УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

*Электронный учебно-методический комплекс
для студентов физико-математического факультета
специальности «Компьютерная физика»*

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2019

Авторы:

Грицук Дмитрий Владимирович — заведующий кафедрой прикладной математики и информатики УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат физико-математических наук

Кот Марина Геннадьевна — доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделированияУО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат физико-математических наук

Серая Зоя Николаевна — доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат физико-математических наук, доцент

Рецензенты:

Демидчик Александр Владимирович — заведующий кафедрой общей и теоретической физики УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», кандидат физико-математических наук, доцент

Кафедра информатики и прикладной математики УО «Брестский государственный технический университет»

ЭУМК написан в соответствии с действующей учебной программой по дисциплине «Аналитическая геометрия и линейная алгебра». ЭУМК ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, практическим занятиям и экзамену.

Предназначено для студентов дневной формы получения образования специальности 1-31 04 08 «Компьютерная физика» физико-математического факультета.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» соответствует образовательному стандарту и составлен в соответствии с действующей типовой учебной программой дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра».

Цель данного электронного учебно-методического комплекса — помочь студентам I курса физико-математического факультета в усвоении учебной дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», направить их на самостоятельную работу с математической литературой, развивать самостоятельность мышления, умение рассуждать.

В ЭУМК приведен теоретический материал по следующим темам: векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, матрицы и определители, линейные пространства, системы линейных уравнений, линейные операторы, билинейные и квадратичные формы, евклидовы пространства, линейные операторы в евклидовых пространствах, элементы теории групп, тензорная алгебра.

Материал, рассмотренный в ЭУМК, готовит базу для последующего изучения студентами таких учебных дисциплин, как «Механика», «Теоретическая механика», «Квантовая механика», «Электродинамика».

Текст пособия снабжен рядом гиперссылок, обеспечивающих быстрый поиск необходимой информации. После каждой темы приведен список задач и упражнений, рекомендуемый студентам для самостоятельного решения.

Помимо теоретического материала, задач и упражнений, ЭУМК содержит:

- элементы учебной программы (вспомогательный раздел),
- практикум (практический раздел),
- вопросы к экзамену (раздел контроля знаний),
- список литературы (вспомогательный раздел).

ЭУМК будет полезен студентам стационара физико-математического факультета при подготовке к практическим занятиям по дисциплине «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» и к экзамену.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1 Матрицы и определители квадратных матриц

Матрицы. Линейное пространство матриц. Умножение и транспонирование матриц. Матрицы специального вида. Определитель квадратной матрицы и его свойства. Теорема об определителе произведения двух матриц. Обратная матрица.

Тема 2 Векторная алгебра

Понятие вектора. Свободные и связанные векторы. Линейное пространство геометрических векторов. Разложение вектора по базису. Аффинная система координат. Декартова прямоугольная система координат. Скалярное и векторное произведения: свойства, механический смысл, вычисление в ортонормированном базисе. Смешанное произведение: свойства, геометрический смысл вычисление в ортонормированном базисе. Двойное векторное произведения. Тождество Якоби.

Тема 3 Аналитический геометрия на плоскости и в пространстве

Основные виды уравнений прямой на плоскости и в пространстве. Уравнения плоскости. Пучок прямых на плоскости и плоскостей в пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости и от точки до плоскости в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Определения эллипса, гиперболы, параболы и вывод их канонических уравнений. Параметрические уравнения эллипса. Директрисы и эксцентриситет эллипса и гиперболы. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. Определение канонического уравнения второй степени. Классификация кривых и поверхностей второго порядка. Исследование поверхностей второго порядка методом параллельных сечений. Прямолинейные образующие.

Тема 4 Линейные пространства

Определение линейного пространства и простейшие следствия из аксиом. Линейная зависимость и независимость. Базис и координаты. Связь между размерностью и базисом. Преобразования базиса и координат, матрица перехода. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма подпространств. Линейная оболочка. Формула размерности Грассмана.

Тема 5 Системы линейных уравнений

Ранг матрицы и размерность линейной оболочки ее столбцов. Элементарные преобразования над матрицами. Матричные уравнения. Критерий совместности. Системы крамеровского типа. Теорема о базисном миноре. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Базис и размерность пространства решений однородной системы. Фундаментальная система решений

Тема 6 Линейные операторы

Понятие линейного оператора. Образ и ядро линейного оператора. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Операции над линейными операторами.

Обратный оператор. Изоморфизм линейных пространств. Собственные значения и собственные векторы. Присоединенные векторы. Приведение квадратной матрицы к диагональному виду. Канонический вид линейных операторов. Жорданова нормальная форма матрицы.

Тема 7 Билинейные и квадратичные формы

Билинейная форма и её матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса. Симметричная билинейная форма. Квадратичные формы. Изменение матрицы квадратичной формы при изменении базиса. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Закон инерции.

Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Тема 8 Евклидовы пространства

Скалярное произведение. Вещественные и комплексные евклидовы пространства, псевдоевклидовы пространства. Понятия длины и угла. Существование ортогонального базиса. Разложение пространства на прямую сумму подпространств. Изоморфизм евклидовых пространств.

Тема 9 Линейные операторы в евклидовых пространствах

Ортогональные и унитарные матрицы. Эрмитовы и симметричные матрицы. Самосопряженные операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора. Приводимость эрмитовых и симметричных матриц к диагональному виду. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм. Изометрии. Приведение к каноническому виду уравнения фигур второго порядка.

Тема 10 Элементы теории групп

Понятие группы. Основные свойства групп. Примеры групп

Тема 11 Тензорная алгебра

Общее определение тензора. Алгебраические операции над тензорами. Тензоры в евклидовых пространствах.

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название раздела, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
1	**Матрицы и определители квадратной матрицы (10 ч)**	**4**	**4**
1.1	Матрицы. Линейное пространство матриц. Умножение и транспонирование матриц. Матрицы специального вида	2	2
1.2	Определитель квадратной матрицы и его свойства	1	1
1.3	Теорема об определителе произведения двух матриц. Обратная матрица	1	1
2	**Векторная алгебра (16 ч)**	**8**	**8**
2.1	Понятие вектора. Свободные и связанные векторы. Линейное пространство геометрических векторов. Разложение вектора по базису	2	2
2.2	Аффинная система координат. Декартова прямоугольная система координат	2	2
2.3	Скалярное и векторное произведения: свойства, механический смысл, вычисление в ортонормированном базисе	2	2
2.4	Смешанное произведение: свойства, геометрический смысл вычисление в ортонормированном базисе. Двойное векторное произведения. Тождество Якоби	2	2
3	**Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве (20 ч)**	**7**	**13**

3.1	Основные виды уравнений прямой на плоскости и в пространстве. Уравнения плоскости. Пучок прямых на плоскости и плоскостей в пространстве	2	2
3.2	Расстояние от точки до прямой на плоскости и от точки до плоскости в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве	2	2
3.3	Определения эллипса, гиперболы, параболы и вывод их канонических уравнений	1	2
3.4	Параметрические уравнения эллипса. Директрисы и эксцентриситет эллипса и гиперболы. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы	1	1
3.5	Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы	1	2
3.6	Определение канонического уравнения второй степени. Классификация кривых и поверхностей второго порядка	0	2
3.7	Исследование поверхностей второго порядка методом параллельных сечений. Прямолинейные образующие	0	2
4	**Линейные пространства (14 ч)**	**7**	**7**
4.1	Определение линейного пространства и простейшие следствия из аксиом. Линейная зависимость и независимость	2	2
4.2	Базис и координаты. Связь между размерностью и базисом. Преобразования базиса и координат, матрица перехода	2	2

4.3	Подпространства. Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма подпространств	2	2
4.4	Линейная оболочка. Формула размерности Грассмана	1	1
5	**Системы линейных уравнений (12 ч)**	**6**	**6**
5.1	Ранг матрицы и размерность линейной оболочки ее столбцов. Элементарные преобразования над матрицами. Матричные уравнения. Критерий совместности. Системы крамеровского типа	2	2
5.2	Теорема о базисном миноре. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений	2	2
5.3	Базис и размерность пространства решений однородной системы. Фундаментальная система решений	2	2
6	**Линейные операторы (14 ч)**	**7**	**7**
6.1	Понятие линейного оператора. Образ и ядро линейного оператора. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Операции над линейными операторами	3	3
6.2	Обратный оператор. Изоморфизм линейных пространств. Собственные значения и собственные векторы. Присоединенные векторы	2	2
6.3	Приведение квадратной матрицы к диагональному виду. Канонический вид линейных операторов. Жорданова нормальная форма матрицы	2	2
7	**Билинейные и квадратичные формы (5 ч)**	**3**	**2**

7.1	Билинейная форма и её матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса. Симметричная билинейная форма. Квадратичные формы. Изменение матрицы квадратичной формы при изменении базиса. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Закон инерции	2	2
7.2	Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра	1	0
8	**Евклидовы пространства (4 ч)**	**3**	**1**
8.1	Скалярное произведение. Вещественные и комплексные евклидовы пространства, псевдоевклидовы пространства. Понятия длины и угла. Существование ортогонального базиса	2	1
8.2	Разложение пространства на прямую сумму подпространств. Изоморфизм евклидовых пространств	1	0
9	**Линейные операторы в евклидовых пространствах (9 ч)**	**4**	**5**
9.1	Ортогональные и унитарные матрицы. Эрмитовы и симметричные матрицы. Самосопряженные операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора	2	2
9.2	Приводимость эрмитовых и симметричных матриц к диагональному виду. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований	2	2

9.3	Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм. Изометрии. Приведение к каноническому виду уравнения фигур второго порядка	0	1
10	**Элементы теории групп (2 ч)**	**1**	**1**
10.1	Понятие группы. Основные свойства групп. Примеры групп	1	1
11	**Тензорная алгебра (10 ч)**	**4**	**6**
11.1	Общее определение тензора	2	2
11.2	Алгебраические операции над тензорами	1	2
11.3	Тензоры в евклидовых пространствах	1	2
	Итого	**54**	**60**
	Экзамен		

ТЕМА 1
Векторная алгебра

1.1. Векторы и операции над ними

Определение 1.1. Вектором назовем направленный отрезок.

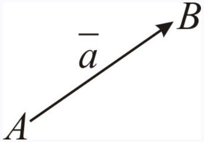


Рис. 1.1: Вектор $\overline{AB}$

Обозначают вектор с помощью стрелки или черты: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ ($\overline{AB}$, $\overline{a}$).

Точка A называется *началом*, точка B – *концом вектора* $\overline{AB}$.

Если точки A и B совпадают, то $\overline{AB}$ называется *нуль-вектором* (обозначается $\overline{0}$).

Определение 1.2. Два вектора называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой эти векторы параллельны.

Коллинеарность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначают так: $\overline{a} || \overline{b}$.

Среди коллинеарных векторов различают *сонаправленные* (обозначают $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$) и *противоположно направленные* (обозначают $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$).

Считается, что $\overline{0}$ коллинеарен любому вектору.

Направления неколлинеарных векторов сравнивать нельзя.

Определение 1.3. Три вектора называются *компланарными*, если существует плоскость, которой эти векторы параллельны.

Понятие компланарности можно распространить на любое количество векторов. Ясно, что два вектора всегда компланарны, в то время как три, четыре и более векторов могут быть как компланарными, так и некомпланарными. Ясно также, что если из трех векторов два коллинеарны, то три таких вектора компланарны.

Определение 1.4. Длина (*модуль*) вектора $\overline{AB}$– длина отрезка AB.

Обозначают длину вектора $\overline{AB}$ так: $|\overline{AB}|$. Очевидно, что $|\overline{0}| = 0$.

Определение 1.5. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют *равными* и обозначают $\overline{a} = \overline{b}$, если

1) $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ и
2) $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$.

Определение 1.6. Даны векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$. Выберем произвольную точку A пространства и построим $\overline{AA_1} = \overline{a}_1$, $\overline{A_1A_2} = \overline{a}_2, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{a}_n$. Образуем вектор $\overline{AA_n}$. Полученный вектор называется *суммой векторов* $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$.

Определение суммы векторов является одновременно *правилом сложения* и называется *правилом многоугольника*.

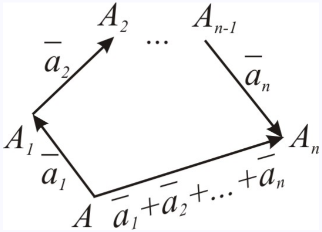


Рис. 1.2: Правило многоугольника сложения векторов

В случае двух слагаемых получаем правило треугольника сложения векторов. Сумму двух неколлинеарных векторов можно найти также по правилу параллелограмма.

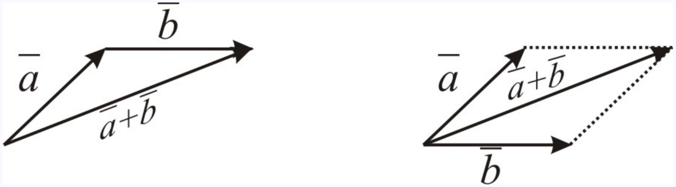


Рис. 1.3: Правило треугольника и правило параллелограмма сложения двух векторов

Свойства сложения векторов

1) $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}-$ коммутативность;
2) $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}-$ ассоциативность.

Определение 1.7. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *противоположными*, если $\overline{a}+\overline{b}=\overline{0}$.

Например, $\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{0}$, поэтому $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$– противоположные векторы.

Теорема 1.1. $|\overline{a} + \overline{b}| \leq |\overline{a}| + |\overline{b}|$– *модуль суммы векторов не превосходит суммы модулей этих векторов.*

Определение 1.8. *Разностью* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют такой вектор $\overline{c}$, который в сумме с $\overline{b}$ дает $\overline{a}$.

Правило вычитания векторов

Для того, чтобы получить разность двух векторов, нужно:
1) отложить эти векторы от одной точки;
2) соединить их концы отрезком;
3) направить построенный отрезок в сторону вектора-уменьшаемого.

Определение 1.9. Пусть дан вектор $\overline{a} \neq \overline{0}$ и число $\alpha \neq 0$. *Произведением* вектора $\overline{a}$ на число α называют такой вектор $\overline{b}$, который удовлетворяет следующим условиям:
1) $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$, если $\alpha > 0$; $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$, если $\alpha < 0$;
2) $|\overline{b}| = |\alpha| \cdot |\overline{a}|$.
Если $\overline{a} = \overline{0}$ или $\alpha = 0$, то $\overline{b} = \alpha \cdot \overline{a} = \overline{0}$.

Замечания

1) $(-1)\cdot\overline{a} = -a-$ вектор, противоположный $\overline{a}$;
2) для любого вектора $\overline{a} \neq \overline{0}$ можно построить вектор

$$\overline{a^0} = \frac{1}{|\overline{a}|}\cdot\overline{a},$$

коллинеарный $\overline{a}$ и называемый *ортом* или *единичным вектором* вектора $\overline{a}$. Его длина равна единице.

Теорема 1.2. (*Критерий коллинеарности векторов*). *Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда один из них может быть выражен через другой с помощью действительного числа:*

$$\overline{a} \parallel \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\alpha \in \boldsymbol{R} \quad | \quad \overline{a} = \alpha\overline{b}.$$

Для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ и любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ справедливы следующие

Свойства умножения вектора на число

1) $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$;
2) $(\alpha+\beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$;
3) $\alpha(\overline{a}+\overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$.

Итак, на множестве векторов пространства заданы операции сложения векторов и умножения вектора на число из множества $\mathbf{R}$ так, что выполняются условия:

1) $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$;
2) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;
3) $\exists \overline{0} \quad | \quad \forall \overline{a} \quad \overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$;
4) $\forall \overline{a} \quad \exists (-\overline{a}) \quad | \quad \overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$;
5) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$;
6) $\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a}$;
7) $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$;
8) $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$.

Определение 1.10. Всякое непустое множество V элементов любой природы, на котором заданы две операции – сложения элементов из V и умножения элемента из V на действительное число так, что выполняются условия 1)–8), называется *векторным пространством* или *линейным пространством*, а его элементы – *векторами*.

Определение 1.11. Рассмотрим систему из n ($n \in \mathbf{N}$) векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ и n действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Вектор

$$\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{a}_n$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$. В этом случае также говорят, что вектор $\overline{b}$ *линейно выражается* через векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$.

Теорема 1.3. ***(Критерий компланарности векторов).*** *Для того, чтобы три вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них мог быть представлен в виде линейной комбинации двух других, причем если $\overline{e}_1 \nparallel \overline{e}_2$, то любой компланарный им вектор $\overline{a}$ может быть единственным способом представлен в виде*

$$\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2.$$

1.2. Базис. Координаты вектора. Проекция вектора на ось

Определение 1.12. *Базисом на прямой* называется любой $\overline{e} \neq \overline{0}$, параллельный этой прямой.

Базисом на плоскости называется упорядоченная пара $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ векторов, параллельных этой плоскости, причем $\overline{e}_1 \nparallel \overline{e}_2$.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ некомпланарных векторов.

Теорема 1.4. *Пусть в пространстве дан некоторый базис $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$. Тогда для любого вектора $\overline{a}$ существует единственная упорядоченная тройка действительных чисел (x, y, z) таких, что*

$$\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3. \tag{1.1}$$

Определение 1.13. Равенство (1.1) называется *разложением вектора $\overline{a}$ по базису $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$*, а коэффициенты этого разложения — *координатами вектора $\overline{a}$* в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

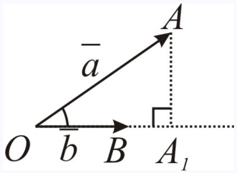
Обозначают координаты вектора: $\overline{a}(x, y, z)$ или $\overline{a} = (x, y, z)$.

Аналогично вводят понятие координат вектора в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ на плоскости.

Теорема 1.5. *Линейные операции над векторами, заданными координатами в некотором базисе, сводятся к тем же линейным операциям над их координатами в этом базисе. Другими словами, если даны векторы $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и число $\alpha \in \boldsymbol{R}$, то*

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2), \qquad \alpha\overline{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1).$$

Определение 1.14. Пусть даны два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$, причем $\overline{b} \neq \overline{0}$. Отложим их от некоторой точки O: $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$. *Углом* между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется угол AOB (обозначается $(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$).



Пусть A_1– основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую OB. *Проекция* $\overline{a}$ на $\overline{b}$– число $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$, определяемое по формуле:

$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \begin{cases} |\overline{OA_1}|, \text{ если } \overline{OA_1} \uparrow\uparrow \overline{b} \\ -|\overline{OA_1}|, \text{ если } \overline{OA_1} \uparrow\downarrow \overline{b}. \end{cases}$$

Справедлива формула:

$$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}|\cos(\overline{a}\widehat{,}\overline{b}).$$

Определение 1.15. *Вектором проекции* $\overline{a}$ на $\overline{b}$ называется вектор

$$\overline{\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}} = \overline{OA_1}.$$

Свойства проекций

1) $\text{пр}_{\overline{c}}(\overline{a}+\overline{b}) = \text{пр}_{\overline{c}}\overline{a} + \text{пр}_{\overline{c}}\overline{b}$,
2) $\text{пр}_{\overline{b}}\alpha\overline{a} = \alpha\,\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$.

1.3. Аффинная система координат. Декартова прямоугольная система координат

Определение 1.16. *Аффинной системой координат на плоскости* называется упорядоченный набор $R = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$, где O– точка, называемая *началом координат*, а $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$– базис на плоскости.

Из определения следует, что $\overline{e_1} \nparallel \overline{e_2}$.

Определение 1.17. Пусть M– точка плоскости. *Радиус-вектором точки* M относительно аффинной системы координат $R = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ на плоскости называется вектор $\overline{OM}$.

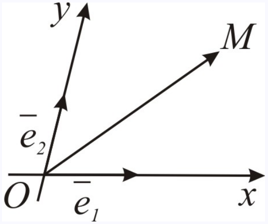


Рис. 1.4: Радиус-вектор точки M

Определение 1.18. *Координатами точки* M относительно аффинной системы координат $R = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ *на плоскости* называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$ этой точки относительно базиса $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$, входящего в R.

Обозначают координаты точки на плоскости: $M(x, y)$.

Определение 1.19. Аффинная *система координат* $R = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ *на плоскости* называется *декартовой (прямоугольной)* или *ортонормированной*, если ее координатные векторы единичные и перпендикулярны друг другу.

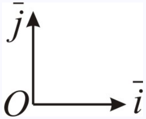


Рис. 1.5: Прямоугольная система координат на плоскости, $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$

Определение 1.20. *Аффинной системой координат в пространстве* называется упорядоченный набор $R = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$, где O— точка, называемая *началом координат*, а $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$— базис в пространстве.

Из определения следует, что $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ некомпланарны.

Определение 1.21. Пусть M— точка плоскости. *Радиус-вектором точки M* относительно аффинной системы координат $R = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ в пространстве называется вектор $\overline{OM}$.

Определение 1.22. *Координатами точки M* относительно аффинной системы координат $R = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ *в пространстве* называются координаты радиус-вектора $\overline{OM}$ этой точки относительно базиса $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$, входящего в R.

Обозначают координаты точки в пространстве: $M(x, y, z)$.

Определение 1.23. Аффинная *система координат* $R = \{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ *в пространстве* называется *декартовой (прямоугольной)* или *ортонормированной*, если ее векторы единичные и перпендикулярны друг другу.

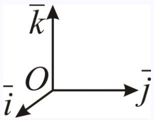


Рис. 1.6: Прямоугольная с.к. в пространстве, $|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1$, $\bar{i} \perp \bar{j}$, $\bar{i} \perp \bar{k}$, $\bar{j} \perp \bar{k}$

Теорема 1.6. *Пусть относительно с.к.* $R = \{O, \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ *даны координаты точек* $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$. *Тогда*

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A), \tag{1.2}$$

а расстояние

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \tag{1.3}$$

Определение 1.24. *Базис* $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ называется *правым*, если, глядя на векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ из конца вектора $\overline{e}_3$, мы видим кратчайший поворот вектора $\overline{e}_1$ до вектора $\overline{e}_2$ происходящим в направлении против часовой стрелки (*базис* называется *левым* — если по часовой стрелке).

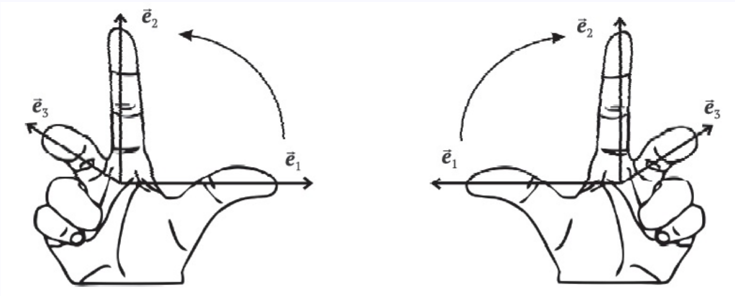


Рис. 1.7: Правый и левый базисы

Моделями правого и левого базисов могут служить первые три пальца руки человека, соответственно правой и левой, расположенных в естественном положении. Этим объясняется употребление терминов *правый* и *левый*.

1.4. Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение 1.25. *Скалярным произведением* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}). \tag{1.4}$$

Очевидно, что если $\overline{a} = \overline{0}$ или $\overline{b} = \overline{0}$, то $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$.

Воспользовавшись тем, что $|\overline{a}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$, $|\overline{b}|\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$, получим

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}|\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}. \tag{1.5}$$

Мы получили второе определение скалярного произведения векторов:

Определение 1.26. *Скалярным произведением* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению модуля одного из векторов и ортогональной проекции второго вектора на направление первого вектора.

Свойства скалярного произведения векторов

1) Если $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $\overline{b} \neq \overline{0}$, то $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{a} \perp \overline{b}$;
2) $\overline{a}\cdot\overline{b} > 0$, если $0 \le (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) \le \frac{\pi}{2}$; $\overline{a}\cdot\overline{b} < 0$, если $\frac{\pi}{2} \le (\widehat{\overline{a},\overline{b}}) \le \pi$;
3) $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$ – коммутативность;
4) $(\alpha\overline{a})\cdot\overline{b} = \alpha(\overline{a}\cdot\overline{b})$ – ассоциативность относительно числового множителя;
5) $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c} + \overline{b}\cdot\overline{c}$ – дистрибутивность.

Определение 1.27. Скалярным квадратом вектора $\overline{a}$ называется число, обозначаемое $\overline{a}^2$, равное скалярному произведению этого вектора на себя:

$$\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2. \tag{1.6}$$

Свойства 3—5 скалярного умножения векторов позволяют линейные комбинации векторов перемножать как обычные числовые:

$$(3\overline{a}+\overline{b})\cdot(2\overline{a}-7\overline{b}) = 3\overline{a}\cdot(2\overline{a}-7\overline{b})+\overline{b}\cdot(2\overline{a}-7\overline{b}) = 6\overline{a}^2-21\overline{a}\cdot\overline{b}+2\overline{b}\cdot\overline{a}-7\overline{b}^2 =$$
$$= 6\overline{a}^2 - 19\overline{a}\cdot\overline{b} - 7\overline{b}^2.$$

Скалярное произведение векторов, заданных координатами

Пусть известны координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ относительно ортонормированного базиса $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$:

$$\overline{a}(x_1, y_1, z_1), \quad \overline{b}(x_2, y_2, z_2).$$

Тогда

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{1.7}$$

Приложения скалярного произведения векторов

1) Длина вектора.

