэнні першаіснай і інтэграла. Напрыклад, пры вывучэнні інтэграла спачатку разглядаецца сума плошчаў прамавугольнікаў, на якія разбіваецца крывалінейная трапецыя. Паступова павялічваючы колькасць адрэзкаў, на якія разбіваецца аснова крывалінейнай трапецыі, і прымяняючы лімітавы пераход, атрымаем паняцце інтэграла.

Зробім некаторыя высновы.

1. Засваенне вучнямі навуковых паняццяў патрабуе актыўнай перапрацоўкі новай інфармацыі, дакладнага разумення яе значэння, суаднясення з ужо вядомымі паняццямі, прымянення ведаў аб паняццях на практыцы. Эфектыўнасць засваення новых па-

няццяў залежыць ад асабістай актыўнасці вучняў, якая забяспечваецца навучаннем праз задачы.

2. У навучальнай сістэме задач павінна быць задача, якая матывуе ўвядзенне пэўнага паняцця. Навучанне паняццям павінна ажыццяўляцца шляхам пастаноўкі задач, для рашэння якіх неабходна вывучэнне новага паняцця і выкарыстанне яго ўласцівасцяў.

3. Навучальная сістэма задач павінна выклікаць намаганні вучняў накіраваныя, на ўстанаўленне істотных прыкмет паняццяў і лагічных сувязяў паміж імі, выяўленне новых уласцівасцяў ужо вядомых паняццяў. Справядлівасць атрыманых вынікаў правяраецца рашэннем спецыяльных задач.

4. Карысць увядзення новага паняцця павінна ўсведамляцца вучнямі пры рашэнні задач, якія дапускаюць выкарыстанне ведаў аб вывучаемым паняцці.

5. Вывучэнне паняццяў задачным метадам садзейнічае развіццю творчых здольнасцяў школьнікаў. Вучні вучацца прымяняць індукцыю і дэдукцыю, абагульненне і канкрэтызацыю, класіфікацыю і сістэматызацыю, абстрагаванне і аналогію.

6. Пры навучанні паняццям праз задачы для ўвядзення гэтых паняццяў могуць выкарыстоўвацца некаторыя спецыфічныя метады, сярод якіх можна вылучыць ітэрацыйны метад.

7. Вялікую ролю ў кіраванні пазнавальнай дзейнасцю вучняў пры вывучэнні паняццяў выконваюць задачы-контрпрыклады, якія дазваляюць накіроўваць думку вучняў на вылучэнне істотных прыкмет паняццяў, аддзяленне гэтых прыкмет ад неістотных, ўстанаўленне лагічных сувязяў паміж істотнымі прыкметамі, самастойную фармулёўку азначэння вывучемых паняццяў.

8. Пры перапрацоўцы тэарэтычнага матэрыялу ў навучальную сістэму задач для вывучэння паняццяў задачным метадам павінна ўлічвацца паслядоўнасць псіхічных працэсаў і псіхалагічныя заканамернасці пазнання.

9. Навучанне паняццям праз задачы забяспечвае інтэнсіўную разумовую дзейнасць, высокі ўзровень абагульняльнай і абстрагавальнай дзейнасці.

1. Древс У., Фурманн Э. Организация урока (в вопросах и ответах). Перевод с немецкого. - М.: Просвещение, 1984.

2. Кабанова-Меллер Е.Н. Психология формирования знаний и навыков школьников. - М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962.

3. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. - М.: Изд-во АПН СССР, 1958.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 13.02.99 г.