Из формулы (1.6) следует **основная формула для вычисления длины вектора**:

$$|\overline{a}| = \sqrt{\overline{a}^2}. \tag{1.8}$$

Пусть $\overline{a} = (x, y, z)_B$, где $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Тогда

$$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.9}$$

2) Угол между векторами. Направляющие косинусы.
Из формулы (1.4) получаем

$$\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}. \tag{1.10}$$

Если $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)_B$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)_B$, где $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, то из (1.10) получим

$$\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{1.11}$$

Определение 1.28. Рассмотрим базис $B = \{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ и обозначим $(\widehat{\overline{i}, \overline{a}}) = \alpha$, $(\widehat{\overline{j}, \overline{a}}) = \beta$, $(\widehat{\overline{k}, \overline{a}}) = \gamma$. *Направляющими косинусами* вектора $\overline{a}$ называются числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Пусть $\overline{a} = (x, y, z)$. Т.к. $\overline{i} = (1, 0, 0)$, $\overline{j} = (0, 1, 0)$, $\overline{k} = (0, 0, 1)$, то по формуле (1.11) получим

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

откуда следует, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Если $\overline{a}$ — орт, то $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$, тогда $\cos\alpha = x$, $\cos\beta = y$, $\cos\gamma = z$. Следовательно,

$$\overline{a}=(x,y,z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

т.е. координатами орта служат его направляющие косинусы.

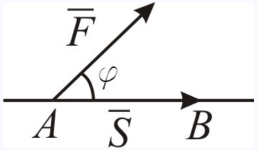
3) Ортогональная проекция вектора на ось.

Из формулы (1.5) следует, что $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|}$.

Если $\overline{a}$ — орт, то $\text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{b}$.

4) Работа постоянной силы.

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из точки A в точку B под действием постоянной силы $\overline{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overline{AB}=\overline{S}$.



Работа силы $\overline{F}$ при перемещении $\overline{S}$ равна $A=F\cdot S\cdot\cos\varphi$, следовательно,

$$A=\overline{F}\cdot\overline{S}. \tag{1.12}$$

Пример. Сила $\overline{F} = 9\overline{i} + 5\overline{j} - 4\overline{k}$ разложена по трем взаимно перпендикулярным направлениям, одно из которых задано вектором $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$. Найти составляющую силы $\overline{F}$ в направлении вектора $\overline{a}$.

Решение. Пусть три взаимно перпендикулярные направления задаются векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, образующими ортогональный базис. Разложение вектора $\overline{F}$ по этому базису имеет вид

$$\overline{F} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}, \text{ где } x, y, z - \text{ числа.}$$

Умножим обе части последнего равенства скалярно на $\overline{a}$. Получим

$$\overline{F} \cdot \overline{a} = x\overline{a}^2, \text{ откуда } x = \frac{\overline{F} \cdot \overline{a}}{\overline{a}^2}.$$

Тогда $x = \dfrac{9 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + (-4) \cdot (-4)}{1^2 + 2^2 + (-4)^2} = \dfrac{35}{21} = \dfrac{5}{3}$. Итак, составляющая силы $\overline{F}$ в направлении $\overline{a}$ равна $5\overline{a}/3$.

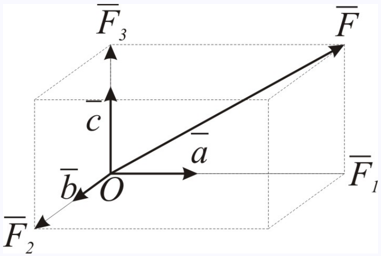


Рис. 1.8: $\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c}$

1.5. Векторное произведение векторов и его свойства

Определение 1.29. Пусть $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$. *Векторным произведением* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{a} \times \overline{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $\overline{a} \times \overline{b} \perp \overline{a}$, $\overline{a} \times \overline{b} \perp \overline{b}$;
2) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{a} \times \overline{b}$ образуют правую тройку векторов;
3) $|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\widehat{\overline{a},\overline{b}})$.

Если $\overline{a} = \overline{0}$ или $\overline{b} = \overline{0}$, то $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$.

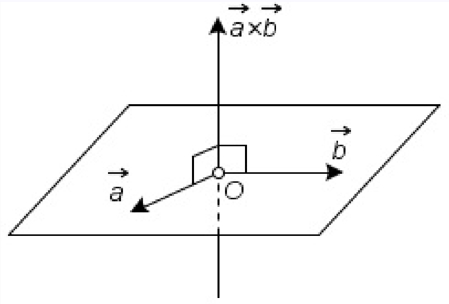


Рис. 1.9: Векторное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$

Свойства векторного произведения векторов

1) Векторное произведение двух ненулевых векторов равно $\overline{0}$ тогда и только тогда, когда векторы-сомножители коллинеарны.

2) Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах (геометрический смысл векторного произведения векторов).

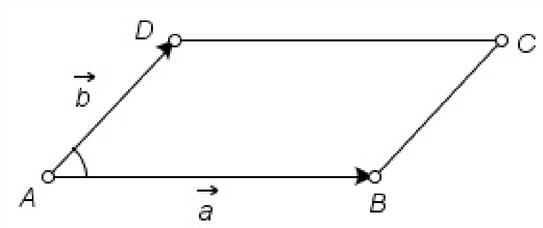


Рис. 1.10: Геометрический смысл векторного произведения: $S_{ABCD} = |\overline{a} \times \overline{b}|$

3) Векторное умножение векторов обладает свойством антикоммутативности: $\overline{b} \times \overline{a} = -\overline{a} \times \overline{b}$ для любых двух векторов $\overline{a}, \overline{b}$.

4) Векторное умножение векторов обладает свойством ассоциативности относительно числового множителя:

$(\alpha\overline{a}) \times \overline{b} = \alpha \cdot (\overline{a} \times \overline{b})$ для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и любого $\alpha \in \mathbf{R}$.

5) Векторное умножение векторов обладает свойством дистрибутивности относительно сложения:

$(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$,

$\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$ для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

Пример использования свойств векторного произведения.

$(2\overline{a} - 3\overline{b}) \times (7\overline{a} + 5\overline{b}) = 2\overline{a} \times (7\overline{a} + 5\overline{b}) - 3\overline{b} \times (7\overline{a} + 5\overline{b}) =$

$= 14\overline{a} \times \overline{a} + 10\overline{a} \times \overline{b} - 21\overline{b} \times \overline{a} - 15\overline{b} \times \overline{b} = 10\overline{a} \times \overline{b} + 21\overline{a} \times \overline{b} = 31\overline{a} \times \overline{b}.$

Пусть $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$– правый ортонормированный базис. Составим таблицу векторного умножения базисных векторов. Сначала вычислим векторное произведение $\bar{i}\times\bar{j}$. По определению, вектор $\bar{i}\times\bar{j}$ должен удовлетворять условиям:

1) $\bar{i}\times\bar{j}\perp\bar{i}$, $\bar{i}\times\bar{j}\perp\bar{j}$, следовательно, $\bar{i}\times\bar{j} \quad \| \quad \bar{k}$;

2) $\bar{i},\bar{j},\bar{i}\times\bar{j}$ образуют правую тройку векторов, следовательно, $\bar{i}\times\bar{j}$ сонаправлен с вектором $\bar{k}$;

3) $|\bar{i}\times\bar{j}| = |\bar{i}|\cdot|\bar{j}|\cdot\sin(\widehat{\bar{i},\bar{j}}) = 1\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 1.$

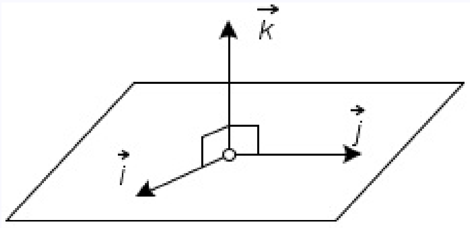


Рис. 1.11: Правый ортонормированный базис $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$

Из условий 1)–3) следует, что $\bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}$. Аналогично можно получить: $\bar{i}\times\bar{k}=\overline{-j}$, $\bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}$. Полученные результаты оформим в виде таблицы векторного умножения векторов:

$\times$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	$\bar{0}$	$\bar{k}$	-$\bar{j}$
$\bar{j}$	-$\bar{k}$	$\bar{0}$	$\bar{i}$
$\bar{k}$	$\bar{j}$	-$\bar{i}$	$\bar{0}$

Векторное произведение векторов, заданных координатами

Пусть векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ заданы своими координатами в правом ортонормированном базисе $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$:

$$\overline{a}(x_1, y_1, z_1), \overline{b}(x_2, y_2, z_2).$$

Тогда координаты их векторного произведения вычисляются по следующей формуле:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \tag{1.13}$$

$$= \overline{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \overline{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\overline{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\overline{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\overline{k}.$$

Приложения векторного произведения векторов

1) Выяснение вопроса о коллинеарности векторов, заданных своими координатами.

Для выяснения, коллинеарны ли векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, достаточно проверить, равно ли $\overline{0}$ их векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$:

$$\overline{a} \| \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

2) Нахождение площади треугольника или параллелограмма, заданных координатами своих вершин.

Задача. Найдите площадь треугольника с вершинами $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$.

Решение. Образуем векторы $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, $\overline{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$. Их векторное произведение

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix}.$$

Теперь можно найти площадь $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|$.

3) Определение момента силы относительно точки.

Определение 1.30. *Момент силы* $\overline{F}$ относительно точки A— вектор $\overline{M}_A(\overline{F}) = \overline{AK} \times \overline{F}$, где K— точка приложения силы $\overline{F}$.

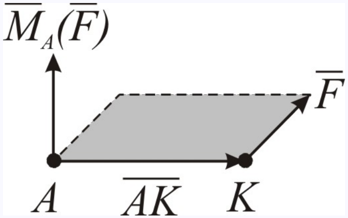


Рис. 1.12: Момент силы численно равен площади заштрихованного параллелограмма

Пример. Сила $\overline{F} = \overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ приложена в точке $A(0,1,-2)$. Найти $\overline{M}_B(\overline{F})$, если $B(1,-1,2)$.

Решение. $\overline{M}_B(\overline{F}) = \overline{BA} \times \overline{F}$, $\overline{BA} = (-1,2,-4)$.

$$\overline{M}_B(\overline{F}) = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \overline{j} \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \overline{k} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$= (-2,-3,-1)$.

4) Нахождение линейной скорости вращения.

Скорость $\overline{v}$ точки M твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\overline{w}$ вокруг неподвижной оси, определяется формулой Эйлера

$$\overline{v} = \overline{w} \times \overline{r},$$

где $\overline{r} = \overline{OM}$, $O-$ некоторая неподвижная точка оси.

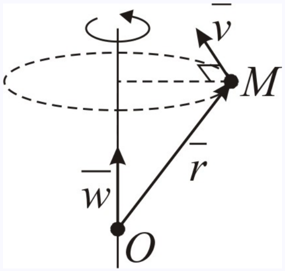


Рис. 1.13: Нахождение линейной скорости вращения

1.6. Смешанное произведение векторов и его свойства

Определение 1.31. *Смешанным произведением* трех векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называется число $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$, равное скалярному произведению векторов $\overline{a}\times\overline{b}$ и $\overline{c}$:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}.$$

Используя второе определение скалярного произведения векторов, можно получить второе определение смешанного произведения:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = |\overline{a}\times\overline{b}|\cdot \text{пр}_{\overline{a}\times\overline{b}}\overline{c}.$$

Свойства смешанного произведения векторов

1) Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы-сомножители компланарны.

2) Модуль смешанного произведения некомпланарных векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах (геометрический смысл смешанного произведения).

3) Знак смешанного произведения векторов зависит от ориентации тройки векторов-сомножителей: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} > 0$, если $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}-$ правая тройка, $\overline{a}\overline{b}\overline{c} < 0$, если $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}-$ левая тройка.

4) От циклической перестановки векторов значение смешанного произведения не изменяется, нециклическая перестановка векторов изменяет только знак смешанного произведения на противоположный:
$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}.$

5) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c})$.
6) $(\overline{a}_1 + \overline{a}_2)\overline{b}\overline{c} = \overline{a}_1\overline{b}\overline{c} + \overline{a}_2\overline{b}\overline{c}$.
7) $(\lambda\overline{a})\overline{b}\overline{c} = \overline{a}(\lambda\overline{b})\overline{c} = \overline{a}\overline{b}(\lambda\overline{c}) = \lambda\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

Смешанное произведение векторов, заданных координатами

Пусть векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$:

$$\overline{a}(x_1, y_1, z_1), \overline{b}(x_2, y_2, z_2), \overline{c}(x_3, y_3, z_3).$$

Тогда их смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Приложения смешанного произведения векторов

1) Проверка компланарности векторов, заданных своими координатами.

Векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \quad \overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$

2) Определение взаимной ориентации векторов в пространстве по знаку их смешанного произведения (является тройка векторов правой или левой).

3) Вычисление объема параллелепипеда или тетраэдра с вершинами, координаты которых известны.

Задача. Найдите объем тетраэдра с вершинами в точках $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$, $D(x_D, y_D, z_D)$.

Решение. Образуем векторы $\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$, $\overline{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A)$, $\overline{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A)$. Их смешанное произведение

$$\overline{AB} \quad \overline{AC} \quad \overline{AD} = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{vmatrix}.$$

Теперь можно найти объем $V_{\text{тетр}} = \dfrac{1}{6} V_{\text{параллелеп}} = \dfrac{1}{6} |\overline{AB} \quad \overline{AC} \quad \overline{AD}|$.

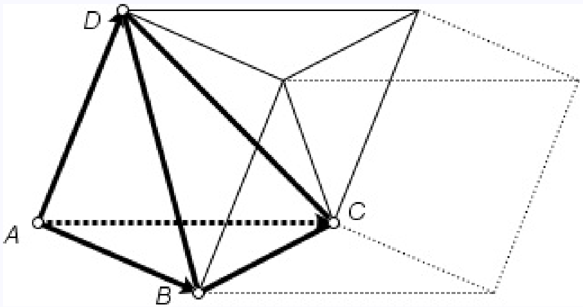


Рис. 1.14: Вычисление объема тетраэдра

1.7. Двойное векторное произведение векторов и его свойства

Определение 1.32. *Двойным векторным произведением* векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ называются векторы $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c}$ и $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$.

Имеют место формулы:

1) $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c}) = \overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{c}) - \overline{c}(\overline{a}\cdot\overline{b})$ (правило для запоминания: «бац» минус «цаб»);

2) $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c} = \overline{b}(\overline{a}\cdot\overline{c}) - \overline{a}(\overline{b}\cdot\overline{c})$ (несложно выводится с помощью первой формулы);

3) $(\overline{a}\times\overline{b})\times\overline{c} + (\overline{b}\times\overline{c})\times\overline{a} + (\overline{c}\times\overline{a})\times\overline{b} = \overline{0}$ **(тождество Якоби)**.

1.8. Практическая часть

1.8.1 Практическое занятие по теме «Понятие вектора. Свободные и связанные векторы. Линейное пространство геометрических векторов. Разложение вектора по базису»

1. По данным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ построить векторы:
1) $\frac{1}{3}\bar{a} - 2\bar{b}$;
2) $4\bar{a} + \bar{b}$;
3) $2(\bar{a} - \bar{b})$;
4) $\frac{3}{4}(\bar{a} + 2\bar{b}) - \frac{1}{4}(\bar{a} - 2\bar{b}) - \bar{a} - \bar{b}$.

2. Дано: $|\bar{a}| = 13, |\bar{b}| = 19, |\bar{a} + \bar{b}| = 24$. Найти $|\bar{a} - \bar{b}|$.

3. Дано: $\bar{a} \perp \bar{b}, |\bar{a}| = 5, |\bar{b}| = 12$. Найти $|\bar{a} + \bar{b}|$ и $|\bar{a} - \bar{b}|$.

4. Даны две точки $A_1(3; -4; 1)$ и $A_2(4; 6; -3)$. Найти координаты вектора $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$.

5. Известно разложение вектора $\bar{a}$ по базису $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2\}:\ \bar{a} = 3\bar{e}_2 - \bar{e}_1$. Найти координаты вектора $\bar{a}$ в указанном базисе.

6. Написать разложение вектора $\bar{a} = (1;\ -1;\ 2)$ по векторам $\bar{e}_1 = (2;\ 3;\ 1)\,, \bar{e}_2 = (3;\ 7;\ 2)\,, \bar{e}_3 = (5;\ 4;\ 3)\,.$

1.8.2 Практическое занятие по теме «Аффинная система координат. Декартова прямоугольная система координат»

1. В некоторой аффинной системе координат заданы векторы $\bar{a} = (1, 2, 5), \bar{b} = (2, 5, 2), \bar{c} = (4, 0, 2), \bar{d} = (5, 6, 2)$. Вычислить

1) $\bar{a} + 2\bar{b}$;

2) $4\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c} - 2\bar{d}$;

3) $2\bar{a} - 5\bar{b} - 3\bar{c} + 4\bar{d}$.

Построить полученные векторы.

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма: $A(1; -2; 3)$, $B(3; 2; 1)$ и $C(6; 4; 4)$. Найти его четвертую вершину D.

3. Найти координаты вектора $\bar{a}$, если известно, что он направлен в противоположную сторону к вектору $\bar{b} = 5 \cdot \bar{i} - 4 \cdot \bar{j} + 2\sqrt{2} \cdot \bar{k}$, и его модуль равен 5.

4. При каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2 \cdot \bar{i} + 3 \cdot \bar{j} + \alpha \cdot \bar{k}$ и $\bar{b} = \beta \cdot \bar{i} - 6 \cdot \bar{j} + 2 \cdot \bar{k}$ коллинеарны?

5. Даны точки $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(2; 2; -7)$ и $D(5; -4; 2)$. Проверить, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее и во сколько раз; направлены они в одну сторону или в разные?

6. Даны вершины треугольника $A(3; -1; 5)$, $B(4; 2; -5)$, $C(-4; 0; 3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

7. Найти координаты точки на плоскости Oxy, равноудаленной от трех точек $A(4;0;2), B(-1;2;4), C(1;1;-3)$.

8. Отрезок AB разделен на 3 равные части. Найти координатточек деления, если известны точки $A(-2;4;1), B(2;-4;-3)$.

1.8.3 Практическое занятие по теме «Скалярное и векторное произведения: свойства, механический смысл, вычисление в ортонормированном базисе»

1. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\bar{a}| = 10$ и $|\bar{b}| = 2$, вычислить $(\bar{a} + 2\bar{b}) \cdot (3\bar{a} - \bar{b})$.

2. Дано: $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 4, \varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = 120°$. Найти модуль вектора $\bar{c} = 3\bar{a} + 2\bar{b}$.

3. Проверить, могут ли векторы $\bar{a} = 7\cdot\bar{i}+6\cdot\bar{j}-6\cdot\bar{k}, \bar{b} = 6\cdot\bar{i}+2\cdot\bar{j}+9\cdot\bar{k}$ быть ребрами куба. Найти третье ребро куба.

4. Даны векторы $\bar{a} = (3;-6;-1), \bar{b} = (1;4;-5), \bar{c} = (3;-4;12)$. Найти $\text{пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b})$.

5. Показать, что четырехугольник с вершинами $A(-5;3;4), B(-1;-7;5)$, $C(6;-5;-3)$ и $D(2;5;-4)$ есть квадрат.

6. Дано: $\bar{a} = 4 \cdot \bar{i} - \cdot\bar{j} - 2 \cdot \bar{k}, \bar{b} = (2;1;2)$. Найти:
а) $\bar{a} \cdot \bar{b}$;

б) $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$;
в) $\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b})$;
г) $\text{пр}_{\bar{b}}(\bar{a})$.

7. В треугольнике ABC вершины имеют координаты $A(1;1;-1)$, $B(2;3;1)$, $C(3;2;1)$. Найти:
а) длины сторон;
б) внутренние углы;
в) острый угол между медианой BD и стороной AC.

8. Даны два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$, для которых $|\bar{a}|=2, |\bar{b}|=6, \varphi=(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{5}{6}\pi$. Найти:
а) $\bar{a}\times\bar{b}$;
б) $|(2\bar{a}+3\bar{b})\times(\bar{a}-4\bar{b})|$.

9. Найти координаты вектора $\bar{a}\times(2\bar{a}+\bar{b})$, если $\bar{a}=(3;-1;-2), \bar{b}=(1;2;-1)$.

10. Даны векторы $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}-3\bar{k}, \bar{b}=-2\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}$. Найти: $\bar{c}=(\bar{a}-\bar{b})\times(2\bar{b})$; $|\bar{c}|$.

11. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1;2;0)$, $B(3;2;1)$, $C(-2;1;2)$.

12. Даны векторы $\bar{a}=3\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}, \bar{b}=2\bar{i}+7\bar{j}+4\bar{k}$ и $\bar{c}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}$. Найти $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ и $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$.

13. Даны вершины треугольника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

1.8.4 Практическое занятие по теме «Смешанное произведение: свойства, геометрический смысл вычисление в ортонормированном базисе. Двойное векторное произведения. Тождество Якоби»

1. Доказать, что четыре точки $A_1(3;5;1)$, $A_2(2;4;7)$, $A_3(1;5;3)$ и $A_4(4;4;5)$ лежат в одной плоскости.

2. Проверить компланарны ли данные векторы:
а) $\bar{a}=(1;2;-2), \bar{b}=(1;-2;1), \bar{c}=(5;-2;-1)$;
б) $\bar{a}=\bar{j}+\bar{k}, \bar{b}=\bar{j}-\bar{k}$ и $\bar{c}=\bar{i}$.

3. Даны вершины пирамиды $A(5;1;-4)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;3;-4)$ и $S(2;2;2)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины S на грань ABC.

4. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}=(2;1;-3), \bar{b}=\bar{i}+2\bar{j}+\bar{k}, \bar{c}=(1;-3;1)$, опущенную на грань, построенную на векторах $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

5. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\bar{a}=(1;2;3), \bar{b}=(2;4;1), \bar{c}=(2;-1;0)$.

6. Вычислить произведение $\bar{b}(\bar{c}+\bar{a})(\bar{b}+2\bar{c})$, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=5$.

7. Вектор $\bar{c}$ перпендикулярен векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$; $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \frac{\pi}{6}$, $|\bar{a}| = 6$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 3$. Найти $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

8. Дана пирамида с вершинами в точках $A_1(1;2;3)$, $A_2(-2;4;1)$, $A_3(7;6;3)$ и $A_4(4;-3;-1)$. Найти:

а) длину ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4;
б) площадь грани $A_1A_2A_3$;
в) угол между ребрами A_1A_4 и A_1A_3;
г) объем пирамиды;
д) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

ТЕМА 2

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

2.1. Виды уравнений прямой на плоскости

Определение 2.1. Пусть l – прямая на плоскости. Любой вектор $\overline{a} \neq \overline{0}$, параллельный прямой l, называется *направляющим вектором прямой* l.

1) Уравнения прямой на плоскости по точке и направляющему вектору.

Пусть известны координаты точки $M_0(x_0, y_0) \in l$ (так называемой *начальной точки прямой* l) и направляющего вектора $\overline{a}(\alpha, \beta)$ прямой l.

По этим данным можно записать **параметрические уравнения прямой l на плоскости**:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $t \in \mathbf{R}$ (t – параметр).

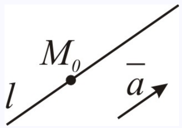


Рис. 2.1: Прямая l задана начальной точкой M_0 и направляющим вектором $\overline{a}$

По этим же данным можно записать **каноническое уравнение прямой на плоскости:**

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}. \qquad (2.2)$$

2) Уравнение прямой на плоскости по двум точкам.

Пусть известны две различные точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ прямой l. Тогда из (2.2) несложно получить **уравнение прямой на плоскости по двум точкам**:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2.3)$$

3) Уравнение прямой «в отрезках».

Если прямая задана координатами двух своих точек $A(a,0)$ и $B(0,b)$, лежащих на координатных осях, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (2.4)$$

Здесь $|a|$ и $|b|$—длины отрезков, которые прямая «отсекает» на осях координат.

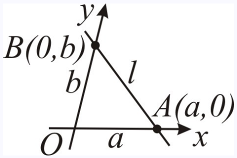


Рис. 2.2: Прямая l, заданная точками A, B пересечения с координатными осями

4) Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Определение 2.2. Угловым коэффициентом прямой l с направляющим вектором $\overline{a}(\alpha, \beta)$ называется число $k = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Пусть известно что прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет угловой коэффициент k. Тогда прямую l можно задать **уравнением прямой на плоскости с угловым коэффициентом:**

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{2.5}$$

частным случаем которого является «школьное» уравнение прямой $y = kx + b$.

5) Общее уравнение прямой на плоскости.

Любое из уравнений (2.1)– (2.5) может быть записано в виде **общего уравнения прямой на плоскости**:

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.6}$$

где $(A, B) \neq (0, 0)$.

2.2. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

Следующее утверждение позволяет определить способ взаимного расположения двух прямых на плоскости по коэффициентам их общих уравнений.

Теорема 2.1. *Если прямая l_1 задана уравнением $A_1x+B_1y+C_1=0$, прямая l_2– уравнением $A_2x+B_2y+C_2=0$, то*

1) прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2};$$

2) прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2};$$

3) прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}.$$

Замечание. Прямая, заданная уравнением $Ax+By+C=0$, делит плоскость на две полуплоскости, одна из них задается неравенством $Ax+By+C\geq 0$, а другая – неравенством $Ax+By+C\leq 0$.

2.3. Прямая на плоскости в прямоугольной системе координат

Всё, что сказано о прямой на плоскости в произвольной системе координат, остается верным и в прямоугольной системе координат. Но в прямоугольной системе координат дополнительно можно решать задачи, связанные с перпендикулярностью, вычислением углов и расстояний.

1) Уравнение прямой на плоскости по точке и нормальному вектору.

Определение 2.3. Вектор $\overline{n} \neq \overline{0}$ называется *нормальным вектором* прямой l, если $\overline{n} \perp l$.

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n}(A, B)$. Тогда l можно задать **уравнением прямой по точке и нормальному вектору:**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (2.7)$$

Замечание. Если прямая задана общим уравнением $Ax+By+C = 0$ в прямоугольной системе координат, то нормальный вектор этой прямой имеет координаты (A, B).

2) Расстояние от точки до прямой на плоскости.

Формула вычисления **расстояния от точки** $M_0(x_0, y_0)$ **до прямой** на плоскости, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$:

$$\rho(M_0, l) = \frac{| \, Ax_0 + By_0 + C \, |}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.8}$$

3) Угол между двумя прямыми.

Если прямая l_1 задана общим уравнением $A_1x+B_1y+C_1 = 0$, прямая l_2– общим уравнением $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то **угол между** этими **прямыми** можно вычислить по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2.9}$$

Если же прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно, то угол между ними вычисляют по формуле:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{| \, k_2 - k_1 \, |}{1 + k_1k_2}. \tag{2.10}$$

2.4. Пучок прямых на плоскости

Определение 2.4. *Пучок прямых на плоскости* — множество всех прямых плоскости, проходящих через некоторую точку — центр пучка.

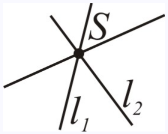


Рис. 2.3: Пучок прямых с центром S

Способы задания пучка прямых на плоскости

1) Координатами центра.

Уравнение пучка, проходящего через центр $S(x_0, y_0)$:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0, \tag{2.11}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

2) Уравнениями двух прямых этого пучка.

Если прямые l_1, l_2, заданные уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно, принадлежат пучку прямых, то уравнение этого пучка имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.12}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

2.5. Виды уравнений плоскости

1) Уравнения плоскости по точке и двум неколлинеарным векторам.

Пусть плоскость π проходит через точку M_0 параллельно двум неколлинеарным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Такая плоскость существует и единственна. Пусть известны координаты: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\overline{b}(b_1, b_2, b_3)$.

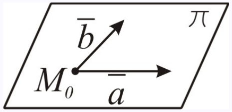


Рис. 2.4: Плоскость, заданная точкой и двумя векторами

По этим данным можно записать **параметрические уравнения плоскости** π:

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_1 + vb_1, \\ y = y_0 + ua_2 + vb_2, \\ z = z_0 + ua_3 + vb_3, \end{cases} \qquad (2.13)$$

где $u, v \in \mathbf{R}$.

По тем же данным можно записать **уравнение плоскости «через определитель»**:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.14)$$

2) Уравнение плоскости по трём точкам.

Если плоскость π проходит через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, то из (2.14) несложно получить **уравнение плоскости, проходящей через три точки**:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.15)$$

3) Уравнение плоскости «в отрезках».

Если плоскость π задана тремя точками на координатных осях: $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ и $M_3(0, 0, c)$, где $abc \neq 0$, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (2.16)$$

где $|a|$, $|b|$, $|c|$– длины отрезков, «отсекаемых» плоскостью π на осях.

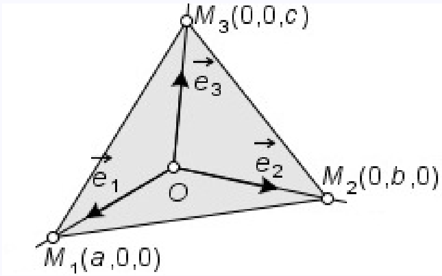


Рис. 2.5: Плоскость, заданная точками пересечения с координатными осями

4) Общее уравнение плоскости

Любое из уравнений (2.13)–(2.16) можно записать в виде **общего уравнения плоскости**

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2.17}$$

где $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

Условие параллельности вектора данной плоскости

Если плоскость π задана общим уравнением (2.17) и дан вектор $\overline{p} = (p_1, p_2, p_3)$, то

$$\overline{p} \parallel \pi \quad \Leftrightarrow \quad Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \quad - \tag{2.18}$$

условие параллельности вектора $\overline{p}$ плоскости π.

Замечание. Плоскость, заданная уравнением (2.17), делит пространство на два полупространства. Одно из них задается неравенством $Ax + By + Cz + D \geq 0$, а другое – неравенством $Ax + By + Cz + D \leq 0$.

2.6. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Пучок плоскостей

Следующее утверждение позволяет определить способ взаимного расположения двух плоскостей в пространстве по коэффициентам их общих уравнений.

Теорема 2.2. *Если плоскости* π_1 *и* π_2 *заданы уравнениями* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *соответственно, то*

1) плоскости π_1 *и* π_2 *совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

2) плоскости π_1 *и* π_2 *параллельны тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

3) плоскости π_1 *и* π_2 *пересекаются по прямой тогда и только тогда, когда*

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Определение 2.5. *Пучок плоскостей* — множество всех плоскостей, проходящих через некоторую прямую — ось пучка.

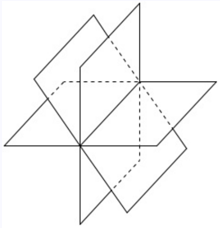


Рис. 2.6: Пучок плоскостей

Уравнение пучка плоскостей

Пусть две пересекающиеся плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно. Справедлива

Теорема 2.3. *Если α, $\beta \in \boldsymbol{R}$, причем $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, то уравнение*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (2.19)$$

задает некоторую плоскость пучка, определяемого плоскостями π_1 и π_2. Верно и обратное: любая плоскость этого пучка может быть задана уравнением (2.19) при некоторых α и β.

2.7. Плоскость в прямоугольной системе координат

Всё, что сказано о плоскости в произвольной системе координат, остается верным и в прямоугольной системе координат. Но в прямоугольной системе координат дополнительно можно решать задачи, связанные с перпендикулярностью, вычислением углов и расстояний.

Определение 2.6. Вектор $\overline{n} \neq \overline{0}$ называется *нормальным вектором плоскости* π, если $\overline{n} \perp \pi$.

1) Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.

Пусть плоскость π проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет нормальный вектор $\overline{n}(A, B, C)$. Тогда плоскость π можно задать **уравнением плоскости по точке и нормальному вектору:**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{2.20}$$

Замечание. Если в прямоугольной системе координат плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, то нормальным вектором этой плоскости можно считать вектор $\overline{n}(A, B, C)$.

2) Расстояние от точки до плоскости.

Формула вычисления **расстояния от точки** $M_0(x_0, y_0, z_0)$ **до плоскости** π, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.21}$$

3) Угол между двумя плоскостями.

Если плоскость π_1 задана общим уравнением $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, плоскость π_2— общим уравнением $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то **угол между** этими **плоскостями** можно вычислить по формуле:

$$\cos(\pi_1 \hat{,} \pi_2) = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{2.22}$$

Из формулы (2.22) несложно получить **условие перпендикулярности двух плоскостей** π_1 и π_2, заданных общими уравнениями:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{2.23}$$

2.8. Виды уравнений прямой в пространстве

1) Уравнения прямой в пространстве по точке и направляющему вектору.

Пусть известны координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ (*начальной точки прямой* l) и направляющего вектора $\overline{a}(m, n, p)$ прямой l.

По этим данным можно записать **параметрические уравнения прямой l в пространстве**:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \tag{2.24}$$

где $t \in \mathbf{R}$ ($t-$ параметр).

По этим же данным можно записать **каноническое уравнение прямой в пространстве:**

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{2.25}$$

2) Уравнение прямой в пространстве по двум точкам.

Пусть известны две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ прямой l. Тогда из (2.25) несложно получить **уравнение прямой в пространстве по двум точкам**:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{2.26}$$

3) Задание прямой как линии пересечения двух плоскостей.

Пусть плоскости π_1 и π_2 заданы соответственно общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Из теоремы 2.2 известно, что плоскости π_1 и π_2 пересекаются по прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ или } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ или } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \tag{2.27}$$

Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

задает прямую тогда и только тогда, когда выполняется условие (2.27). Итак, **система уравнений** (2.28) задает **прямую как линию пересечения двух плоскостей** при условии, что коэффициенты при переменных в ее уравнениях не пропорциональны.

Переход от способа задания прямой в пространстве системой (2.28) к каноническим уравнениям осуществляют по формуле

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \tag{2.29}$$

где x_0, y_0, z_0– координаты любой точки прямой l, т.е. любое решение системы уравнений (2.28). Чтобы найти такое решение, достаточно одно из чисел x_0, y_0 или z_0 выбрать произвольно, а два остальных найти, решив систему (2.28).

2.9. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть дана плоскость π с общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая l с параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Чтобы найти общие точки l и π, составим и решим систему из их уравнений. Получим $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$ или

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \qquad (2.30)$$

Для коэффициентов последнего уравнения возможны случаи

1) $Am + Bn + Cp \neq 0$.

В этом случае уравнение (2.30) имеет единственное решение. Система, составленная из уравнений l и π, тоже имеет единственное решение, т.е. $l \cap \pi = M$.

2) $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0. \end{cases}$

Уравнение (2.30) не имеет решений. Прямая l и плоскость π не имеют общих точек, $l \parallel \pi$.

3) $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$

Уравнение (2.30) имеет бесконечное множество решений, ему удовлетворяет любое число $t \in \mathbf{R}$. Каждая точка прямой l принадлежит плоскости π, то есть прямая l содержится в плоскости π.

2.10. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы соответственно уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Найдем условия, характеризующие взаимное расположение этих прямых в пространстве.

1) Пусть l_1 совпадает с l_2. Тогда их направляющие векторы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ коллинеарны друг другу, следовательно,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{2.31}$$

и коллинеарны вектору $\overline{M_1M_2}$, следовательно,

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}. \tag{2.32}$$

Итак, если $l_1 = l_2$, то выполняются условия (2.31) и (2.32).

2) Пусть $l_1 \parallel l_2$. Тогда $\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2$, следовательно, выполняется условие (2.31), и $\bar{a}_1 \nparallel \overline{M_1M_2}$, следовательно, выполняется отрицание условия (2.32).

Итак, если прямые l_1 и l_2 параллельны, то выполняется условие (2.31) и отрицание условия (2.32).

3) Пусть $l_1 \cap l_2 = M$. Тогда $\bar{a}_1 \nparallel \bar{a}_2$, следовательно, выполняется отрицание условия (2.31). Кроме того, пересекающиеся прямые задают единственную плоскость, т.е. векторы $\overline{M_1M_2}$, $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ компланарны, следовательно, выполняется условие

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.33}$$

Итак, если прямые l_1 и l_2 пересекаются, то выполняется отрицание условия (2.31) и условие (2.33).

4) Пусть l_1 и l_2 скрещивающиеся прямые. Тогда они не содержатся в одной плоскости, т.е. векторы $\overline{M_1M_2}$, $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ некомпланарны, следовательно, выполняется отрицание условия (2.33).

Итак, если l_1 и l_2 скрещивающиеся прямые, то выполняется отрицание условия (2.33).

Достаточность всех найденных условий очевидна.

2.11. Прямая в пространстве в прямоугольной системе координат

1) Угол между прямыми.

Прямые l_1 и l_2 заданы соответственно уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Требуется найти величину угла между l_1 и l_2.

В качестве угла между прямыми можно взять угол между их направляющими векторами:

$$\cos(l_1\hat{,}l_2)=\cos(\bar{a}_1\hat{,}\bar{a}_2)=\frac{\bar{a}_1\cdot\bar{a}_2}{|\bar{a}_1|\cdot|\bar{a}_2|},$$

откуда получаем **формулу для нахождения угла между прямыми в пространстве**

$$\cos(\widehat{l_1,l_2})=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{2.34}$$

Из (2.34) ясно, что $l_1\perp l_2 \iff \cos(l_1\hat{,}l_2)=0$, т.е. **условие перпендикулярности двух прямых в пространстве** имеет вид

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \tag{2.35}$$

Но из выполнения условия (2.35) еще не следует, что прямые l_1 и l_2 пересекаются.

2) Угол между прямой и плоскостью.

Дана прямая l с уравнением $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскость π с уравнением $Ax+By+Cz+D=0$.

Угол между прямой l **и плоскостью** π определяется по формуле

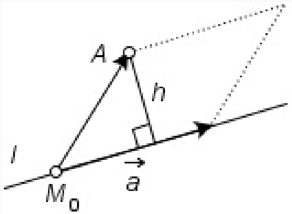
$$\sin(\hat{l,\pi})=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{2.36}$$

3) Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Требуется вычислить расстояние от точки $A(x_1,y_1,z_1)$ до прямой l, заданной уравнением $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$.

Нетрудно заметить, что искомое расстояние равно высоте h параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ (направляющий вектор прямой l) и $\overline{M_0A}$ (M_0– начальная точка прямой l), и его можно вычислить как

$$\rho(A,l)=\frac{S}{|\overline{a}|}=\frac{|\overline{M_0A}\times\overline{a}|}{|\overline{a}|}. \tag{2.37}$$



Кафедра
АГ и ММ

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

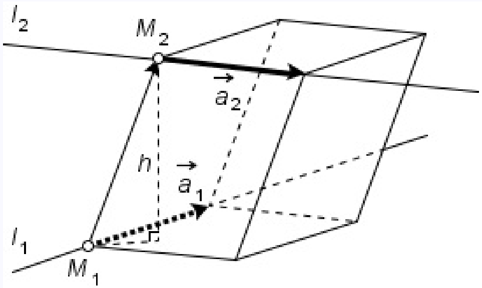
Координаты векторов $\overline{a} = (m, n, p)$, $\overline{M_0A} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, поэтому

$$\overline{M_0A} \times \overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix}.$$

4) Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Требуется вычислить расстояние между двумя данными скрещивающимися прямыми l_1 и l_2, которые заданы соответственно уравнениями $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$ и $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$.

Построим на векторах $\overline{M_1M_2}$, $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ параллелепипед:



Высота h этого параллелепипеда и будет искомым расстоянием между прямыми l_1 и l_2. Ее можно найти по формуле $h = \dfrac{V_{\text{парал-да}}}{S_{\text{осн}}}$, поэтому

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|\overline{M_1M_2}\overline{a}_1\overline{a}_2|}{|\overline{a}_1 \times \overline{a}_2|}. \tag{2.38}$$

Кафедра АГ и ММ

Начало

Содержание

Назад

На весь экран

Закрыть

2.12. Эллипс, гипербола, парабола и их канонические уравнения

Эллипс

Определение 2.7. Пусть на плоскости заданы две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$, и дано число a, удовлетворяющее неравенству $a > c$. *Эллипс* — это фигура, состоящая из всех точек M плоскости таких, что $F_1M + F_2M = 2a$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса.

Из определения вытекает следующий способ построения эллипса. Если концы нерастяжимой нити длины $2a$ закрепить в точках F_1 и F_2 и натянуть нить острием карандаша, то при движении острия будет вычерчиваться эллипс с фокусами F_1, F_2.

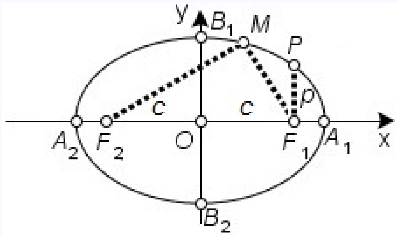


Рис. 2.7: Эллипс

Если расположить прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 2.7, то координаты фокусов будут $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ и уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.39}$$

где

$$b^2 = a^2 - c^2.$$

Числа a и b – соответственно *большая* и *малая полуоси* эллипса, число c – *фокальное расстояние* эллипса.

Точки $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$, $B_1(b,0)$, $B_2(-b,0)$ – *вершины* эллипса.

Отрезки $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ – *большая и малая оси* эллипса.

Отрезки F_1M, F_2M – *фокальные радиусы* точки M эллипса.

Число $p = F_1P = b^2/a$ – *фокальный параметр эллипса.*

Уравнение (2.39) – **каноническое уравнение эллипса**.

Определение 2.8. *Эксцентриситет эллипса* – число $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Так как для эллипса $c < a$, то $\varepsilon < 1$. Число $\varepsilon = 0$ тогда и только тогда, когда $c = 0$, то есть когда точка F_1 совпадает с F_2 и эллипс превращается в окружность. Итак, для эллипса $0 \le \varepsilon < 1$.

Эксцентриситет определяет форму эллипса. При увеличении ε эллипс становится более продолговатым, а при его уменьшении форма эллипса приближается к форме окружности.

Длины фокальных радиусов точки M эллипса находят по формулам

$$r_1 = F_1M = a - \varepsilon x, \qquad r_2 = F_2M = a + \varepsilon x.$$

Замечание. Если в уравнении (2.39) $a < b$, то оно определяет эллипс, большая ось которого $2b$ лежит на оси Oy, малая ось $2a$ — на оси Ox, фокусы — в точках $F_1(0, c)$ и $F_2(0, -c)$. Для такого эллипса все формулы параграфа остаются верны, если в них поменять местами a и b.

Гипербола

Определение 2.9. Пусть на плоскости даны две точки F_1 и F_2, расстояние между которыми равно $2c$, и дано число a, удовлетворяющее неравенству $0 < a < c$. *Гипербола* — это фигура, состоящая из всех точек M плоскости таких, что $|F_1M - F_2M| = 2a$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* гиперболы.

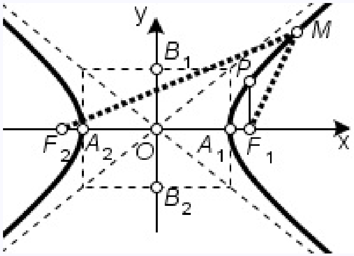


Рис. 2.8: Гипербола

Если расположить прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке 2.8, то координаты фокусов будут $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ и уравнение гиперболы будет иметь вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.40}$$

где

$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Числа a и b – соответственно *действительная* и *мнимая полуоси* гиперболы,
число c – *фокальное расстояние* гиперболы.

Точки $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$ – *вершины* гиперболы.

Отрезки $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ – *действительная и мнимая оси* гиперболы.

Отрезки F_1M, F_2M – *фокальные радиусы* точки M гиперболы.

Число $p = F_1P = b^2/a$ – *фокальный параметр гиперболы*.

Уравнение (2.40) – **каноническое уравнение гиперболы**.

Две прямые, не пересекающие гиперболу, к которым точки гиперболы неограниченно приближаются при неограниченном удалении от ее центра, называются *асимптотами гиперболы*.

Уравнения асимптот гиперболы (2.40) имеют вид

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Чтобы получить изображение гиперболы:

1. Строят так называемый *основной прямоугольник* гиперболы, центр которого находится в начале координат, а стороны равны $2a$ и $2b$ и параллельны осям Ox и Oy.

2. Строят асимптоты гиперболы — прямые, содержащие диагонали основного прямоугольника.

3. Отмечают вершины гиперболы.

4. Строят две ветви гиперболы.

Определение 2.10. *Эксцентриситет гиперболы* — число $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Так как для гиперболы $0 < a < c$, то $\varepsilon > 1$.

Эксцентриситет характеризует форму гиперболы: чем меньше ε, тем больше вытянута гипербола вдоль действительной оси.

Длины фокальных радиусов $r_1 = F_1M$ и $r_2 = F_2M$ точки M гиперболы находят по формулам

$$\begin{array}{lll} r_1 = \varepsilon x - a, & r_2 = \varepsilon x + a & \text{для точек правой ветви,} \\ r_1 = -(\varepsilon x - a), & r_2 = -(\varepsilon x + a) & \text{для точек левой ветви.} \end{array}$$

Гипербола, полуоси которой равны, называется *равносторонней*.

Замечание. Рассмотрим уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.41}$$

Кафедра АГ и ММ

Начало

Содержание

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Назад

На весь экран

Закрыть

Оно также задает гиперболу, фокусы которой расположены на оси Oy, а основной прямоугольник и асимптоты те же, что и у гиперболы (2.40). Гиперболы (2.40) и (2.41) называются *сопряженными*.

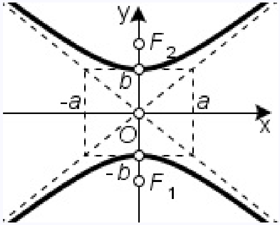
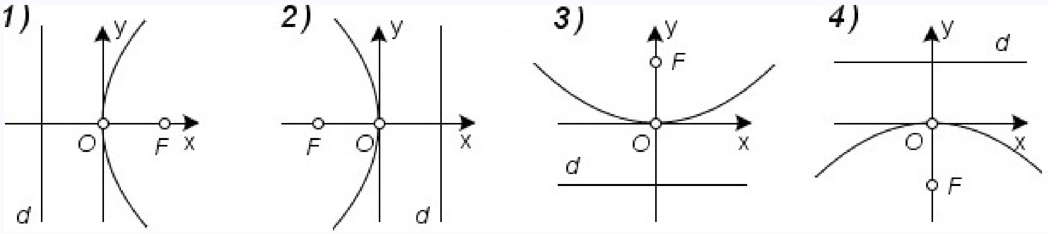


Рис. 2.9: Гипербола, заданная уравнением $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Парабола

Определение 2.11. Пусть на плоскости даны точка F и прямая d, причем $\rho(F, d) = p \neq 0$. *Парабола* – это фигура, состоящая из всех точек M плоскости таких, что $FM = \rho(M, d)$. Точка F называется *фокусом* параболы, прямая d – *директрисой* параболы, число p – *фокальным параметром* параболы.

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы одна ее ось была параллельна d, фокус F принадлежал другой оси, а начало координат делило расстояние между F и d пополам. Возможны случаи:



Каноническое уравнение параболы в каждом из этих случаев имеет вид:

$$1) y^2 = 2px, \qquad 2) y^2 = -2px, \qquad 3) x^2 = 2py, \qquad 4) x^2 = -2py. \qquad (2.42)$$

Осью параболы называется ее ось симметрии. *Вершиной параболы* называется точка пересечения параболы с ее осью.

Геометрический смысл фокального параметра параболы: параметр p параболы равен длине перпендикуляра к оси параболы, восставленного из фокуса до точки пересечения с параболой:

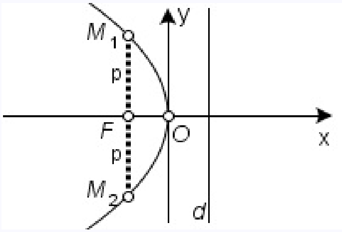


Рис. 2.10: Геометрический смысл фокального параметра параболы

Эксцентриситетом параболы считают число $\varepsilon = 1$.

2.13. Директрисы эллипса и гиперболы. Директориальное свойство. Эллипс, гипербола и парабола в полярных координатах

Определение 2.12. *Директрисами эллипса*, заданного каноническим уравнением (2.39)(*гиперболы*, заданной каноническим уравнением (2.40)), называются две прямые с уравнениями

$$x = \frac{a}{\varepsilon}, \quad x = -\frac{a}{\varepsilon},$$

где ε — эксцентриситет эллипса (гиперболы).

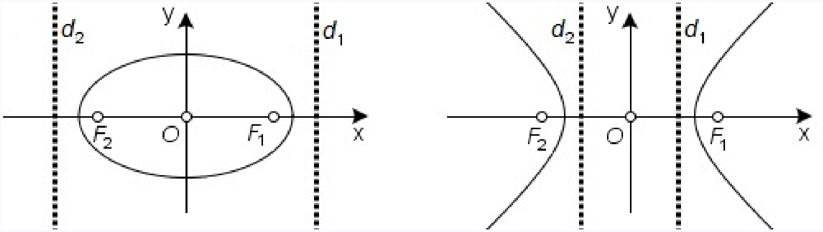


Рис. 2.11: Директрисы эллипса, гиперболы

Т.к. для эллипса $0 \leq \varepsilon < 1$, то его директрисы параллельны малой оси и не пересекают эллипс. Аналогично для гиперболы: т.к. $\varepsilon > 1$, ее директрисы параллельны мнимой оси и не пересекают гиперблолу.

Точки эллипса, гиперболы и параболы подчинены общему свойству, которое мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2.4. ***(Директориальное свойство эллипса, гиперболы, параболы).*** *Отношение расстояния r любой точки эллипса (гиперболы, параболы) от фокуса к ее расстоянию d от соответствующей директрисы есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса (гиперболы, параболы), т.е.* $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$.

Теорема 2.4 позволяет дать новое определение эллипса (отличного от окружности), гиперболы и параболы.

Определение 2.13. *Эллипс (гипербола, парабола) есть множество всех точек плоскости, для которых отношение расстояния от заданной точки, называемой фокусом, к расстоянию от заданной прямой, называемой директрисой, есть постоянная величина* $\varepsilon < 1$ $(> 1, = 1)$.

На директориальном свойстве эллипса (гиперболы, параболы) основан вывод уравнения этих линий в полярной системе координат.

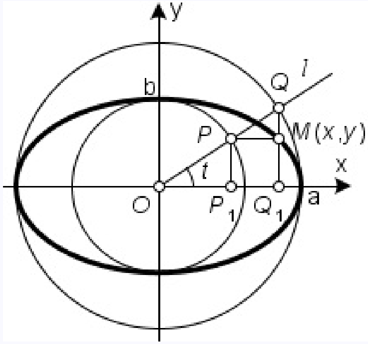
Пусть Φ – любая из этих фигур, F – ее фокус, d – соответствующая ему директриса, ε – эксцентриситет, p – фокальный параметр. Выберем полярную систему координат так, чтобы полюс совпадал с фокусом F, а полярная ось была перпендикулярна директрисе d и не пересекала ее. Тогда уравнение фигуры Φ в полярной системе координат имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \tag{2.43}$$

Если $0 \le \varepsilon < 1$, то уравнение (2.43) задает эллипс, если $\varepsilon > 1$, то одну ветвь гиперболы, если $\varepsilon = 1$, то параболу.

2.14. Параметрические уравнения эллипса

Пусть эллипс задан каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$. Опишем вокруг центра O эллипса две окружности: $\gamma_1(0, a)$ и $\gamma_2(0, b)$. Проведем из точки O произвольный луч l под углом t к оси Ox. Пусть $l \cap \gamma_1 = Q$, $l \cap \gamma_2 = P$. Проведем через точку P прямую параллельно Ox, через точку Q – прямую параллельно Oy. Пусть $M(x, y)$ – точка пересечения этих прямых. Докажем, что точка M принадлежит эллипсу.



Пусть P_1, Q_1 – проекции точек P и Q на Ox. Из $\triangle OQQ_1$ и $\triangle OPP_1$:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \tag{2.44}$$

Выразив из уравнений (2.44) $\cos t$ и $\sin t$, затем возведя обе части полученных уравнений в квадрат и сложив их, получим $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тем самым мы убедились, что точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу.

Таким образом, (2.44) – **параметрические уравнения эллипса.**

2.15. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

1) Лучи света, выходящие из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса проходят через другой его фокус;

2) лучи света, выходящие из одного фокуса гиперболы, после отражения от гиперболы кажутся выходящими из другого ее фокуса;

3) лучи света, выходящие из фокуса параболы, после отражения от нее образуют пучок лучей, параллельных оси параболы.

2.16. Классификация линий второго порядка (ЛВП)

Определение 2.14. *Линией второго порядка (ЛВП)* называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, координаты которых в некоторой прямоугольной сиситеме координат xOy удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \qquad (2.45)$$

где $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$.

Уравнение (2.45) называется **общим уравнением линии второго порядка**. Это алгебраическое уравнение второй степени относительно переменных x, y.

Теорема 2.5. *Прямоугольную систему координат на плоскости можно выбрать так, что уравнение (2.45) будет приведено к одному из следующих видов:*

1) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ *(эллипс);*

2) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$ *(мнимый эллипс);*

3) $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ *(вырожденный эллипс);*

4) $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = \pm 1$ *(гипербола);*

5) $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ *(пара пересекающихся прямых);*

6) $Y^2 = 2pX$ *(парабола);*
7) $Y^2 = a^2$ *(пара параллельных прямых);*
8) $Y^2 = 0$ *(пара совпавших прямых);*
9) $Y^2 = -a^2$ *(пара мнимых параллельных прямых).*

Уравнения 1)–9) называются **каноническими уравнениями ЛВП**. Приведение общего уравнения ЛВП (2.45) к каноническому виду обычно осуществляется в 2 этапа.

I этап. Поворот исходной системы координат xOy на угол α. Этот этап необходим для того, чтобы в уравнении (2.45) коэффициент при xy обратился в 0 (если в уравнении (2.45) $a_{12} = 0$, то переходят сразу ко второму этапу). Чтобы найти угол α, действуют по следующему плану:

1) составляют характеристическое уравнение

$$s^2 - (a_{11} + a_{22})s + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \tag{2.46}$$

и находят его корни s_1, s_2;

2) находят $\operatorname{tg}\alpha$ по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{s_1 - a_{11}}{a_{12}}; \tag{2.47}$$

3) находят коэффициенты a'_{10} и a'_{20} по формулам

$$\begin{cases} a'_{10} = a_{10}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha, \\ a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha. \end{cases} \tag{2.48}$$

Иногда при этом нужно сначала найти $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ по формулам $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ и $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$;

4) в системе координат $x'Oy'$, полученной из исходной системы координат xOy путем поворота на угол α, уравнение ЛВП принимает вид

$$s_1(x')^2 + s_2(y')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0. \qquad (2.49)$$

II этап. Если в полученном на I этапе уравнении $a'_{10} \neq 0$ или $a'_{20} \neq 0$, то необходимо дальнейшее его упрощение путем выделения полных квадратов и замены переменных (т.е. путем переноса системы координат в новое начало).

В результате уравнение ЛВП будет приведено к одному из уравнений 1)–9) (см. теорему 2.5).

Пример. Упростить уравнение $x^2 + 2xy + y^2 + 12\sqrt{2}x + 18 = 0$ и построить ЛВП, сохранив на чертеже первоначальную систему координат.

Решение. Выпишем коэффициенты уравнения:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{22} = 1, a_{10} = 6\sqrt{2}, a_{20} = 0, a_{00} = 18.$$

I этап.

1) Характеристическое уравнение $s^2 - 2s = 0$, его корни $s_1 = 2$, $s_2 = 0$.

2) Угол поворота системы координат: $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3) $a'_{10} = 6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 6$, $a'_{20} = -6\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = -6$.

4) вид уравнения после поворота системы координат на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $2(x')^2 + 12x' - 12y' + 18 = 0$ или $(x')^2 + 6x' - 6y' + 9 = 0$.

II этап.

Сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые переменные и дополним сумму до полного квадрата:

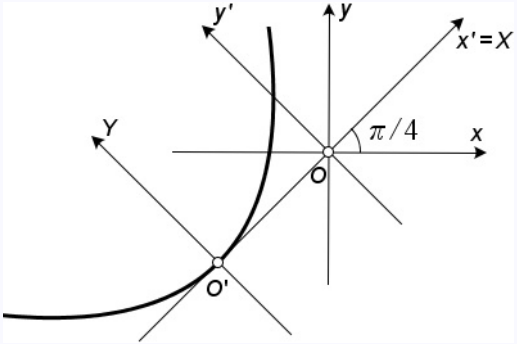
$$((x')^2 + 6x' + 9) - 6y' = 0,$$

$$(\underbrace{x' + 3}_{X})^2 - 6\underbrace{y'}_{Y} = 0.$$

Из обозначений получаем формулы

$$\begin{cases} x' = X - 3, \\ y' = Y, \end{cases}$$

задающие перенос системы координат $x'Oy'$ в точку $O'(-3, 0)$. В новой системе координат $XO'Y$ уравнение ЛВП примет вид $X^2 = 6Y$ — парабола. Изобразим эту линию:



2.17. Классификация поверхностей второго порядка (ПВП)

Определение 2.15. *Поверхностью второго порядка (ПВП)* называется фигура, состоящая из всех точек пространства, координаты которых в некоторой прямоугольной сиситеме координат $Oxyz$ удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0, \tag{2.50}$$

где $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Уравнение (2.50) называется **общим уравнением поверхности второго порядка**. Это алгебраическое уравнение второй степени относительно переменных x, y, z.

Теорема 2.6. *Прямоугольную систему координат трехмерного пространства можно выбрать так, что уравнение (2.50) будет приведено к одному из следующих типов:*

I. $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0;$
II. $Ax^2 + By^2 + Cz = 0;$
III. $Ax^2 + By^2 + D = 0;$
IV. $Ax^2 + By = 0;$
V. $Ax^2 + D = 0.$

Далее будут рассмотрены все виды поверхностей второго порядка и приведены их изображения.

I. 1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – эллипсоид (рис. 2.12),

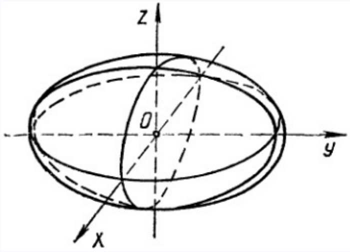


Рис. 2.12: Эллипсоид

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – мнимый эллипсоид (изображения нет),

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – вырожденный эллипсоид (изображением служит точка $O(0,0,0)$),

4) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – однополостный гиперболоид (рис. 2.13 а)),

5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ – двуполостный гиперболоид (рис. 2.13 б)),

6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ – конус второго порядка (рис. 2.13 в)),

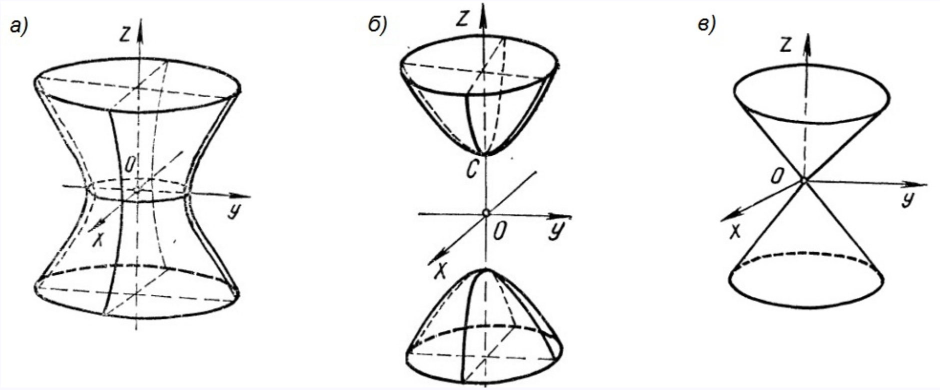


Рис. 2.13: а) однополостный гиперболоид, б) двуполостный гиперболоид, в) конус второго порядка

$$\text{II. 7) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ — эллиптический параболоид (рис. 2.14 а)),}$$

$$\text{8) } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ — гиперболический параболоид (рис. 2.14 б)),}$$

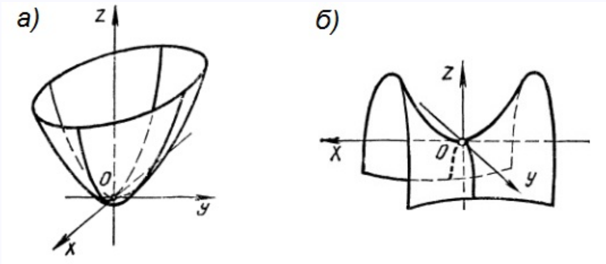


Рис. 2.14: а) эллиптический параболоид, б) гиперболический параболоид (седло)

III. 9) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – эллиптический цилиндр (рис. 2.15 а)),

10) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – вырожденный эллиптический цилиндр (ось Oz),

11) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ – мнимый эллиптический цилиндр (изображения нет),

12) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – гиперболический цилиндр (рис. 2.15 б)),

13) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ – пара пересекающихся плоскостей (постройте изображение самостоятельно),

IV. 14) $x^2=2py$ – параболический цилиндр (рис. 2.15 в)),

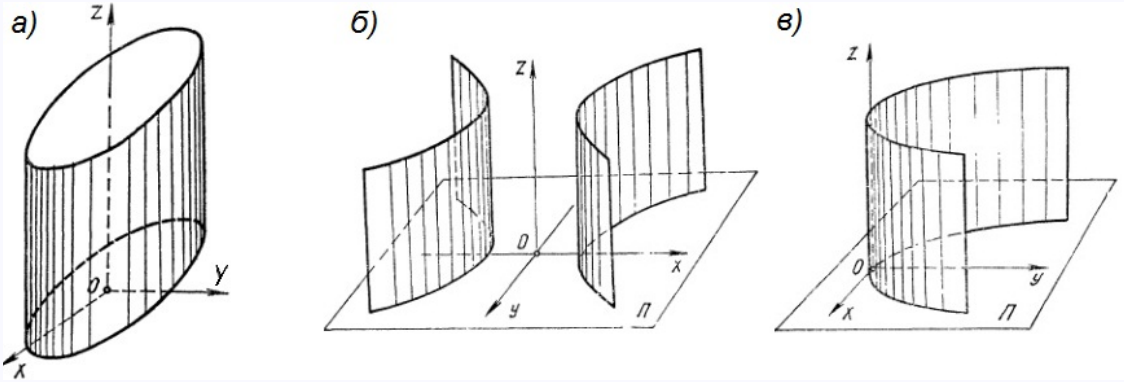


Рис. 2.15: а) эллиптический цилиндр, б) гиперболический цилиндр, в) параболический цилиндр

V. 15) $x^2 = a^2$ – пара параллельных плоскостей (постройте изображение самостоятельно),

16) $x^2 = 0$ – пара слившихся плоскостей (постройте изображение самостоятельно),

17) $x^2 + a^2 = 0$ – пара мнимых параллельных плоскостей (изображения нет).

Уравнения 1)–17) называются **каноническими уравнениями поверхностей второго порядка**.

2.18. Исследование ПВП методом параллельных сечений. Прямолинейные образующие ПВП

Сущность метода параллельных сечений:

1) ПВП пересекают плоскостями, параллельными одной из координатных плоскостей (например, плоскости xOy). В результате получают множество линий пересечения;

2) полученные линии проецируют в ту координатную плоскость, параллельно которой проходили плоскости в п. 1) (например, в плоскость xOy). В результате в координатной плоскости получают так называемую **карту линий уровня**;

3) проделывают п. 1) и п. 2) для двух других координатных плоскостей. По виду карт линий уровня, полученных в координатных плоскостях xOy, xOz и yOz, делают вывод о форме изучаемой поверхности.

Пример. Исследовать методом параллельных сечений поверхность $z = x^2 - \dfrac{y^2}{4}$.

Решение. 1) Плоскость xOy задается уравнением $z = 0$. Уравнения плоскостей, параллельных плоскости xOy, имеют вид $z = h$, $h = const$. Найдем уравнения линий пересечения этих плоскостей с изучаемой поверхностью:

$$\begin{cases} z = x^2 - \dfrac{y^2}{4}, \\ z = h, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - \frac{y^2}{4} = h.$$

Запишем уравнения линий пересечения при нескольких значениях h:

при $h = 0$ $\quad x^2 - \dfrac{y^2}{4} = 0,$

при $h = \pm 1$ $\quad x^2 - \dfrac{y^2}{4} = \pm 1,$

при $h = \pm 2$ $\quad \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{8} = \pm 1$ и т.д. Построив эти линии (гиперболы), получим карту линий уровня данной ПВП в плоскости xOy (рис. 2.16).

2) Плоскость xOz задается уравнением $y = 0$. Уравнения плоскостей, параллельных xOz, имеют вид $y = h$, $h = const$. Уравнения линий пересечения этих плоскостей с поверхностью:

$$\begin{cases} z = x^2 - \dfrac{y^2}{4}, \\ y = h, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad z = x^2 - \frac{h^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = z + \frac{h^2}{4}.$$

Запишем уравнения линий пересечения при нескольких значениях h:

при $h = 0$ $\quad x^2 = z,$

при $h = \pm 2$ $\quad x^2 = z + 1,$

при $h = \pm 4$ $\quad x^2 = z + 4$ и т.д. Построив эти линии (параболы), получим карту линий уровня данной ПВП в плоскости xOz (рис. 2.16).

3) Уравнения плоскостей, параллельных yOz: $x = h$, $h = const$. Уравнения линий пересечения этих плоскостей с поверхностью:

$$\begin{cases} z = x^2 - \dfrac{y^2}{4}, \\ x = h, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad z = h^2 - \frac{y^2}{4} \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = -4(z - h^2).$$

Запишем уравнения линий пересечения при нескольких значениях h:

при $h = 0$ $\quad y^2 = -4z$,

при $h = \pm 1$ $\quad y^2 = -4(z - 1)$,

при $h = \pm 2$ $\quad y^2 = -4(z - 4)$ и т.д. Построив эти линии (параболы), получим карту линий уровня данной ПВП в плоскости yOz (рис. 2.16).

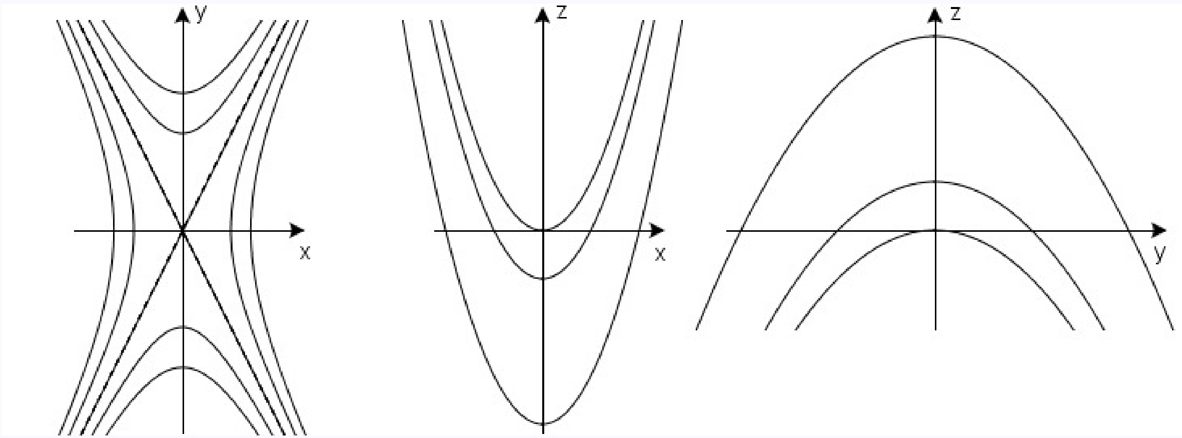


Рис. 2.16: Карты линий уровня ПВП $z = x^2 - \dfrac{y^2}{4}$

Определение 2.16. Прямая, все точки которой принадлежат ПВП, называется *прямолинейной образующей ПВП*. *ПВП*, имеющая прямолинейные образующие, называется *линейчатой*.

Очевидно, любая цилиндрическая поверхность, конус – линейчатые поверхности. Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид – тоже линейчатые поверхности. Через каждую точку однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида проходит две прямолинейные образующие.

2.19. Практическая часть

2.19.1 Практическое занятие по теме «Основные виды уравнений прямой на плоскости и в пространстве. Уравнения плоскости. Пучок прямых на плоскости и плоскостей в пространстве»

1. Уравнение прямой $4x-3y+12=0$ представить в различных видах (с угловым коэффициентом, в отрезках, в виде нормального уравнения).

2. Записать уравнение с угловым коэффициентом, в отрезках и нормальное для заданных прямых и определить на каком расстоянии от начала координат они находятся:

а) $2x-3y+6=0$;

б) $x+2,5=0$;

в) $y=x-1$;

г) $x+5y=0$.

3. Определить при каком значении α прямая $(\alpha^2-\alpha)x+(2+\alpha)y-3\alpha+1=0$

а) параллельна оси Ox;

б) проходит через начало координат.

4. Написать уравнение прямой, проходящейчерез точки:

а) $A(0;2)$, $B(-3;7)$;

б) $A(2;1)$, $B(4;1)$.

5. Найти угловой коэффициент к прямой и ординату точки ее пересечения с осью Oy, зная, что прямая проходит через точки $A(1;1)$ и $B(-2;3)$.

6. Прямая проходит через точки $A(2;3)$ и $B(-4;-1)$, пересекает ось Oy в точке C. Найти координаты точки C.

7. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC с вершинами $A(1;-2), B(5;4), C(-2;0)$.

8. Найти площадь треугольника, заключенного между осями ординат и прямой $2x - 5y + 10 = 0$.

9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(0;2)$ под углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой $x - 2y + 3 = 0$.

10. Из пучка прямых, определяемых уравнением $y + 3 = k(x - 2)$ выделить ту, которая проходит через точку $A(-2;5)$.

11. Найти прямую, прнадлежащую пучку $-4x+2y+1+\lambda(x-3y+2) = 0$ и проходящую через точку $A(1;0)$ и написать ее уравнение.

12. Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $A(2;-1;-3)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 - 4t, \\ z = t; \end{cases}$

2) прямая параллельна оси Oy;

3) прямая перпендикулярна плоскости $3x + y - z - 8 = 0$.

13. Составить кононические уравнения прямой, проходящей через точку $O(4; 3; -2)$ параллельно:

1) прямой $\begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0, \\ 2x - y - 4z + 1 = 0; \end{cases}$

2) вектору $\bar{a}(3; -6; 5)$.

14. Написать уравнение плоскости:

1) параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(-1; 2; 5)$;

2) проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 3; 4)$ и параллельной векторам $\bar{a} = (-3; 2; -1)$ и $\bar{b} = (0; 3; 1)$.

16. Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

1) $M_1(1; 0; -1)$, $M_2(2; 2; 3)$ и $M_3(0; -3; 1)$;

2) $M_1(-2; 0; 0)$, $M_2(0; 4; 0)$ и $M_3(0; 0; 5)$;

3) $M_1(1; -2; 3)$, $M_2(0; 0; 3)$ и $M_3(3; -8; 4)$.

2.19.2 Практическое занятие по теме «Расстояние от точки до прямой на плоскости и от точки до плоскости в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве»

1. Исследовать расположение следующих пар прямых:
1) $3x + 5y - 9 = 0$ и $10x - 6y + 4 = 0$;
2) $2y = x - 1$ и $4y - 2x + 2 = 0$;
3) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} - 1 = 0$ и $y = \frac{1}{2}x + 2$;
4) $x + y = 0$ и $x - y = 0$;
5) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}y - 1 = 0$ и $\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y + 2 = 0$.

2. Через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0, x + 2y - 9 = 0$ проведена прямая, параллельная прямой $2x + y + 6 = 0$. Составить ее уравнение.

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $B(2; -3)$:
а) параллельно прямой, соединяющей точки $C(-4; 0)$ и $D(2; 2)$;
б) перпендикулярно прямой $x - y = 0$.

4. Найти координаты точки A, симметричной точке B относительно прямой $4x - y - 1 = 0$.

5. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x+4y-20 = 0$ и $6x + 8y + 5 = 0$.

6. Найти расстояние между прямыми $2x - 3y + 8 = 0$ и $4x - 6y = 10$.

7. Найти длину высоты BD в треугольникес вершинами $A(4;-3)$, $B(-2;6)$, $C(5;4)$.

8. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости $x-2y+2z+5=0$ и удаленной от точки $A(3;4;-2)$ на расстояние $d=5$.

9. Найти расстояние между параллельными плоскостями:
1) $x+y-z-2=0$ и $2x+2y-2z+5=0$;
2) $2x-3y+6z-14=0$ и $2x-3y+6z+42=0$.

10. Найти расстояние от точки $O(5;4;-1)$ до плоскости, проходящей через точки $A(0;4;0)$, $B(0;4;-3)$, $C(3;0;3)$.

11. Найти точки пересечения прямой $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{5}$ с координатными плоскостями.

12. Установить взаимное расположение прямых:
1) $\frac{x}{11}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-1}{7}$ и $\frac{x-4}{7}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{8}$;
2) $\begin{cases} x-y+2=0, \\ 2x+y-z-6=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x-y+3z+1=0; \end{cases}$
3) $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=18t, \\ y=10t, \\ z=-3+2t; \end{cases}$
4) $\frac{x}{-1}=\frac{y+30}{5}=\frac{z-2{,}5}{4}$ и $\frac{x+1}{6}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+4}{-1}$.

13. Установить взаимное расположение прямой L и плоскости Q:
1) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{2}(L)$ и $3x+y-4z-15(Q)$;

2) $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = t, \\ z = -3 + 2t; \end{cases}$ (L) и $5x - 6y + 2z - 10 = 0(Q)$;

3) $\begin{cases} x - y + 4z - 6 = 0, \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$ (L) и $3x - y + 6z - 12 = 0(Q)$;

4) $\frac{x}{2} = \frac{y+13}{17} = \frac{z+7}{13}(L)$ и $5x - z = 4(Q)$.

2.19.3 Практическое занятие по теме «Определения эллипса, гиперболы, параболы и вывод их канонических уравнений»

1. Показать, что уравнение $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$ определяет эллипс, найти его оси, координаты центра, эксцентриситет.

2. Дано уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$. Найти длины его полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет эллипса, уравнения директрис и расстояние между ними, точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса 12.

3. Составить уранение эллипса, зная, что:
1) его большая полуось равна 10 и фокусы $F_1(-6; 0)$, $F_2(10; 0)$;
2) $a = 5$, $F_1(-3; 5)$, $F_2(3; 5)$.

4. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $A(2; -4\sqrt{3})$

и $B(-1; 2\sqrt{15})$.

5. Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ox, симметрично относительно начала координат, если

1) задана точка $A(2\sqrt{3}; 1)$ эллипса и его малая полуось равна 2;
2) заданы две точки эллипса $A(0; 7)$ и $B(8; 0)$;
3) расстояние между фокусами равно 24 и большая ось равна 26;
4) эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{7}{25}$ и заданы фокусы $(\pm 7; 0)$.

2.19.4 Практическое занятие по теме «Параметрические уравнения эллипса. Директрисы и эксцентриситет эллипса и гиперболы. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы»

1. Дано уравнение гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20$. Найти длины его полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет гиперболы, уравнения асимптот и директрис.

2. Составить уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

3. Написать каноническое уравнение гиперболы, если:

1) $2c = 10, a = 3$;
2) $c = 3, \varepsilon = 1,5$;

3) $b = 6$, уравнения асимптот $y = \pm\frac{5}{3}x$;

4) $c = 10$ и уравнения асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$;

5) $\varepsilon = \frac{3}{2}$ и расстояние между директриссами равно $\frac{8}{3}$;

6) $\varepsilon = \sqrt{2}$ и точка $A(\sqrt{3}; \sqrt{2})$ лежит на гиперболе.

4. Найти уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-2; 4)$, $F_2(12; 4)$, а длина мнимой оси равна 6.

2.19.5 Практическое занятие по теме «Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы»

1. Дана парабола $x^2 = 4y$. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы.

2. Найти вершину, фокус и директрису параболы $y = -2x^2 + 8x - 5$, построить эскиз графика.

3. Парабола симметрична относительно оси Ox, ее вершина находится в начале координат. Составить уравнение параболы, зная, что она проходит через точку $A(-3; -3)$.

2.19.6 Практическое занятие по теме «Определение канонического уравнения второй степени. Классификация кривых и поверхностей второго порядка»

1. Установить тип заданных поверхностей и построить их:
1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{81}=1$;
2) $x^2+y^2-4z^2=-1$;
3) $2y=x^2-\frac{z^2}{4}$;
4) $y^2=15z$;
5) $x^2-9y^2=4z^2$;
6) $x^2=5y-1$.

2.19.7 Практическое занятие по теме «Исследование поверхностей второго порядка методом параллельных сечений. Прямолинейные образующие»

1. Методом параллельных сечений исследовать геометрическую форму поверхностей, заданных уравнениями:
1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{25}=1$;
2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$;
3) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{4}=1$;
4) $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$;
5) $z=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$;

6) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$

7) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1;$

8) $x^2 = 2y.$

ТЕМА 3
Матрицы и определители

3.1. Понятие матрицы

Определение 3.1. Пусть m и n натуральные числа. *Матрицей* размера (формата) $m \times n$ над $\mathbf{R}$ назовем прямоугольную таблицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленную из элементов множества $\mathbf{R}$. Числа a_{ij} называются *элементами* матрицы A.

Индексы i и j элемента a_{ij} матрицы A показывают соответственно номер строки и столбца, в которых расположен этот элемент.

Сокращенно матрицу A можно записать: $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Для обозначения матриц наряду с круглыми скобками используют квадратные и двойные прямые скобки: $[a_{ij}]$, $\| a_{ij} \|$.

При $m = n$ говорят, что A– *квадратная матрица* порядка n.

Определение 3.2. Две *матрицы* над $\mathbf{R}$ называют *равными*, если
1) они имеют одинаковые форматы;
2) элементы, стоящие на одинаковых местах, совпадают.

Определение 3.3. Матрицу, все элементы которой равны нулю, называют *нулевой матрицей.*

Определение 3.4. Квадратная $n \times n$ матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной* и обозначается E_n.

Определение 3.5. Диагональной матрицей называют квадратную $n \times n$ матрицу, у которой на диагонали находятся элементы из $\mathbf{R}$, а вне диагонали — нули:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

Определение 3.6. *Верхней треугольной матрицей* называют $n \times n$ матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а *нижней треугольной матрицей* — матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 3.7. *Ступенчатой* называется *матрица* $A = (a_{ij})$, обладающая следующими двумя свойствами:

1) любая ее строка — ненулевая, т.е. содержит хотя бы один элемент, не равный 0;

2) если первые ненулевые элементы i-й и $i+1$-й строки располагаются в столбцах с номерами k и l соответственно, то $k < l$.

Например, из следующих четырех матриц первые две — ступенчатые, а две последние не являются ступенчатыми:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2. Операции над матрицами

Сложение матриц

Определение 3.8. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$– $m \times n$-матрицы над $\mathbf{R}$. *Суммой* $A + B$ *матриц* A и B называется $m \times n$-матрица $C = (c_{ij})$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех i и j.

Свойства сложения матриц:

1) сложение матриц коммутативно, т.е. $A + B = B + A$;
2) сложение матриц ассоциативно, т.е. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $A + O = O + A$, где O– нулевая матрица.

Умножение матрицы на число

Определение 3.9. *Произведением* αA *числа* $\alpha \in \mathbf{R}$ *и* $m \times n$*-матрицы* A называется $m \times n$-матрица $B = (b_{ij})$, такая что $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ для всех i, j.

Свойства умножения матрицы на число:

1) $1 \cdot A = A$, $0 \cdot A = O$;
2) $A + (-1)A = O$;
3) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Определение 3.10. *Матрица* $(-1)A$ называется *противоположной* к матрице A и обозначается $-A$.

Умножение матриц

Определение 3.11. *Произведением* $m\times k-$*матрицы* $A=(a_{ij})$ *и* $k\times n-$*матрицы* $B=(b_{ij})$ называют такую $m\times n-$матрицу $C=(c_{ij})$, что

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{ik}\cdot b_{kj}=\sum_{l=1}^{k}a_{il}\cdot b_{lj}. \qquad (3.1)$$

Вывод. 1. Умножать матрицы A и B можно только при условии, что число столбцов матрицы A (первого сомножителя) равно числу строк матрицы B (второго сомножителя). В противном случае говорят, что *умножение матриц* A и B *не определено.*

2. Умножать матрицы следует по правилу «строка на столбец». Строка первого сомножителя умножается на столбец второго сомножителя по формуле (3.1).

3. Произведением является $m\times n-$матрица, где $m-$ число строк первого сомножителя, $n-$ число столбцов второго сомножителя.

Пример. Найдите произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&4&3\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

Решение. Определим сначала формат матриц сомножителей. A—матрица формата 2×2, B—матрица формата 2×3, поэтому произведение AB существует и имеет формат 2×3. Затем по формуле (3.1) получаем:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot(-1) & 1\cdot 4+2\cdot 0 & 1\cdot 3+2\cdot 2\\ 0\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 0\cdot 4+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 3+(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 7\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Умножение этих же матриц в обратном порядке не определено.

Свойства умножения матриц:

1) умножение матриц ассоциативно: $(AB)C=A(BC)$;

2) $(A+B)C=AC+BC$; $A(B+C)=AB+AC$.

Умножение матриц некоммутативно, т.е. вообще говоря, $AB\neq BA$.

Определение 3.12. Пусть $A=(a_{ij})-$ $m\times n$-матрица. Матрица, у которой i-й столбец совпадает с i-й строкой матрицы A при любом $i=\overline{1,m}$, называется *транспонированной* к матрице A и обозначается A^T.

Свойства транспонирования матриц:

1) $(A^T)^T=A$;

2) $\alpha(A^T)=(\alpha A)^T$;

3) $(A+B)^T=A^T+B^T$;

4) если $m=n$, то $(AB)^T=B^TA^T$.

3.3. Элементарные преобразования строк матрицы. Ранг матрицы

Определение 3.13. Пусть $A = (a_{ij})$– $m \times n$-матрица над $\mathbf{R}$. *Элементарными преобразованиями строк матрицы* A называются следующие преобразования:

1) умножение любой строки матрицы A на ненулевой элемент из $\mathbf{R}$;

2) прибавление к строке матрицы A другой ее строки, умноженной на элемент из $\mathbf{R}$.

С помощью элементарных преобразований строк можно поменять местами любые две строки матрицы. Поэтому перестановку строк также можно причислять к элементарным преобразованиям.

Теорема 3.1. *Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду*

Пример. С помощью элементарных преобразований строк приведите к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим первую строку матрицы A на 2 и сложим со второй строкой. Затем первую строку умножим на 3 и сложим с третьей.

В итоге получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 5 & 11 & -11 \end{pmatrix}.$$

Теперь вторую строку умножим на $(-5/3)$ и сложим с третьей:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -2/3 & 7/3 \end{pmatrix}.$$

Определение 3.14. Ранг матрицы A– число строк её ступенчатого вида (обозначается rang A или rank A).

3.4. Обратная матрица

Определение 3.15. Квадратная *матрица* A порядка n называется *обратимой*, если существует матрица B такая, что $AB = BA = E$.
В этом случае матрица B называется *обратной* к матрице A. Если матрица A– обратимая, то обратная к ней матрица обозначается A^{-1}.

Теорема 3.2. *1. Если матрица обратима, то существует единственная обратная ей матрица;*

2. Если A и B– обратимые матрицы одного порядка, то AB обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Первый способ вычисления обратной матрицы

На практике для вычисления обратной матрицы поступают так. К матрице A дописывают справа единичную матрицу E и над полученной матрицей $(A|E)$ проводят элементарные преобразования строк, в результате которых приходят к матрице $(E|A^{-1})$.

Пример. С помощью элементарных преобразований строк найдите обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем матрицу $(A|E)$, где $E-$ единичная матрица:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Сделаем следующие элементарные преобразования: первую строку матрицы $(A|E)$ умножим на (-2) и прибавим ко второй, затем первую строку прибавим к третьей. В итоге получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Теперь вторую строку прибавим к третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Вторую строку умножим на (-1), а третью – на $(1/2)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Третью строку умножим на 2 и прибавим ко второй, а затем третью прибавим к первой:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Вторую строку умножим на (-1) и прибавим к первой:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) = (E|A^{-1}) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3.5. Определитель квадратной матрицы, его свойства

Определение 3.16. Поставим в соответствие квадратной матрице A порядка $n \leq 3$ число $\det A$ ($| A |$, или $\triangle$), называемое ее *определителем*, следующим образом:

1) при $n = 1$ $A = (a_{11})$; $\det A = a_{11}$.

2) при $n = 2$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

3) при $n = 3$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$.

Формулы вычисления определителей второго и третьего порядков легче запомнить с помощью следующих рисунков:

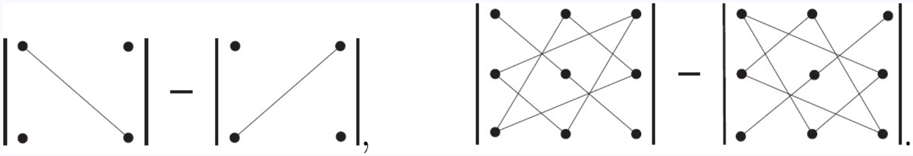


Рис. 3.1: Правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков

Правило вычисления определителя 3-го порядка, изображенное на правом рисунке, называют **правилом треугольников** или **правилом Саррюса**.

Для вычисления определителей матриц порядка ≥ 4 применяют

Свойства определителей

1) $\det A = \det A^T$.

2) При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

3) Определитель матрицы с нулевой строкой (столбцом) равен нулю.

4) Определитель, имеющий 2 одинаковые строки (столбца), равен 0.

5) Определитель, имеющий 2 пропорциональные строки (столбца), равен 0.

6) Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

7) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{i1}+b_{i1} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ b_{i1} & \dots & b_{in} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8) **(Элементарные преобразования определителя).** Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число.

9) Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Теорема 3.3. $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Определение 3.17. *Матрица* A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$.

Теорема 3.4. *1) Квадратная матрица обратима только тогда, когда она невырождена.*

2) Если $A-$ обратимая матрица, то $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

3.6. Миноры и алгебраические дополнения

Пусть $A-$ квадратная матрица порядка n.

Определение 3.18. *Минором элемента* a_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, полученной из A после вычеркивания i-строки и j-го столбца (обозначается M_{ij}).

Определение 3.19. *Алгебраическим дополнением элемента* a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема 3.5. ***(о разложении определителя по элементам некоторой строки (столбца)).*** *Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ путем его разложения по элементам первой строки.

Решение. $\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$
$= 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 25.$

Следствие. *Если равны нулю все элементы некоторой строки (столбца) квадратной матрицы, кроме одного, то определитель равен произведению этого элемента на его алгебраическое дополнение.*

3.7. Формула обратной матрицы (2-й способ вычисления)

Теорема 3.6. *Если квадратная матрица n-го порядка невырождена, то существует A^{-1}, которую можно вычислить по формуле*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ & & \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Матрица в правой части (3.2) называется *присоединенной* к матрице A. Чтобы ее получить, нужно в A заменить каждый элемент a_{ij} его алгебраическим дополнением A_{ij}, а затем транспонировать.

3.8. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре

Определение 3.20. Пусть A– $m \times n$-матрица. Зафиксируем натуральное число $r \leq \min\{m, n\}$. Выделим в матрице A r строк и r столбцов. Элементы матрицы A, стоящие на пересечении отмеченных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка r. Определитель этой матрицы называется *минором r-го порядка матрицы A*.

Определение 3.21. Минор M порядка r матрицы A называется *базисным минором*, если

1) $M \neq 0$;

2) все миноры матрицы A, порядки которых $> r$, равны нулю (такие *миноры* называются *окаймляющими* для минора M).

Теорема 3.7. ***(о базисном миноре)*** *Ранг матрицы равен порядку ее базисных миноров.*

Из теоремы следует

Способ вычисления ранга матрицы методом окаймления:

1) Ищем какой-либо минор, не равный нулю, и окаймляем его.

2) Если все окаймляющие миноры равны нулю, то rang A равен порядку этого минора, иначе: если хотя бы один из окаймляющих миноров не равен нулю, то окаймляем уже этот не равный нулю минор.

Вычисления начинаем с миноров второго порядка.

3.9. Практическая часть

3.9.1 Практическое занятие по теме «Линейное пространство матриц. Умножение и транспонирование матриц. Матрицы специального вида»

1. Найти линейные комбинации заданных матриц:

1) $4A - 5B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

2) $3A + 4B$, $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $5A - 3B + 2C$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти произведения матриц AB и BA (если они существуют):

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$;

2) $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $f(x) = x^3 - x^2 + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 2,\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

4. Привести к ступенчатому виду матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix};$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix};$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix};$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 11 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 & -18 \\ 5 & 0 & -1 & -13 \end{pmatrix};$

5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

3.9.2 Практическое занятие по теме «Определитель квадратной матрицы и его свойства. Теорема об определителе произведения двух матриц. Обратная матрица»

1. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители разложением по строке или столбцу:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

3. Найти методом элементарных преобразований матрицу, обратную к данной:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Найти методом присоединенной матрицы матрицу, обратную к данной:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

5. Решить матричные уравнения:

$$1) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

ТЕМА 4
Линейные пространства

4.1. Определение линейного пространства

Определение 4.1. Линейное (векторное) пространство – это множество $V \neq \varnothing$ элементов любой природы, на котором заданы две операции – операция сложения элементов из V и операция умножения элемента из V на число из множества $\mathbf{R}$, так что выполняются условия:

1) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V \ (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$;
2) $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \ \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$;
3) $\exists \overline{\mathbf{0}} \in V$, такой что $\forall \mathbf{a} \in V \ \mathbf{a}+\overline{\mathbf{0}} = \mathbf{a}$;
4) $\forall \mathbf{a} \in V \ \exists (-\mathbf{a}) \in V$, такой что $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \overline{\mathbf{0}}$;
5) $\forall \mathbf{a} \in V \ 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$;
6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \mathbf{a} \in V \ \alpha(\beta)\mathbf{a} = (\alpha\beta)\mathbf{a}$;
7) $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \ \alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$;
8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \mathbf{a} \in V \ (\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$.

Элементы множества V называются *векторами*, элементы множества $\mathbf{R}$ – *скалярами*, условия 1)–8) – *аксиомами линейного пространства*.

Примеры линейных пространств

1) Рассмотрим множество V^3, состоящее из векторов (направленных отрезков) трехмерного пространства. Множество V^3 – линейное про-

странство относительно операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число, т.к. выполняются аксиомы 1)–8) (проверьте самостоятельно).

2) Рассмотрим множество V^2, состоящее из всех векторов, параллельных некоторой плоскости. Множество V^2 – линейное пространство относительно операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число.

3) Рассмотрим множество $\mathbf{R}^n = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}\}$.

Зададим операцию сложения элементов множества $\mathbf{R}^n$:
для любых $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$ положим

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

Операцию умножения элемента множества $\mathbf{R}^n$ на скаляр из $\mathbf{R}$ зададим так: для любых $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\alpha \in \mathbf{R}$ положим

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

Относительно заданных операций множество $\mathbf{R}^n$ является линейным пространством (проверьте выполнение аксиом 1)–8)). Называется оно **n-мерным арифметическим пространством**.

4) Множество $M(n, \mathbf{R})$ всех $n \times n$-матриц с элементами из $\mathbf{R}$ относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число из $\mathbf{R}$ – линейное пространство (проверьте самостоятельно выполнение аксиом 1)–8)).

Простые следствия из аксиом линейного пространства

Если V — линейное пространство, то

1) в V существует **лишь один** нулевой вектор:

$\exists!\bar{\mathbf{0}} \in V$, такой что $\forall \mathbf{a} \in V \qquad \mathbf{a} + \bar{\mathbf{0}} = \mathbf{a}$;

2) для любого вектора $\mathbf{a}$ в V существует **лишь один** противоположный ему вектор:

$\forall \mathbf{a} \in V\ \exists!(-\mathbf{a}) \in V$, такой что $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \bar{\mathbf{0}}$;

3) дистрибутивные законы выполняются и для вычитания векторов, т.е.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \qquad \alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}; \qquad (\alpha - \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{a}$;

4) если $\alpha \in \mathbf{R}$, $\mathbf{a} \in V$, то $\qquad \alpha\mathbf{a} = \bar{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $\mathbf{a} = \bar{0}$;

5) если $\alpha \in \mathbf{R}$, $\mathbf{a} \in V$, то $\qquad (-\alpha)\mathbf{a} = \alpha(-\mathbf{a}) = -(\alpha\mathbf{a})$.

4.2. Понятие линейно зависимой и линейно независимой системы векторов линейного пространства

Определение 4.2. Пусть V — линейное пространство, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — набор скаляров из $\mathbf{R}$, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — набор векторов из V. Вектор

$$\mathbf{b} = \lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются *коэффициентами* этой *линейной комбинации*. В этом случае говорят, что вектор $\mathbf{b}$ *линейно выражается* через векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Пример. Найти линейную комбинацию $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3$ векторов $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 2, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (4, -4, 3, -3)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, 0, 1, 2)$ пространства $\mathbf{R}^4$.

Решение. По правилам выполнения операций сложения векторов и умножения вектора на скаляр в арифметическом пространстве $\mathbf{R}^4$

$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - 3\mathbf{a}_3 = (0, 1, 2, -1) + 2(4, -4, 3, -3) - 3(-1, 0, 1, 2) =$
$= (0, 1, 2, -1) + (8, -8, 6, -6) + (3, 0, -3, -6) = (11, -7, 5, -13).$

Определение 4.3. Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ линейного пространства V называется *линейно зависимой*, если существует набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ из $\mathbf{R}$, среди которых хотя бы одно не равно нулю (ненулевой набор), такой что

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n = \overline{\mathbf{0}}. \tag{4.1}$$

Если же равенство (4.1) выполняется только в том случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$, то система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ называется *линейно независимой*.

Пример. Является ли линейно зависимой система векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 6, 9, 12)$ арифметического пространства $\mathbf{R}^4$?

Решение. Данная система векторов линейно зависима (по определению), т.к.

$$3\mathbf{a}_1 + (-1)\mathbf{a}_2 = \overline{\mathbf{0}},$$

т.е. существует ненулевой набор коэффициентов $(3, -1)$, такой что линейная комбинация векторов с этими коэффициентами равна $\overline{\mathbf{0}}$.

Справедливы следующие утверждения (**теоремы о линейной зависимости**):

1. если система векторов состоит из одного вектора, то она линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой;
2. система, содержащая нуль-вектор, всегда линейно зависима;
3. если часть системы векторов линейно зависима, то вся система линейно зависима;
4. если система векторов линейно независима, то линейно независима и любая ее часть;
5. система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один вектор системы является линейной комбинацией остальных.

Пример. Является ли линейно зависимой система векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 6, 9, 12)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 2, 3, 6)$ пространства $\mathbf{R}^4$?

Решение. Т.к. $\mathbf{a}_2 = 3\mathbf{a}_1$, то по утверждению 5 система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ линейно зависима. Далее, так как часть системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима, то и вся эта система линейно зависима (утверждение 3).

Если же рассуждать, отталкиваясь от определения, то система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима, поскольку $3\mathbf{a}_1 + (-1)\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 = \overline{\mathbf{0}}$, т.е. существует ненулевой набор коэффициентов $(3, -1, 0)$, такой что линейная комбинация векторов с этими коэффициентами равна $\overline{\mathbf{0}}$.

4.3. Базис и размерность векторного пространства. Разложение вектора по базису. Координаты вектора

Определение 4.4. *Базисом* линейного пространства V называется система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ этого пространства, удовлетворяющая условиям:

1. система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ линейно независима,
2. любой вектор $\mathbf{a}$ пространства V линейно выражается через векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$, т.е. вектор $\mathbf{a}$ можно представить в виде

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n.$$

Пример. Рассмотрим систему векторов

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 1) \qquad (4.2)$$

арифметического пространства $\mathbf{R}^n$. Она линейно независима, так как из равенства

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n = \overline{\mathbf{0}}$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Кроме того, произвольный вектор $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ арифметического пространства $\mathbf{R}^n$ линейно выражается через систему (4.2): $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$. Поэтому система векторов (4.2) является базисом арифметического пространства $\mathbf{R}^n$.

Замечание. Если в линейном пространстве V существует базис, состоящий из n векторов, то каждый базис этого пространства состоит из n векторов.

Определение 4.5. Линейное пространство, в котором существует базис, состоящий из n векторов, называется *n-мерным*. Если пространство V n-мерно, то число n называют *размерностью* пространства V и пишут $n = \dim V$.

Пример. Пространство V^3 трехмерно, его базис составляет любая тройка некомпланарных векторов. Пространство V^2 всех векторов плоскости двумерно. Арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$ n-мерно.

Пусть V — n-мерное линейное пространство, система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ является его базисом, $\mathbf{a}$ — произвольный вектор этого пространства. Тогда $\mathbf{a}$ линейно выражается через базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, т. е.

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n. \tag{4.3}$$

Определение 4.6. Представление вектора $\mathbf{a}$ в виде (4.3) называется *разложением вектора* $\mathbf{a}$ *по базису* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. *Координатами вектора* $\mathbf{a}$ относительно базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ называются коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в разложении (4.3) этого вектора по базису.

Замечание. Последовательность векторов в базисе всегда предполагается заданной. Например, базисы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ считаются разными.

Замечание. Координаты вектора в заданном базисе определены однозначно, т.е. для любого вектора $\mathbf{a}$ относительно заданного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ существует единственный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такой что $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$.

Замечание. Пользуясь матричным умножением, разложение (4.3) вектора $\mathbf{a}$ по базису можно записать в виде произведения строки базисных векторов на **координатный столбец** вектора $\mathbf{a}$ в этом базисе:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

4.4. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому. Матрица перехода

Задача преобразования координат состоит в установлении связи между координатами вектора в разных базисах.

Пусть V — n-мерное линейное пространство, его базисы —

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \tag{4.4}$$

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n. \tag{4.5}$$

Определение 4.7. *Матрицей перехода* от базиса (4.4) к базису (4.5) называется матрица A n-го порядка, i-й столбец которой является координатным столбцом вектора $\mathbf{e}'_i$ в базисе (4.4).

Пример. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ арифметического пространства $\mathbf{R}^3$, если $\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$, $\mathbf{b}_3 = 2\mathbf{a}_2$.

Решение. Так как разложение вектора $\mathbf{b}_1$ по базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ имеет вид

$$\mathbf{b}_1 = 2\mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + (-1) \cdot \mathbf{a}_3,$$

то в этом базисе вектор $\mathbf{b}_1$ имеет координаты: $\mathbf{b}_1 = (2, 0, -1)$. Аналогично $\mathbf{b}_2 = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b}_3 = (0, 2, 0)$. Расположив полученные наборы координат в виде координатных столбцов друг за другом, получим матрицу перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ к базису $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.1. *Матрица A перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ векторного пространства V является невырожденной. Матрица перехода от базиса $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ к базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ этого пространства является обратной по отношению к A матрицей.*

Таким образом, для того, чтобы найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ к базису $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ в последнем рассмотренном примере, необходимо вычислить матрицу A^{-1} (самостоятельно).

Теорема 4.2. *Если A — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ векторного пространства V,*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} -$$

координатные столбцы произвольного вектора $\boldsymbol{x} \in V$ соответственно в базисах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координатный столбец произвольного вектора $\mathbf{x} \in V$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ получается из координатного столбца этого вектора в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$ путем умножения его (столбца) слева на матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n$. В этом и заключается **правило преобразования координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому**.

4.5. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств

Определение 4.8. Пусть V – линейное пространство. Непустое подмножество U пространства V называется *подпространством* пространства V, если оно удовлетворяет условиям:

1) для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ их сумма $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$;

2) для любого вектора $\mathbf{a} \in U$ и любого числа $\alpha \in \mathbf{R}$ произведение $\alpha\mathbf{a} \in U$.

Очевидно, что совокупность условий 1 и 2 равносильна следующему условию: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in U$ для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$ и любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Из определения подпространства следует, что всякое подпространство U линейного пространства V само является линейным пространством, если выполнять операции сложения векторов из U и умножения их на числа из $\mathbf{R}$ по правилам, определенным для пространства V.

Примеры.

1) Множество, содержащее только нулевой вектор пространства V, удовлетворяет условиям 1 и 2 и, следовательно, является подпространством пространства V (называется нулевым подпространством).

2) Пространство V является своим подпространством.

Пусть
$$U_1, U_2, ..., U_k - \tag{4.6}$$
подпространства линейного пространства V.

Определение 4.9. *Пересечением подпространств* (4.6) называется множество всех векторов, принадлежащих каждому из этих подпространств. Обозначается пересечение $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_k$ или $\bigcap_{i=1}^{k} U_i$. *Суммой подпространств* (4.6) называется множество всех векторов $\mathbf{a}$ пространства V, представимых в виде
$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{a}_k, \qquad \mathbf{a}_i \in U_i, \qquad i = 1, 2, ..., k. \tag{4.7}$$
Обозначается сумма подпространств $U_1 + U_2 + ... + U_k$ или $\sum_{i=1}^{k} U_i$. Итак, из определений следует, что
$$\sum_{i=1}^{k} U_i = \{\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{a}_k \quad | \quad \mathbf{a}_i \in U_i, \quad i = 1, 2, ..., k\},$$
$$\bigcap_{i=1}^{k} U_i = \{\mathbf{a} \in V \quad | \quad \mathbf{a} \in U_i, \quad i = 1, 2, ..., k\}.$$

Теорема 4.3. *Сумма и пересечение подпространств линейного пространства являются его подпространствами.*

Пусть S – сумма ненулевых подпространств (4.6) линейного пространства V. По определению S – множество всех векторов пространства V, которые представимы в виде суммы (4.7) слагаемых, взятых по одному из каждого подпространства U_i.

Определение 4.10. Сумма S подпространств называется *прямой суммой*, если каждый ее вектор лишь одним способом может быть представлен в виде (4.7). Иными словами, сумма S прямая, если из каждого равенства вида

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_k,$$

где $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in U_i$, следует равенство соответствующих слагаемых: $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Обозначается прямая сумма подпространств $U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k$ или $\bigoplus_{i=1}^{k} U_i$.

Теорема 4.4. *Для того чтобы сумма подпространств была прямой, необходимо и достаточно, чтобы каждое из этих подпространств пересекалось с суммой всех остальных слагаемых только по нулевому подпространству.*

4.6. Линейная оболочка системы векторов. Формула размерности Грассмана

Определение 4.11. *Базисом системы векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ векторного пространства V называется ее линейно независимая подсистема, через векторы которой линейно выражается всякий вектор системы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$.

Пример. В системе векторов $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 1, -1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (-6, -2, 2, 0) \in \mathbf{R}^4$ подсистема $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ является базисом.

В самом деле, векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не пропорциональны, поэтому подсистема $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ линейно независима.

Кроме того, любой вектор системы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно выражается через $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$:

$\mathbf{a}_1 = 1 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2$,

$\mathbf{a}_2 = 0 \cdot \mathbf{a}_1 + 1 \cdot \mathbf{a}_2$,

$\mathbf{a}_3 = 0 \cdot \mathbf{a}_1 - 2 \cdot \mathbf{a}_2$.

Поэтому подсистема $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ образует базис системы векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

Определение 4.12. *Рангом* конечной *системы векторов*, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, называется число векторов в ее базисе.

Обозначается ранг системы векторов $(\mathbf{a})$ символом $\mathtt{rang}(\mathbf{a})$.

Общий способ получения подпространств произвольного линейного пространства V заключается в следующем. Возьмем в пространстве V произвольные векторы

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k. \tag{4.8}$$

Рассмотрим множество всех линейных комбинаций векторов (4.8) и обозначим его $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Заметим, что

1. сумма любых двух линейных комбинаций векторов (4.8) также является линейной комбинацией векторов (4.8), поэтому принадлежит множеству $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$;

2. произведение линейной комбинации векторов (4.8) на скаляр также является линейной комбинацией векторов (4.8), поэтому принадлежит множеству $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Тогда по определению подпространства рассматриваемое множество $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$ является подпространством линейного пространства V. Его называют **линейной оболочкой векторов** (4.8) или **подпространством, порожденным векторами** (4.8). Векторы (4.8) называют **системой образующих** линейной оболочки $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Теорема 4.5. *Базисом линейной оболочки $L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ является базис системы векторов (4.8), а ее размерность*

$$\dim L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k) = \mathtt{rang}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k).$$

Теорема 4.6. *Пусть U и W — конечномерные подпространства линейного пространства V. Тогда*

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Эта формула называется **формулой Грассмана**. Таким образом, размерность суммы двух конечномерных подпространств линейного пространства равна сумме их размерностей минус размерность пересечения.

Теорема 4.7. *Размерность прямой суммы конечномерных подпространств равна сумме их размерностей.*

4.7. Практическая часть

4.7.1 Практическое занятие по теме «Определение линейного пространства и простейшие следствия из аксиом. Линейная зависимость и независимость»

1. Определить, является ли линейным пространством над R каждое из следующих множеств с обычными сложением и с обычным умножением на число:

1) множество, состоящее из одного нулевого вектора на декартовой плоскости;

2) множество всех векторов декартовой плоскости;

3) множество R;

4) множество C;

5) множество Q;

6) множество всех многочленов с действительными коэффмцментами;

7) множество все четных чисел;

8) множество всех нечетных чисел;

9) можество всех квадратных матриц $n-$ого порядка над R.

2. Пусть $a_1 = (0, 1, 2, -1), a_2 = (4, -4, 3, -3), a_3 = (-2, -1, 1, 2)-$ векторы из K^n. Найти линейные комбинации:

1) $a_1 - 2a_2 + 3a_3$;

2) $4a_1 - a_2 + 5a_3$;

3) $a_1 + 2a_2 - 8a_3$;
4) $8a_1 - 7a_2 + 3a_3$.

3. Определить, какие из следующих систем векторов пространства K^n линейно-зависимы, какие линейно-независимы:
1) $a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (1, 2, 3, 4)$;
2) $a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (-1, -2, -3, -4)$;
3) $a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (3, 6, 9, 12)$;
4) $a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (1, 2, 3, 5)$;
5) $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0); e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$;
6) $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (0, 1, 1, 1); a_3 = (0, 0, 1, 1), e_4 = (0, 0, 0, 1)$;
7) $a_1 = (1, 2, 3, 4), a_2 = (3, 6, 9, 12); a_3 = (1, 2, 3, 6)$.

4.7.2 Практическое занятие по теме «Базис и координаты. Связь между размерностью и базисом. Преобразования базиса и координат, матрица перехода»

1. Доказать, что каждая из следующих систем векторов является базисом в пространстве R^n :
1) $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$;
$e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$;
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$;
2) $a_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$;

$a_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0);$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_n = (1, 1, 1, \ldots, 1);$

3) $a_1 = (1, 2, 3, \ldots, n-1, n);$

$a_2 = (1, 2, 3, \ldots, n-1, 0);$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_n = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0).$

2. Проверить, образует ли каждая из следующих систем векторов базис в пространстве R^4, и найти координаты вектора $x = (1, 2, 3, 4)$ в каждом из этих базисов:

1) $a_1 = (0, 1, 0, 1);$

$a_2 = (0, 1, 0, -1);$

$a_3 = (1, 0, 1, 0);$

$a_4 = (1, 0, -1, 0);$

2) $a_1 = (1, 1, 1, 1);$

$a_2 = (1, -1, 1, -1);$

$a_3 = (1, -1, 1, 1);$

$a_4 = (1, -1, -1, -1);$

3) $a_1 = (1, 2, 3, 0);$

$a_2 = (1, 2, 0, 3);$

$a_3 = (1, 0, 2, 3);$

$a_4 = (0, 1, 2, 3);$

4) $a_1 = (1, -2, 3, -4)$;
$a_2 = (-4, 1, -2, 3)$;
$a_3 = (3, -4, 1, -2)$;
$a_4 = (-2, 3, -4, 1)$.

4.7.3 Практическое занятие по теме «Подпространства. Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма подпространств»

1. Доказать, что следующие подмножества пространства R^n являются его подпространствами. Найти размерность каждого из этих подпространств:
1) $A = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_n = 0\}$;
2) $B = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0\}$;
3) $C = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n = 0\}$.

2. Найти базисы суммы и пересечения линейных подпространств $L(a_1, a_2, a_3)$ и $L'(b_1, b_2, b_3)$, где:
1) $a_1 = (1, 1, 0, 0)$;
$a_2 = (1, 0, 0, -1)$;
$a_3 = (1, -1, 1, -1)$;
$b_1 = (3, -3, -1, 1)$;
$b_2 = (5, -3, 1, 1)$;
$b_3 = (3, -1, 1, 1)$;

2) $a_1 = (1, -2, 0, -2)$;
$a_2 = (1, 1, 0, -1)$;
$a_3 = (1, 2, 1, 1)$;
$b_1 = (1, 4, -1, -1)$;
$b_2 = (1, 4, 4, 8)$;
$b_3 = (2, 0, 1, -1)$.

4.7.4 Практическое занятие по теме «Линейная оболочка. Формула размерности Грассмана»

1. Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки, натянутой на векторы:

1) $a_1 = (3, 11, 5, 4), a_2 = (4, 12, 5, 10), a_3 = (1, 13, 6, 4), a_4 = (3, 119, 2)$;

2) $a_1 = (0, 1, 6, 3, 2), a_2 = (5, 3, 1, 1, 0), a_3 = (4, 2, 4, 2, 1), a_4 = (6, -5, 6, -3, -1)$, $a_5 = (0, -5, -2, -3, -1)$;

3) $f_1(x) = 2x+4x^3-x^6, f_2(x) = x+2x^3-x^6, f_3(x) = x+3x^3+x^6, f_4(x) = x^3 + x^6$.

2. Пусть $L-$ линейное пространство. Доказать, что:

1) сумма конечного множества подпространств пространства L является его подпространством;

2) пересечение любого множества подпространств пространства L является его подпространством;

3) линейная оболочка $\mathrm{L}\,(a_1, a_2, \ldots, a_8)$ векторов $a_1, a_2, \ldots, a_8 \in L$ совпадает с пересечением всех подпространств пространства L, содержащих эти векторы.

ТЕМА 5
Системы линейных уравнений

5.1. Элементарные преобразования матрицы

Пусть A — произвольная матрица над $\mathbb{R}$.

Определение 5.1. *Элементарными преобразованиями* строк матрицы A называют следующие операции:

1) умножение какой-либо строки матрицы A на отличное от нуля число из $\mathbb{R}$, т. е. умножение каждого элемента этой строки на указанное число;

2) прибавление к строке матрицы A другой ее строки, умноженной на произвольное число $\lambda \in \mathbb{R}$, т. е. прибавление к каждому элементу какой-либо строки соответствующего (находящегося в том же столбце) элемента другой строки, умноженного на λ.

Лемма 5.1. 1. *С помощью элементарных преобразований можно поменять местами любые две строки матрицы.*

2. *Элементарные преобразования обратимы, т.е. если матрица B получается из A в результате какого-нибудь элементарного преобразования, то и матрица A может быть получена из B в результате элементарного преобразования.*

Если матрица B получается из матрицы A в результате приме нения к A одного или нескольких элементарных преобразований строк, то говорят, что матрица A *эквивалентна* матрице B и пишут $A \sim B$.

Теорема 5.1. *Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

Пример. С помощью элементарных преобразований строк привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим первую строку матрицы A на 2 и сложим со второй строкой. Затем первую строку умножим на 3 и сложим с третьей. В итоге получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 5 & 11 & -11 \end{pmatrix}.$$

Теперь вторую строку умножим на $-\frac{5}{3}$ и сложим с третьей:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

5.2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре

Пусть A — матрица размеров $m \times n$, k — натуральное число, не превосходящее m и n, т.е. $k \le \min\{m;n\}$. *Минором k-го порядка* матрицы A называется определитель матрицы k-го порядка, образованной элементами, стоящими на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов матрицы A. Обозначая миноры, номера выбранных строк будем указывать верхними индексами, а выбранных столбцов — нижними, располагая их по возрастанию.

Пример. Записать миноры разных порядков матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет размеры 3×4. Она имеет: 12 миноров 1-го порядка, например, минор $M_2^3 = det(a_{32}) = 4$; 18 миноров 2-го порядка, например, $M_{23}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$; 4 минора 3-го порядка, например,

$$M_{134}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Определение 5.2. В матрице A размеров $m \times n$ минор r-го порядка называется *базисным, если он отличен от нуля, а все миноры* $(r+1)$*-го порядка равны нулю или их вообще не существует.*

Определение 5.3. *Рангом матрицы* называется порядок базисного минора. В нулевой матрице базисного минора нет. Поэтому ранг нулевой матрицы по определению полагают равным нулю. Ранг матрицы A обозначается через $rang\ A$.

Пример. Найти все базисные миноры и ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Все миноры третьего порядка данной матрицы равны нулю, так как у этих определителей третья строка нулевая. Поэтому базисным может быть только минор второго порядка, расположенный в первых двух строках матрицы. Перебирая 6 возможных миноров, отбираем отличные от нуля

$$M_{12}^{12} = M_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \; M_{24}^{12} = M_{34}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \; M_{14}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Каждый из этих пяти миноров является базисным. Следовательно, ранг матрицы равен 2.

Замечания. 1. Если в матрице все миноры k-го порядка равны нулю, то равны нулю и миноры более высокого порядка. (Действительно, раскладывая минор $(k+1)$-го порядка по любой строке, получаем сумму произведений элементов этой строки на миноры k-го порядка, а они равны нулю).

2. Ранг матрицы равен наибольшему порядку отличного от нуля минора этой матрицы.

3. Если квадратная матрица невырожденная, то ее ранг равен ее порядку. Если квадратная матрица вырожденная, то ее ранг меньше ее порядка.

5.3. Теоремы о базисном миноре и ранге матрицы

Рассмотрим основные теоремы, выражающие свойства линейной зависимости и линейной независимости столбцов (строк) матрицы.

Теорема 5.2. *(О базисном миноре) В произвольной матрице A каждый столбец строка) является линейной комбинацией столбцов (строк), в которых расположен базисный минор.*

Доказательство. Без ограничения общности предполагаем, что в матрице A размеров $m \times n$ базисный минор расположен в первых r строках и первых r столбцах. Рассмотрим определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{s1} & \ldots & a_{sr} & a_{sk} \end{vmatrix},$$

который получен приписыванием к базисному минору матрицы A соответствующих элементов s-й строки и k-го столбца. Отметим, что при любых $1 \le s \le m$ и $1 \le k \le n$ этот определитель равен нулю.

Если $s \le r$ или $k \le r$, то определитель D содержит две одинаковых строки или два одинаковых столбца.

Если же $s > r$ и $k > r$, то определитель D равен нулю, так как является минором $(r+l)$-го порядка. Раскладывая определитель по последней строке, получаем

$$a_{s1} \cdot D_{\{r+1\}1} + \cdots + a_{sr} \cdot D_{\{r+1\}r} + a_{sk} \cdot D_{\{r+1\}\{r+1\}} = 0,$$

где $D_{\{r+1\}j}$ — алгебраические дополнения элементов последней строки. Заметим, что $D_{\{r+1\}\{r+1\}} \ne 0$, так как это базисный минор. Поэтому

$$a_{sk} = \lambda_1 \cdot a_{s1} + \cdots + \lambda_r \cdot a_{sr},$$

где $\lambda_j = -\frac{D_{\{r+1\}j}}{D_{\{r+1\}\{r+1\}}}$, $j = 1, 2, \ldots, r$.

Записывая последнее равенство для $s = 1, 2, \ldots, m$, получаем

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \dots \\ a_{mr} \end{pmatrix},$$

т.е. k-й столбец (при любом $1 \leq k \leq n$) есть линейная комбинация столбцов базисного минора, что и требовалось доказать.

Теорема о базисном миноре служит для доказательства следующих важных теорем.

Теорема 5.3. ***(Об инвариантности ранга при элементарных преобразованиях)*** *При элементарных преобразованиях столбцов (строк) матрицы ее ранг не меняется.*

Доказательство. Пусть $rang\ A = r$. Предположим, что в результате одного элементарного преобразования столбцов матрицы A получили матрицу A'. Если была выполнена перестановка двух столбцов, то любой минор $(r + l)$-го порядка матрицы A' либо равен соответствующему минору $(r + l)$-го порядка матрицы A, либо отличается от него знаком (свойство определителя). Если было выполнено умножение столбца на число $\lambda \neq 0$, то любой минор $(r + l)$-го порядка матрицы A' либо равен соответствующему минору $(r + l)$-го порядка матрицы A, либо отличается от него множителем $\lambda \neq 0$ (свойство определителя). Если было выполнено прибавление к одному столбцу другого столбца, умноженного на число $\lambda \neq 0$, то любой минор $(r + 1)$-го порядка матрицы A'

либо равен соответствующему минору $(r+1)$-го порядка матрицы A (свойство определителя), либо равен сумме двух миноров $(r+l)$-го порядка матрицы A (свойство определителя). Поэтому при элементарном преобразовании любого типа все миноры $(r+l)$-го порядка матрицы A' равны нулю, так как равны нулю все миноры $(r+l)$-го порядка матрицы A. Таким образом, доказано, что при элементарных преобразованиях столбцов ранг матрицы не может увеличиться. Так как преобразования, обратные к элементарным, являются элементарными, то ранг матрицы при элементарных преобразованиях столбцов не может и уменьшиться, т.е. не изменяется. Аналогично доказывается, что ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях строк.

Следствие 1. Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то эту строку (столбец) можно вычеркнуть из матрицы, не изменив при этом ее ранга.

Следствие 2. Любая невырожденная квадратная матрица является элементарной, другими словами, любая невырожденная квадратная матрица эквивалентна единичной матрице того же порядка.

Теорема 5.4. ***(О ранге матрицы).*** *Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы.*

Доказательство. Пусть $rang\ A = r$. Тогда в матрице A имеется r линейно независимых строк. Это строки, в которых расположен базисный минор. Если бы они были линейно зависимы, то этот минор был бы равен нулю, а ранг матрицы A не равнялся бы r. Покажем, что r — максимальное число линейно независимых строк, т.е. любые p строк линейно зависимы при $p > r$. Действительно, образуем из этих p строк матрицу B. Поскольку матрица B — это часть матрицы A, то $rang\ B \leq rang\ A = r < p$. Значит, хотя бы одна строка матрицы B не входит в базисный минор этой матрицы. Тогда по теореме о базисном миноре она равна линейной комбинации строк, в которых расположен базисный минор. Следовательно, строки матрицы B линейно зависимы. Таким образом, в матрице A не более, чем r линейно независимых строк. Ч.т.д.

Следствие 1. Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов

Следствие 2. При элементарных преобразованиях строк матрицы линейная зависимость (или линейная независимость) любой системы столбцов этой матрицы сохраняется.

5.4. Системы линейных уравнений

Определение 5.4. *Системой k линейных уравнений* с l неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_l$ над полем $\mathbb{P}$ называется совокупность уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1l}x_l = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2l}x_l = b_2, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kl}x_l = b_k. \end{cases} \tag{5.1}$$

Здесь a_{ij} — элементы поля $\mathbb{P}$, которые называются *коэффициентами*, а элементы b_i также принадлежат $\mathbb{P}$ и называются *свободными коэффициентами* системы.

Определение 5.5. Система 5.1, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*, а система, не имеющая ни одного решения, — *несовместной*. Если система линейных уравнений имеет единственное решение, то ее называют *определенной*, если решений больше одного, то *неопределенной*.

Из коэффициентов при неизвестных в системе 5.1 составим $k \times l$-матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2l} \\ \ldots & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kl} \end{bmatrix},$$

которая называется *матрицей системы* уравнений 5.1. Если к ней дописать столбец свободных коэффициентов, то получим *расширенную мат-*

рицу системы уравнений 5.1:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kl} & b_k \end{array}\right].$$

Форму 5.1 записи систем линейных уравнений называют *координатной*, а форму $AX = B$, где A — матрица системы 5.1, а

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{bmatrix}$$

называют *матричной.*

Если в системе линейных уравнений системы 5.1 все свободные коэффициенты равны 0, т.е. $b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$, то система называется *однородной.*

5.5. Матричные уравнения. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Определение 5.6. Матричным уравнением называется уравнение вида $AX = B$ $(YA = B)$, где A и B — матрицы над полем $\mathbb{P}$.

Решением матричного уравнения $AX = B$ ($YA = B$) называется такая матрица X_0 (Y_0), что справедливо равенство $AX_0 = B$ ($Y_0A = B$).

Если уравнение $AX = B$ ($YA = B$) имеет хотябы одно решение, то его называют *разрешимым.* Очевидно, что для того чтобы уравнение $AX = B$ ($YA = B$) было разрешимо *необходимо*, чтобы количество строк матрицы B совпадало с количеством строк матрицы A (количество столбцов матрицы B совпадало с количеством столбцов матрицы A).

Если матрица A является квадратной невырожденной матрицей, то при выполнении необходимого условия матричные уравнения $AX = B$ ($YA = B$) могут быть разрешимы следующим образом:

$$\begin{array}{c|c} AX = B & YA = B \\ A^{-1}(AX) = A^{-1}B & (YA)A^{-1} = BA^{-1} \\ (A^{-1}A)X = A^{-1}B & Y(AA^{-1}) = BA^{-1} \\ EX = A^{-1}B & YE = BA^{-1} \\ X_0 = A^{-1}B & Y_0 = BA^{-1} \end{array}$$

Рассмотрим систему линейных уравнений 5.1 в матричной форме

$$AX = B. \tag{5.2}$$

Если матрица A является невырожденной, то для нее существует обратная A^{-1}. Домножим обе части равенства 5.2 на A^{-1} слева. Получим формулу для нахождения X:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B, X = A^{-1}B.$$

Пример. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 23, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Для начала убедимся в том, что определитель матрицы системы линейных уравнений не равен нулю:

$$det\ A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 14 + 10 - (1 + 105 - 4) = -105.$$

Теперь вычислим алгебраические дополнения для элементов матрицы системы. Они нам понадобятся для нахождения обратной матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -34; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 15; A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2; A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=9;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{vmatrix}=-17;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7.$$

Находим обратную к A матрицу:

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}=\frac{1}{-103}\begin{bmatrix}-34 & -5 & 9\\ 7 & -2 & -17\\ 15 & -19 & -7\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-34}{-103} & \frac{-5}{-103} & \frac{9}{-103}\\ \frac{7}{-103} & \frac{-2}{-103} & \frac{-17}{-103}\\ \frac{15}{-103} & \frac{-19}{-103} & \frac{-7}{-103}\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=A_{-1}B=\begin{bmatrix}\frac{-34}{-103} & \frac{-5}{-103} & \frac{9}{-103}\\ \frac{7}{-103} & \frac{-2}{-103} & \frac{-17}{-103}\\ \frac{15}{-103} & \frac{-19}{-103} & \frac{-7}{-103}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\ 23\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 4\end{bmatrix}.$$

Ответ: $x_1=2, x_2=1, x_3=4.$

5.6. Правило Крамера решения систем линейных уравнений

Если число уравнений равно числу неизвестных $(k = l)$ и определитель матрицы системы отличен от нуля, то система называется *кра-*

меровской. Крамеровская система имеет единственное решение, которое определяется по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, ..., k,$$

где $\Delta = detA$ — определитель матрицы системы, а Δ_i — определитель матрицы, которая получена из A заменой i-го столбца на столбец свободных членов.

Пример. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 30, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 150, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 = 110. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы системы

$$\Delta = det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 10 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

Вычислим определители $\Delta_i, i = 1, 2, 3$, где Δ_i — определитель матрицы, у которой в i-м столбце стоят свободные коэффициенты 30, 150, 110, а остальные столбцы, как у матрицы системы.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 5 & 4 \\ 150 & 3 & 2 \\ 110 & 10 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30 & 5 & 4 \\ 150 & 3 & 2 \\ -10 & -190 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -25 & -17 \\ 0 & -147 & -103 \\ -10 & -10 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= -10 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -25 & -17 \\ -147 & -103 \end{vmatrix} = -10 \cdot (-1)^{1+3} \cdot ((-25) \cdot (-103) -$$

$$-(-147) \cdot (-17)) = 760,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 30 & 4 \\ 1 & 150 & 2 \\ 2 & 110 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -270 & 0 \\ 1 & 150 & 2 \\ 0 & -190 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -270 & 0 \\ -190 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} \cdot (-270) \cdot 5 = 1350,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 30 \\ 1 & 3 & 150 \\ 2 & 10 & 110 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -270 \\ 1 & 3 & 150 \\ 0 & 4 & -190 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -270 \\ 4 & -190 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+2} \cdot ((-1) \cdot (-190) - 4 \cdot (-270)) = -(190 + 1080) = -1270.$$

Находим решение:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-760}{5} = -152, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1350}{5} = 270,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1270}{5} = -254.$$

5.7. Критерии совместимости и неопределенности системы линейных уравнений

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{5.3}$$

Заметим, что система 5.3 и расширенная матрица

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1, \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2, \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k. \end{array} \right)$$

системы 5.3 однозначно определяют друг друга. Причем, элементарным преобразованиям системы 5.3 соответствуют элементарные преобразования строк матрицы B и наоборот.

Теорема 5.5. *(Критерий Гаусса) Система 5.3 совместна тогда и только тогда, когда последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы до вертикальной черты ненулевая. Причем, система 5.3 является определенной, если количество строк этой ступенчатой матрицы равно количеству переменных, и неопределенной,* *если количество строк ступенчатой матрицы меньше количества переменных.*

Доказательство. 1. Необходимость. Покажем, что если система 5.3 совместна, то последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы до вертикальной черты ненулевая. Докажем методом от противного: предположим, что последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы до вертикальной черты нулевая. Получим матрицу

$$B' = \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_1, \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2, \\ \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b'_r. \end{array}\right),$$

где $r \leq k$ и $b'_r \neq 0$ по определению ступенчатой матрицы. Соответствующая ступенчатой матрице B' система имеет вид

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ 0 \cdot x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b'_k. \end{cases} \qquad (5.4)$$

Системы 5.3 и 5.4равносильны, т.к. система 5.4 получены из 5.3 путем элементарных преобразований. Последнее уравнение системы (5.4) не имеет решений, т.к. при любых значениях переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$

из поля $\mathbb{P}$, его левая часть равна 0, а правая — $b'_r \neq 0$. Но если одно уравнение системы 5.4 не имеет решений, то и вся система 5.4 не имеет решений, т.е. система 5.4 несовместна. Следовательно, эквивалентна ей система 5.4 также несовместна, что противоречит условию теоремы. Значит предположение неверное и последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы до вертикальной черты ненулевая.

2. Достаточность. Пусть последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы до вертикальной черты ненулевая. Если в этой матрице первый ненулевой элемент i-ой строки $(i > 1)$ стоит в k-ом столбце $(k > i)$, то переставим i-ый и k-ый столбцы местами. Таким образом перенумеруем переменные x_i и x_k (x_i заменим на x_k b наоборот). В результате ступенчатая матрица примет вид

$$C = \left(\begin{array}{cccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1\{r-1\}} & a'_{1r} & a'_{1\{r+1\}} & \dots & a'_{1n} & b'_1, \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2\{r-1\}} & a'_{2r} & a'_{2\{r+1\}} & \dots & a'_{2n} & b'_2, \\ \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{rr} & a'_{r\{r+1\}} & \dots & a'_{rn} & b'_r, \end{array}\right),$$

где $r \leq m$, $a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, ..., a'_{rr} \neq 0$.

Будем считать, что хотябы в одном из уравнений системы 5.3 коэффициент при x_1 отличен от нуля. Затем последнюю матрицу путем элементарных преобразований приведем к такой ступенчатой матрице, в которой первые отличные от нуля элементы строк равны единице, а все остальные элементы в столбцах выше полученных единиц равны нулю.

Получим матрицу

$$C' = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & c_{1\{r+1\}} & \ldots & c_{1n} & d_1, \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & c_{2\{r+1\}} & \ldots & c_{2n} & d_2, \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & c_{r\{r+1\}} & \ldots & c_{rn} & d_r. \end{array}\right),$$

Последняя матрица определяет систему вида

$$\begin{cases} x_1 + c_{1\{r+1\}}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ x_2 + c_{2\{r+1\}}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots \\ x_r + c_{r\{r+1\}}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n = d_r. \end{cases} \tag{5.5}$$

Возможны два случая.

Случай 1: $r < n$, т.е. количество строк ступенчатой матрицы для расширенной матрицы системы меньше количества переменных. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, при которых находятся первые ненулевые коэффициенты системы 5.5, называются базисными переменными, а остальные — свободными переменными.

Выразив в системе 5.5 базисные переменные через свободные получим систему

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1\{r+1\}}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 - c_{2\{r+1\}}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n, \\ \ldots \\ x_r = d_r - c_{r\{r+1\}}x_{r+1} - \ldots - c_{rn}x_n, \end{cases}$$

равносильную системе 5.5, а значит и системе 5.4 и в конечном результате системе 5.3 (после перенумерования переменных обратно).

Случай 2: $r = n$, т.е. количество строк ступенчатой матрицы для расширенной матрицы равно количеству переменных. В этом случае система 5.5 примет следующий вид

$$\begin{cases} x_1 = d_1, \\ x_2 = d_2, \\ \ldots \\ x_r = d_r. \end{cases}$$

В этом случае система 5.5, а значит и система 5.3, имеет единственное решение.

Вернемся к случаю 1. Здесь

$$\overline{x} = (d_1 - c_{1\{r+1\}}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n, d_2 - c_{2\{r+1\}}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n, \ldots,$$

$$d_r - c_{r\{r+1\}}x_{r+1} - \ldots - c_{rn}x_n, x_{r+1}, \ldots, x_n)$$

называется *общим решение* системы 5.3, а так как свободные переменные могут принимать любые значения из поля $\mathbb{P}$, то в данном случае система 5.3 имеет бесконечное множество решений. Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Теорема 5.6. ***(Критерий Кронекера-Капелли)*** *Система 5.3 совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы равен рангу ее расширенной матрицы. Причем совместная система определена, если ее ранг равен числу переменных данной системы.*

Доказательство. 1. Необходимость. Если система 5.3 совместна, то последняя строка ступенчатой матрицы для расширенной матрицы до вертикальной черты ненулевая, т.е. ступенчатая матрица, полученная из матрицы A системы 5.3, и ступенчатая матрица, полученная из расширенной матрицы B системы 5.3, имеют одинаковое количество строк. т.е. ранг матрицы A системы равен рангу расширенной матрицы B системы $(rangA = rangB)$.

2. Достаточность. Если $rang\ A = rang\ B$, то количество строк их ступенчатых матриц одинаково. Следовательно, последняя строка в ступенчатой матрице до вертикальной черты ненулевая. По критерию Гаусса система 5.3 совместна. Ч.т.д.

Следсвтие 1. Система линейных однородный уравнений совместна и имеет единственное нулевое решение, если ранг матрицы этой системы равен количеству переменных.

Система линейных однородный уравнений совместна и имеет бесконечное множество решений, если ранг этой системы меньше количества переменных.

5.8. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса (или метод последовательного исключения неизвестных), основан на приведении системы линейных уравнений к ступенчатому виду. Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе осуществляется так называемый прямой ход, когда путем элементарных преобразований над строками систему приводят к ступенчатой. Под *элементарными преобразованиями системы линейных уравнений* понимаются следующие преобразования:

1) умножение какого-либо уравнения на ненулевой элемент поля $\mathbb{P}$;

2) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольный элемент поля $\mathbb{P}$.

Заметим, что если в процессе элементарных преобразований получаем уравнение

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots 0x_l = 0,$$

то такое уравнение можно убрать из системы, т.к. ему удовлетворяют все элементы поля $\mathbb{P}$.

Если в процессе элементарных преобразований приходим к уравнению

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots 0x_l = b, b \neq 0,$$

то система с таким уравнением будет несовместной, т.к. ему не удовлетворяет ни один набор элементов поля $\mathbb{P}$.

На втором этапе осуществляется обратный ход метода Гаусса, который заключается в последовательном выражении переменных. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражают соответствующую базисную переменную (первая переменная слева, коэффициент при которой отличен от нуля) и подставляют в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь по «ступенькам» наверх.

Т.к. каждому элементарному преобразованию системы соответсвтует элементарное преобразование расширенной матрицы этой системы, то вместо системы можно оперировать с расширенной матрицей.

Метод Гаусса идеально подходит для решения систем уравнений, у которых матрица системы не является квадратной (чего не скажешь про метод Крамера и матричный метод), т.е. метод Гаусса — наиболее универсальный метод для нахождения решения любой системы линейных уравнений. Он работает в случае, когда система имеет бесконечно много решений или несовместна.

Для иллюстрации метода Гаусса рассмотрим несколько примеров.

Пример Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 8, \\ 9x_1 + 18x_2 + 27x_3 = 2016. \end{cases}$$

Решение. Для решения системы линейных уравнений методом Гаусса запишем расширенную матрицу системы:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 18 & 27 & 2016 \end{array}\right].$$

С помощью элементарных преобразований приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1980 \end{array}\right].$$

Последнее уравнение имеет вид $0 = const$. Поэтому система несовместна и, следовательно, не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 8, \\ 9x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 12. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 12 & 12 \end{array}\right].$$

С помощью элементарных преобразований приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Получим

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Таким образом, начальная система равносильна следующей ступенчатой системе:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Система линейных уравнений совместная и определенная. Единственное решение системы $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 0$.

Ответ: $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 0$.

Пример. Решите систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 8, \\ 9x_1 + 18x_2 + 27x_3 = 36. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 18 & 27 & 36 \end{array}\right].$$

С помощью элементарных преобразований приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду. Получим

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Последнюю строку матрицы можно убрать, т.к. она нулевая:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

Система линейных уравнений совместная и неопределенная. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_2 + 2x_3 = 3, \end{cases}$$

где x_1, x_2 — базисные переменные, x_3 — свободная переменная.

Придадим неизвестной x_3 произвольное значение из поля действительных чисел: $x_3 = \lambda$. Из второго уравнения полученной системы выразим переменную x_2 через x_3: $x_2 = 3-2x_3 = 3-2\lambda$. Подставим полученное выражение для x_2 в первое уравнение системы и выразим переменную x_1 через переменную x_3: $x_1 = 4-2x_2-3x_3 = 4-2(3-2\lambda)-3\lambda = -2+\lambda$.

Т.к. последняя система равносильна исходной, то формулы

$$\begin{cases} x_1 = -2+\lambda, \\ x_2 = 3-2\lambda, \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

при произвольном λ дают нам решения заданной системы.

Ответ: $x_1 = -2+\lambda$, $x_2 = 3-2\lambda$, $x_3 = \lambda$, где λ имеет произвольное действительное значение.

5.9. Пространство решений системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Рассмотрим произвольную систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Запишем данну систему в векторной форм

$$a'_1x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_nx_n = \overline{0},$$

где $a'_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \ldots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ — вектор-столбец матрицы системы ($i = \overline{1, n}$).

Теорема 5.7. *Множество M всех решений системы линейных однородных уравнений над полем $\mathbb{P}$ с n неизвестными является линейным подпространством n-мерного арифметического векторного пространства $\mathbb{P}^n$, причем $dim M = n - r$, где r — ранг матрицы системы.*

Доказательство. **I**. Очевидно, что $M \subset \mathbb{P}^n$. Это следует из определения решения системы линейных однородных уравнений. Решением системы линейных однородных уравнений 5.6 является множество вида

$$M = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\mathbb{P}^n | a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_n\alpha_n\} = \overline{0}.$$

Кроме этого M не является пустым множеством, т.к. $\overline{0} \subset M$.

Воспользуемся критерием линейного подпространства и докажем, что M — линейное подпространство пространства $\mathbb{P}^n$.

1) Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in M$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in M$, т.е. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ являются решениями системы 5.6. Тогда справедливы равенства

$$a'_1\alpha_1 + \ldots + a'_n\alpha_n = \overline{0} \tag{5.7}$$

и

$$a'_1\beta_1 + \ldots + a'_n\beta_n = \overline{0}. \tag{5.8}$$

Сложив равенства 5.7 и 5.8, получим

$$a_1'(\alpha_1 + \beta_1) + ... + a_n'(\alpha_n + \beta_n) = \bar{0}.$$

А это означает, что вектор $(\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ — решение системы 5.6. Следовательно, на M определено сложение.

2) Пусть $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in M$, т.е. $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ является решениями системы 5.6. Тогда справедливы равенство

$$a_1'\alpha_1 + ... + a_n'\alpha_n = \bar{0}. \tag{5.9}$$

Возьмем произвольный скаляр $\gamma \in \mathbb{P}$, домножим на него обе части равенства 5.9 и применим ассоциативный закон. Получим

$$a_1'(\alpha_1\gamma) + ... + a_n'(\alpha_n\gamma) = \bar{0}.$$

Это означает, что вектор $(\alpha_1\gamma, ..., \alpha_n\gamma)$ — решение системы 5.6, т.е. $(\alpha_1\gamma, ..., \alpha_n\gamma) \in M$

Из 1) и 2) следует, что M — линейное подпространство пространства $\mathbb{P}^n$. Т.о. доказано, что сумма любых решений системы 5.6 и произведение любого решения системы 5.6 на произвольный скаляр поля $\mathbb{P}$ также являются решениями системы 5.6.

II. Докажем, что $dim\ M = n - r$, где r — ранг матрицы A системы 5.6.

a) Если $r = 0$, то матрица A — нулевая. Тогда любой вектор из $\mathbb{P}^n$ является решением системы 5.6, т.е. $M = \mathbb{P}^n$. Следовательно, $dim\ M = n$.

b) Если $r = n$, то система 5.6 имеет только нулевое решение и $M = \{\overline{0}\}$. Следовательно, $dimM = 0$ ($\overline{0}$ — в базис не входит).

Т.о. в рассмотренных случаях $dimM = n - r$.

c) Пусть $0 < r < n$. Будем считать, что первые r столбцов $a'_1, a'_2, ..., a'_r$ образуют базис системы ветров-столбцов матрицы A. Тогда выразим через данный базис векторы $a'_{r+1}, a'_{r+2}, ..., a'_n$. Получим

$$\begin{aligned}
&a'_{r+1} = \alpha_{\{r+1\}1}a'_1 + \alpha_{\{r+1\}2}a'_2 + ... + \alpha_{\{r+1\}r}a'_r,\\
&a'_{r+2} = \alpha_{\{r+2\}1}a'_1 + \alpha_{\{r+2\}2}a'_2 + ... + \alpha_{\{r+2\}r}a'_r,\\
&...\\
&a'_n = \alpha_{n1}a'_1 + \alpha_{n2}a'_2 + ... + \alpha_{nr}a'_r.
\end{aligned}$$

Отсюда справедливо записать

$$\begin{aligned}
&-\alpha_{\{r+1\}1}a'_1 - \alpha_{\{r+1\}2}a'_2 - ... - \alpha_{\{r+1\}r}a'_r + 1 \cdot a'_{r+1} + 0 \cdot a'_{r+2} + ... + 0 \cdot a'_n = \overline{0},\\
&-\alpha_{\{r+2\}1}a'_1 - \alpha_{\{r+2\}2}a'_2 - ... - \alpha_{\{r+2\}r}a'_r + 0 \cdot a'_{r+2} + 1 \cdot a'_{r+2} + ... + 0 \cdot a'_n = \overline{0},\\
&...\\
&-\alpha_{n1}a'_1 - \alpha_{n2}a'_2 - ... - \alpha_{nr}a'_r + 0 \cdot a'_{r+1} + 0 \cdot a'_{r+2} + ... + 1 \cdot a'_n = \overline{0}.
\end{aligned}$$

Значит векторы

$$\begin{aligned}
&c_{r+1} = (-\alpha_{\{r+1\}1}, -\alpha_{\{r+1\}2}, ..., -\alpha_{\{r+1\}r}, 1, 0, ..., 0),\\
&c_{r+2} = (-\alpha_{\{r+2\}1}, -\alpha_{\{r+2\}2}, ..., -\alpha_{\{r+2\}r}, 0, 1, ..., 0),\\
&...\\
&c_n = (-\alpha_{n1}, -\alpha_{n2}, ..., -\alpha_{nr}, 0, 0, ..., 1).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

являются решениями системы 5.6. Система 5.10 линейно независима. Действительно, для скаляров $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, ..., \lambda_n \in \mathbb{P}$ из равенства

$$\lambda r + 1 c_{r+1} + \lambda_{r+2} c_{r+2} + ... + \lambda_n c_n = \overline{0}$$

следует равенство

$$(...., \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, ..., \lambda_n) = (0, 0, ...0).$$

Следовательно, $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = ... = \lambda_n = 0$.

Пусть вектор $b = (\beta_1, ..., \beta_r, \beta_{r+1}, ..., \beta_n)$ — любой вектор из множества M. Составим вектор

$$d = \sum_{i=r+1}^{n} \beta_i c_i = (\gamma_1, ..., \gamma_r, \beta_{r+1}, ..., \beta_n).$$

Так как M — подпространство и $c_i \in M$, то и вектор $d \in M$. Значит и вектор $b-d \in M$. Тогда вектор $b-d = (\beta_1-\gamma_1, ..., \beta_r-\gamma_r, 0, 0, ..., 0) \in M$. Следовательно,

$$(\beta_1 - \gamma_1)a'_1 + ... + (\beta_r - \gamma_r)a'_r + 0 \cdot a'_{r+1} + ... + 0 \cdot a'_n) = \overline{0}.$$

Отсюда справедливо записать

$$(\beta_1 - \gamma_1)a'_1 + ... + (\beta_r - \gamma_r)a'_r = \overline{0}.$$

Т.к. система векторов $(a'_1, ..., a'_r)$ — линейно независима, то $\beta_1 = \gamma_1), ..., \beta_r = \gamma_r$. Отсюда следует, что вектор b совпадает с вектором d, т.е. $b = d =$

$\sum_{i=r+1}^{n}\beta_i c_i$. Т.е. получили, что любой вектор из M линейно выражается через систему 5.10. Значит система 5.10 является базисом M. Поэтому, $dim M = n - r$. Ч.т.д.

Определение 5.7. Подмножество M называется *пространством решений системы линейных однородных уравнений* 5.6, а базис этого пространства называется *фундаментальной системой решений* системы линейных однородных уравнений 5.6.

Замечание. Если $rang\ A = n$, то фундаментальной системы решений не существует.

Следствие. Если $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ — фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений 5.6, то вектор $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_{n-r} c_{n-r}$, где $\lambda_i \in \mathbb{P}$, $i = \overline{1, n-r}$ является общим решением системы 5.6.

Теорема 5.8. *Каждое подпространство L пространства $\mathbb{P}^n$ есть множество решений некоторой системы линейных однородных уравнений над полем $\mathbb{P}$ с n неизвестными.*

Пример. Найти фундаментальную систему решений и записать пространство решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг матрицы системы

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1&1&2\\2&-1&2&-1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&-1&1&2\\0&-3&4&-3&-3\end{bmatrix}.$$

Следовательно, $rang\ A=2$. Поэтому $dim\ M=n-r=5-2=3$. Значит искомый базис $B(M)=(u_1,u_2,u_3)$.

Переменные x_1 и x_2 являются базисными, а x_3,x_4,x_5 — свободными. Выразим базисные переменные через свободные. Получим

$$\begin{cases}x_1=-\frac{1}{3}x_3-x_5,\\x_2=43x_3-x_4-x_5,\end{cases}$$

где $x_3,x_4,x_5\in\mathbb{R}$.

Найдем общее решение $\overline{x}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-\frac{1}{3}x_3-x_5;\frac{4}{3}-x_4-x_5;x_3;x_4;x_5)=x_3(u_1)+x_4(u_2)+x_5(u_3)=x_3(-\frac{1}{3};\frac{4}{3};1;0;0)+x_4(0;-1;0;1;0)+x_5(-1;-1;0;0;1)$. Итак

$$\begin{aligned}u_1&=(-\tfrac{1}{3};\tfrac{4}{3};1;0;0),\\u_2&=(0;-1;0;1;0),\quad -\\u_3&=(-1;-1;0;0;1)\end{aligned}$$

фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений.

В состав базиса M вместо вектора u_1 можно ввести вектор $u_1'=3u_1=(-1;4;3;0;0)$. Таким образом u_1',u_2,u_3 — фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений (базис подпространства M).

Таким образом M можно рассматривать как линейную оболочку с порождающей системой u_1', u_2, u_3: $M = \{\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 | \alpha_i \in \mathbb{R}\} = \{(-\alpha_1, -\alpha_2, 4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^5\}$ — пространство решений системы линейных однородных уравнений.

Определение 5.8. Пусть U — линейное подпространство векторного пространства L над полем $\mathbb{P}$, a — фиксированный вектор из пространства L. Множество векторов $a+u$, где u — любой вектор подпространства U называется *линейным (векторным) многообразием* пространства L, полученным сдвигом подпространства U на фиксированный вектор a и обозначается $a + U$. Таким образом

$$a + U = \{a + u | u \in U, a \in L$$

Замечание. Само подпространство U тоже является линейным многообразием пространства L (если вектор a является нулевым вектором).

Размерность линейного многообразия $a+U$ равна размерности самого подпространства U, т.е. $dim(a + U) = dimU$.

Теорема 5.9. *Множество Γ всех решений системы линейных уравнений с n переменными является линейным многообразием пространства $\mathbb{P}^n$, полученного сдвигом подпространства решений M, соответствующей системы однородных уравнений на фиксированный вектор x_0, где x_0 — частное решение системы линейных уравнений, т.е. $\Gamma = x_0 + M$.*

Доказательство. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5.11}$$

Запишем систему 5.11 в матричной форме

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & .. & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{5.12}$$

или $A \cdot X = B$. тогда в матричной форме система однородных уравнений, соответствующая системе 5.11, будет записана следующим образом: $A \cdot x = 0$.

Т.к. $\Gamma = x_0 + M$ — равенство двух множеств, то для доказательства этого используем критерий равенства двух множеств, т.е. $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subseteq M_2$ и $M_2 \subseteq M_1$

1) Для любого $y \in \Gamma$ следует, что $Ay = B$, т.к. y — решение 5.12. С другой стороны x_0 — это частное решение 5.12. Поэтому справедливо $Ax_0 = B$. Вычитая из первого равенства второе получим, что $Ay - Ax_0 = 0$, т.е. $A(y - x_0) = 0$. Из последнего равенства следует, что $y - x_0 = m \in M$. Следовательно, $y = x_0 + m \in x_0 + M$. В силу произвольности выбора $y \in \Gamma$ получаем, что $\Gamma \subseteq x_0 + M$.

2) Рассмотрим произвольное $y = x_0 + m \in x_0 + M$. Тогда $A(x_0 + m) = Ax_0 + Am$. Т.к. x_0 — частное решение системы линейных уравнений, m — решение системы линейных однородных уравнений, т.е. $Am = 0$, то $= Ax_0 + Am = B$. Следовательно, $x_0 + m$ — решение уравнения 5.12, а следовательно и системы 5.11. Поэтому $y \in \Gamma$. Получаем, что $x_0 + M \subseteq \Gamma$.

Таким образом из 1) и 2) следует, что $x_0 + M = \Gamma$. Ч.т.д.

Пример. Найти многообразие системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. Очевидно, что $x_0 = (1, 0, 0, 0)$ — частное решение данной системы.

Найдем подпространство M решений соответствующей системы линейных однородных уравнений.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $rang\ A = 2 < 4 = n$. Значит $dim\ M = n - r = 4 - 2 = 2$.

Переменные x_1, x_2 являются базисными, а переменные x_3, x_4 — свободными. Выражаем базисные переменные через свободные. Получим

$$\begin{cases} x_2 = \frac{x_3}{2}, \\ x_1 = -\frac{x_3}{2} + x_4. \end{cases}$$

Вектор общего решения данной системы линейных однородных уравнений

$$\left(-\frac{x_3}{2}+x_4;\frac{x_3}{2};x_3;x_4\right)=x_3\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;0\right)+x_4(1;0;01).$$

Следовательно, $u_1 = (\frac{1}{2};\frac{1}{2};1;0)$ и $u_2 = (1;0;01)$ — фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений.

Заменим u_1 на $_1 = 2u_1 = (-1;1;2;0)$. Тогда $M = \{\alpha_1 u_1' + \alpha_2 u_2 | \alpha_i \in \mathbb{R}\} = \{(-\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1;2\alpha_1;\alpha_2) \in \mathbb{R}^4\}$.

Следовательно, $\Gamma = (1;0;0;0) + \{(-\alpha_1+\alpha_2;\alpha_1;2\alpha_1;\alpha_2) \in \mathbb{R}^4\} = \{(-\alpha_1+\alpha_2+1;\alpha_1;2\alpha_1;\alpha_2) \in \mathbb{R}^4\}$.

5.10. Практическая часть

5.10.1 Практическое занятие по теме «Ранг матрицы и размерность линейной оболочки ее столбцов. Элементарные преобразования над матрицами. Матричные уравнения. Критерий совместности. Системы крамеровского типа»

1. Исследовать системы линейных уравнений на совместность:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = 0, \\ 5x_1 + 3x_3 = 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 8; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 - 18x_3 + 11x_4 = -13, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$

2. Решить СЛУ по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 15, \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 = 5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2, \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2, \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13, \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19; \end{cases}$

8) $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -15, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 1x_3 = -6, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 11. \end{cases}$

5.10.2 Практическое занятие по теме «Теорема о базисном миноре. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений»

1. Исследовать системы линейных уравнений, для совместных систем найти общее и одно частное решение:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 - x_2 = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 12x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_4 = -1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 5, \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -3, \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 = -4, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 = -1, \\ 5x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 3, \\ 9x_1 + 2x_2 + 34x_3 + 23x_4 = 3, \\ 7x_1 + 4x_2 + 26x_3 + 20x_4 = 4; \end{cases}$

9) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n, \\ 2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_n = 2n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nx_1 + nx_2 + \ldots + nx_n = n^2; \end{cases}$$

10) $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n, \\ 2x_1 + 2x_2 + \ldots + 2x_n = 2n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1)x_1 + (n-1)x_2 + \ldots + (n+1)x_n = (n-1)n, \\ nx_1 + nx_2 + \ldots + nx_n = 0; \end{cases}$$

11) $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4, \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = 9; \end{cases}$$

12) $$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^2. \end{cases}$$

5.10.3 Практическое занятие по теме «Базис и размерность пространства решений однородной системы. Фундаментальная система решений»

1. Найти общее решение и фундаментальную систему решений СЛОУ:

1) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_4 = 0; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0, \\ 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ -9x_1 - 4x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$

8) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -5x_1 + 11x_2 + 8x_3 - 6x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$

ТЕМА 6
Линейные операторы

6.1. Понятие линейного оператора. Примеры. Образ, ядро и матрица линейного оператора

Хорошо известно, что отображение множества можно задать указав образы каждого элемента множества. Поэтому линейный оператор φ пространства L_n над полем $\mathbb{P}$ можно задать образом $\varphi(x)$ любого вектора $x \in L_n$. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ (u) базис пространства L_n. Тогда $x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Отсюда $\varphi(x) = \alpha_1 \varphi(u_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(u_n)$. Таким образом, $\varphi(x)$ задается образами базисных векторов, которые содержатся в L_n, а значит, тоже выражаются через базис L_n, то есть

$$\varphi(u_i) = [u_1, \ldots, u_n] \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \ldots \\ \alpha_{ni} \end{bmatrix}.$$

Тогда:

$$[\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)] = [u_1, \ldots, u_n] \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Обозначим матрицу $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ через $M^{\varphi}_{(u)}$.

Определение 6.1. Матрица $M^{\varphi}_{(u)}$ n - го порядка над полем $\mathbb{P}$, i-ый столбец которой есть координатный столбец вектора $\varphi(u_i)$ в базисе (u) называется **матрицей линейного оператора** φ **в базисе** (u).

Таким образом матрица $M^{\varphi}_{(u)}$ задает линейный оператор φ.

Образ и ядро линейного оператора.

Определение 6.2. Множество образов всех векторов пространства L_n, на которое действует линейный оператор φ, называется **образом линейного оператора** φ и обозначается Im φ, то есть

$$\mathrm{Im}\ \varphi = \{\varphi(x) | x \in L_n\}.$$

Теорема 6.1. Im φ является подпространством пространства L_n.

Определение 6.3. Размерность образа линейного оператора φ называется **рангом линейного оператора** φ и обозначается rang φ.

Легко показать, что rang φ =rang $M^{\varphi}_{(u)}$.

Определение 6.4. Множество векторов пространства L_n, которые линейным оператором φ переводятся в нулевой вектор пространства L_n, называется **ядром оператора** φ и обозначается $\mathrm{Ker}\ \varphi$.

Теорема 6.2. $\mathrm{Ker}\ \varphi$ является подпространством пространства L_n.

Определение 6.5. Размерность ядра оператора φ называется **дефектом** и обозначается $\mathrm{def}\ \varphi$.

Теорема 6.3. $\mathrm{rang}\ \varphi + \mathrm{def}\ \varphi = n = \dim\ L_n$

Связь между координатными столбцами векторов x и $\varphi(x)$

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ (u) – произвольный базис пространства L_n, на которое действует линейный оператор φ,

$\begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ — координатный столбец вектора x в базисе (u),

$\begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$ — координатный столбец вектора $\varphi(x)$ в базисе (u).

Тогда:

$$x = [u_1, \ldots, u_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ и } \varphi(x) = [\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

$$\text{Кроме того } \varphi(x) = [u_1, \ldots, u_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Так как

$$[\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)] = [u_1, \ldots, u_n]\ M^{\varphi}_{(u)},$$

то

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} = M^{\varphi}_{(u)} \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{6.1}$$

Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ (u) и $v_1, \ldots, v_n$ (v) – базисы пространства L_n над полем $\mathbb{P}$, T – матрица перехода от базиса (u) к базису (v), то есть

$$[v_1, \ldots, v_n] = [u_1, \ldots, u_n]\, T, \tag{6.2}$$

$M^{\varphi}_{(u)}$, $M^{\varphi}_{(v)}$ – матрицы линейного оператора φ в базисе (u) и (v), соответственно. Тогда справедливы следующие соотношения

$$[\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)] = [u_1, \ldots, u_n]\, M^{\varphi}_{(u)} \tag{6.3}$$

$$\left[\varphi(v_1),\ldots,\varphi(v_n)\right] = \left[v_1,\ldots,v_n\right] M^{\varphi}_{(v)} \tag{6.4}$$

Из (6.2) следует, что

$$\left[\varphi(v_1),\ldots,\varphi(v_n)\right] = \left[\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_n)\right] T, \tag{6.5}$$

Подставим (6.3) и (6.4) в (6.5). Получим

$$\left[v_1,\ldots,v_n\right] M^{\varphi}_{(v)} = \left[u_1,\ldots,u_n\right] M^{\varphi}_{(u)} T \tag{6.6}$$

Подставим (6.2) в (6.6). Получим:

$$\left[u_1,\ldots,u_n\right]\, M^{\varphi}_{(v)} T = \left[u_1,\ldots,u_n\right]\, M^{\varphi}_{(u)} T.$$

Следовательно $M^{\varphi}_{(v)} = T^{-1}\, M^{\varphi}_{(u)} T$.

Определение 6.6. Матрицы A и B n-го порядка над полем $\mathbb{P}$ называются **подобными**, если найдется невырожденная матрица T n-го порядка такая, что $B = T^{-1}AT$.

Следствие 6.1. Матрицы линейного оператора в различных базисах подобны.

6.2. Действия над линейными операторами

Пусть L_n – линейное пространство над полем $\mathbb{P}$, f_1 и f_2 – линейные операторы пространства L_n.

Определение 6.7. **Суммой линейных операторов f_1 и f_2 называется такой оператор $f_1 + f_2$, что $\forall x \in L_n$ $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.**

Определение 6.8. **Произведением линейного оператора f на скаляр λ** называется оператор λf такой, что $\forall x \in L_n$ $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Соответствующие операции называются сложением линейных операторов и умножением линейного оператора на скаляр. Кроме того, $f_1 + f_2$ и λf также линейные операторы пространства L_n над $\mathbb{P}$.

Утверждение 6.1. Множество $V(L_n)$ линейных операторов пространства L_n над полем $\mathbb{P}$ относительно введенных операций является линейным пространством над полем $\mathbb{P}$.

Утверждение 6.2. 1) $M_{(u)}^{f_1+f_2} = M_{(u)}^{f_1} + M_{(u)}^{f_2}$.
2) $M_{(u)}^{\lambda f_1} = \lambda M_{(u)}^{f_1}$.

Определение 6.9. **Произведением линейных операторов f_1** и f_2 называется оператор $f_2 f_1$ такой, что $\forall x \in L_n$ $(f_2 f_1)(x) = f_2(f_1(x))$.

Кафедра АГ и ММ

Утверждение 6.3. 1) Оператор $f_2 f_1$ является линейным.
2) $M_{(u)}^{f_2 f_1} = M_{(u)}^{f_2} M_{(u)}^{f_1}$.

Свойства действий над линейными операторами

1) $\varphi_1\varphi_2 \neq \varphi_2\varphi_1$ (Умножение операторов некоммутативно);
2) $(\varphi_1\varphi_2)\varphi_3 = \varphi_1(\varphi_2\varphi_3)$;
3) $\lambda(\varphi_1\varphi_2) = (\lambda\varphi_1)\varphi_2$;
4) $(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_3 = \varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3$;
5) $\varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3) = \varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3$ $(\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in L_n)$.

Свойства (2) дает возможность ввести понятие степени линейного оператора следующим образом: $\varphi^n = \underbrace{\varphi \cdot \varphi \cdot \cdots \cdot \varphi}_{n} = \varphi^{n-1} \cdot \varphi = \varphi \cdot \varphi^{n-1}$.

$\varphi^0 = \varepsilon$ – тождественный оператор.
$\varphi^1 = \varphi$.

Пусть f – линейный оператор пространства L_n и f – биекция. Тогда существует обратимый оператор f^{-1} пространства L_n такой, что $\forall y = f(x) \in L_n$

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

Причем f^{-1} тоже линейный оператор.

Утверждение 6.4. Если f – обратимый оператор пространства L_n, то:
1) $\mathrm{Im}\ f = L_n$;
2) $\mathrm{rang}\ f = \dim\ L_n = n$;
3) $\mathrm{def}\ f = n - \mathrm{rang}\ f = 0$;
4) $\mathrm{Ker}\ f = \{0\}$;
5) $M_{(u)}^{f^{-1}}$ – невырожденная матрица, причем $M_{(u)}^{f^{-1}} = (M_{(u)}^{f})^{-1}$.

Определение 6.10. Если на линейном пространстве L над полем $\mathbb{P}$ определена единица и операция умножения векторов, которая является ассоциативной и дистрибутивной относительно сложения, то L называется **линейной алгеброй** над полем $\mathbb{P}$.

Пример 6.1. Множество квадратных матриц и многочленов над заданным полем $\mathbb{P}$ являются примерами линейных алгебр. Множество $V(L_n)$ линейных операторов пространства L_n над полем $\mathbb{P}$ является линейной алгеброй над полем $\mathbb{P}$.

Определение 6.11. Две линейных алгебры L и L' над полем $\mathbb{P}$ называются **изоморфными**, если существует биективное отображение f пространства L на пространство L', удовлетворяющее следующим условиям:
1) $\forall a, b \in L\ f(a+b) = f(a) + f(b),\ f(ab) = f(a)f(b)$;
2) $\forall a \in L\ \forall \alpha \in \mathbb{P}\ f(\alpha a) = \alpha f(a)$.

6.3. Собственные вектора и собственные значения линейного оператора. Характеристическое уравнение линейного оператора

Пусть φ — линейный оператор линейного пространства L_n над полем $\mathbb{P}$.

Определение 6.12. Ненулевой вектор x пространства L_n над полем $\mathbb{P}$, называется **собственным вектором** линейного оператора φ, если $\exists \lambda \in \mathbb{P}$ такой, что $\varphi(x) = \lambda x$. Скаляр λ называется **собственным значением** линейного оператора φ, соответствующим собственному вектору x.

Замечание 6.1. 1. Всякому собственному вектору соответствует единственное собственное значение.

2. Всякому собственному значению линейного оператора φ соответствует хотя бы один собственный вектор.

Доказательство. 1. Доказать самостоятельно.

2. Пусть λ_0 — собственное значение оператора φ. Покажем, что всякий вектор вида αx, $\alpha \neq 0$ является собственным вектором оператора φ, где x — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_0. Тогда $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha(\lambda_0(x)) = (\alpha\lambda_0)x = \lambda_0(\alpha x)$. $\square$

Пусть линейный оператор φ пространства L_n над полем $\mathbb{P}$ задан матрицей $M_{(u)}^{\varphi}$ в некотором базисе (u): $M_u^{(\varphi)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$.

Пусть $x = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n$ – собственный вектор линейного оператора φ, соответствующий собственному значению λ_0.

Тогда $\varphi(x) = \lambda_0 x = (\lambda_0\beta_1)u_1 + (\lambda_0\beta_2)u_2 + \dots + (\lambda_0\beta_n)u_n$.

Значит, $\begin{bmatrix} \lambda_0\beta_1 \\ \dots \\ \lambda_0\beta_n \end{bmatrix} = \lambda_0 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ – координатный столбец вектора $\varphi(x)$ в базисе (u). Кроме того, $\lambda_0 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} = M_{(u)}^{\varphi} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}$. Поэтому

$$(M_{(u)}^{\varphi} - \lambda_0 E_n) \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \qquad (6.1)$$

где E_n – единичная матрица порядка n, $[0]$ – нулевая матрица размера $n \times 1$. Перепишем (6.1) в следующем виде:

$$\begin{cases} (\alpha_{11}-\lambda_0)\beta_1+\dots+\dots+\alpha_{1n}\beta_n=0,\\ \alpha_{21}\beta_1+(\alpha_{22}-\lambda_0)\beta_2+\dots+\alpha_{2n}\beta_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{n1}\beta_1+\dots+\dots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)\beta_n=0. \end{cases}$$

Очевидно, что собственный вектор x является ненулевым решением системы n однородных линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} (\alpha_{11}-\lambda_0)x_1+\dots+\dots+\alpha_{1n}x_n=0,\\ \alpha_{21}x_1+(\alpha_{22}-\lambda_0)x_2+\dots+\alpha_{2n}x_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{n1}x_1+\dots+\dots+(\alpha_{nn}-\lambda_0)x_n=0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Система (6.2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda_0 & \dots & \alpha_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda_0 \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \left|M_{(u)}^{\varphi}-\lambda_0E\right|=0.$$

Поэтому λ_0 – корень алгебраического уравнения n - ой степени с неизвестной λ:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \dots & \alpha_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \text{ или } \left|M_{(u)}^{\varphi}-\lambda E\right|=0. \tag{6.3}$$

Определение 6.13. Уравнение (6.3) называется **характеристическим уравнением** линейного оператора φ, а многочлен $\left|M_{(u)}^{(\varphi)} - \lambda E\right|$ называется **характеристическим многочленом** линейного оператора φ.

Всякий корень уравнения (6.3), который принадлежит полю $\mathbb{P}$, является соответственным значением линейного оператора φ.

Замечание 6.2. Характеристическое уравнение матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Рассмотрим множество $L(\lambda_0) = \{x \in L_n | \varphi(x) = \lambda_0 x\}$ – множество всех собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_0, вместе с нулевым вектором из L_n. Очевидно, что $L(\lambda_0)$ – векторное подпространство пространства L_n.

Справедливы следующие условия:

1) $\forall x, y \in L(\lambda_0)\ x + y \in L(\lambda_0)$.

$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \lambda_0 x + \lambda_0 y = \lambda_0(x + y)$.

2) $\forall x \in L(\lambda_0),\ \alpha \in \mathbb{P}\ \alpha x \in L(\lambda_0)$.

$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha\lambda_0 x = \lambda_0(\alpha x)$.

Определение 6.14. Подпространство $L(\lambda_0)$ называется **собственным подпространством**, соответствующим собственному значению λ_0.

Определение 6.15. Говорят, что α_0 является k - кратным корнем многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x-\alpha_0)^k$, но не делится на $(x-\alpha_0)^{k+1}$.

Пример 6.2. Линейный оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан в базисе (e) матрицей $M_{(e)}^{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Найдите собственные значения, собственные вектора им соответствующие для данного оператора φ.

Решение.

Решим характеристическое уравнение $\left|M_{(e)}^{\varphi} - \lambda E\right| = 0.$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda(\lambda-4)+4) = 0;$

$(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda) = 0.$

$\lambda_0 = 2$ — 3-кратный корень характеристического уравнения.

Составим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

где x_3 любое. Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

По полученной ступенчатой матрице составим и решим систему линейных уравнений, равносильную данной:

$-2x_1 + x_2 = 0$, x_1, x_3 – свободные неизвестные.

Кроме того, $\dim L(2) = 3 - \operatorname{rang} A = 2$.

Таким образом, $x_2 = 2x_1$ и $\{(x_1, 2x_1, x_3), x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$ — множество всех собственных векторов, соответствующих $\lambda_0 = 2$.

6.4. Практическая часть

6.4.1 Практическое занятие по теме «Понятие линейного оператора. Образ и ядро линейного оператора. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Операции над линейными операторами»

1. Указать, какие из следующих преобразований пространства K^3 являются линейными:

1) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2, 3x_3)$;
2) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$;
3) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, x_1 + x_2)$;
4) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2, x_3)$.

2. Определить, какие из следующих преобразований пространства T линейны:

1) $Af(x) = f(-x)$;
2) $Af(x) = f(1 - x)$;
3) $Af(x) = xf(x)$;
4) $Af(x) = f(1 - x) + f(x)$;
5) $Df(x) = f'(x)$;
6) $Af(x) = \int_0^x f(t)dt$.

3. Найти образ и ядро линейных операторов A и D в пространстве T_n :

1) $A(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1}$;

2) $D-$ оператор дифференцирования.

3. Найти матрицы линейных операторов:

1) $Ax = [a, x]$;

2) $Ax = (a, x)a$;

3) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2, 3x_3)$;

4) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$;

5) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, x_1 + x_2)$.

4. Пусть $e_1, e_2, e_3, e_4 (e)-$ базис линейного пространства L, $A_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} -$ матрица линейного оператора A в базисе (e). Найти матрицу оператора A в базисе (f) :

1) $f_1 = e_1$;

$f_2 = e_1 + e_2$;

$f_3 = e_1 + e_2 + e_3$;

$f_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$;

2) $f_1 = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4$;

$f_2 = 3e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4$;

$f_3 = 4e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4;$
$f_4 = 5e_1 + 4e_2 + 3e_3 + 2e_4;$
3) $f_1 = 2e_1 - e_2 - 2e_3 + 3e_4;$
$f_2 = 3e_1 - e_2 - 2e_3 + 2e_4;$
$f_3 = 2e_1 - 2e_3 + 2e_4;$
$f_4 = 2e_1 - e_2 - e_3 + 2e_4;$
4) $f_1 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 5e_4;$
$f_2 = 3e_1 + 3e_2 + 4e_3 + 5e_4;$
$f_3 = 4e_1 + 4e_2 + 3e_3 + 5e_4;$
$f_4 = 5e_1 + 5e_2 + 5e_3 + 5e_4.$

6.4.2 Практическое занятие по теме «Обратный оператор. Изоморфизм линейных пространств. Собственные значения и собственные векторы. Присоединенные векторы»

1. Найти $A^{-1}x$, если в некотором базисе e_1, e_2, e_3 заданы произвольный вектор $x = (a_1, a_2, a_3)$ и его образ:
1) $Ax = (2a_1 - a_2 + a_3, a_1 - a_3, 3a_1 - a_2 + a_3);$
2) $Ax = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3);$
3) $Ax = (a_1 - a_2, 2a_1 + a_2, a_1 + a_3).$

2.Доказать, что поле C, рассматриваемое как векторное пространство над полем R, изоморфно пространству R^2.

3. Доказать, что если каждому многочлену $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ из T_n- пространства многочленов степени $\leq n$ сопоставить вектор $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$, то полученное отображение будет изоморфизмом T_n на R^{n+1}.

4. Пусть $\varphi : L \to L'-$ изоморфизм линейных пространств. Доказать, что система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из L :

1) линейно-зависима тогда и только тогда, когда линейно-зависима система их образов $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$;

2) линейно-независима тогда и только тогда, когда линейно-независима система их образов $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$;

3)является максимально линейно-независимой тогда и только тогда, когда максимально линейно-независимой является система их образов.

5. Линейный оператор A в некотором базисе задан матрицей $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Существует ли базис из собственных векторов линейного оператора A?

6. В пространстве R^3 найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A, заданного матрицей:

1) $\begin{bmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Найти собственные значения исобственные векторы линейного оператора A :

1) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2, 3x_3)$;

2) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$;

3) $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 0, x_1 + x_2)$.

6.4.3 Практическое занятие по теме «Приведение квадратной матрицы к диагональному виду. Канонический вид линейных операторов. Жорданова нормальная форма матрицы»

1. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора A, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Можно ли привести матрицу A к диагональному виду?

2. Найти матрицу T, которая приводит матрицу $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ к диагональному виду. Найти матрицу $B = T^{-1}AT$.

3. Привести к диагональному виду симметрическую матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Найти жорданову форму матрицы:

1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix}$;

3) $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$;

4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

5) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 & -6 \\ -1 & 3 & 11 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

6) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 & -7 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

7) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;

8) $A = \begin{bmatrix} -7 & -4 & -4 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 6 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 5 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

ТЕМА 7
Билинейные и квадратичные формы

7.1. Билинейные формы

Определение 7.1. Многочлен

$$F(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) \tag{7.1}$$

от двух систем переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ называется *билинейной формой порядка* n, если каждое его слагаемое имеет первую степень относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и переменных $y_1, y_2, ..., y_n$ в отдельности.

Краткая запись билинейной формы 7.1: $F(x; y)$.

Итак, билинейная форма $F(x; \,)$ над полем от систем переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ имеет вид

$$F(x; y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \;\; aij \in P. \tag{7.2}$$

Определение 7.2. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ ...a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей билинейной формы* 7.2, а ранг этой матрицы — рангом формы 7.2.

Легко проверить, перемножив соответствующие матрицы, что $F(x;y) = X^TAY$, где X и Y — столбцы, составленные из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ соответственно.

Пусть $G(u,v)$ — еще одна билинейная форма порядка n. Если она может быть получена из формы 7.2 в результате применения к каждой из систем переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$ одного и того же невырожденного линейного преобразования над основным полем, то форма $G(u,v)$ называется эквивалентной форме $F(x;)$.

Пример. Билинейная форма

$$G(u_1,u_2;v_1,v_2) = u_1v_1 + 4u_2v_2$$

эквивалентна билинейной форме

$$F(x_1,x_2;y_1,y_2) = x_1y_1 + x_2y_2 \tag{7.3}$$

над полем Q, ибо, положив в равенстве 7.3

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 & y_1 &= v_1 \\ x_2 &= 2u_2, & y_2 &= 2v_2, \end{aligned}$$

получим $F(x;y) = G(u;v)$.

Очевидны следующие **утверждения**.

1. Каждая билинейная форма эквивалентна сама себе.

2. Если билинейная форма $F(x;y)$ эквивалентна билинейной форме $G(u;v)$, то и $G(u;v)$ эквивалентна $F(x;y)$.

3. Две билинейные формы, эквивалентные третьей, эквивалентны друг другу.

Следовательно, эквивалентность билинейных форм есть отношение эквивалентности на множестве всех билинейных форм порядка n над полем .

Рассмотрим, как связаны матрицы билинейных форм, эквивалентных друг другу.

Теорема 7.1. *Билинейные формы порядка n с матрицами и эквивалентны, если и только если над основным полем существует такая невырожденная матрица C порядка n, что $B = C^T AC$.*

Определение 7.3. Билинейная форма называется *симметрической*, если ее матрица A — симметрическая, т. е. $A^T = A$.

Утверждение. Если билинейная форма F является симметрической, то и всякая эквивалентная ей билинейная форма также симметрическая.

Определение 7.4. Симметрическая билинейная форма называется *канонической*, если ее матрица диагональна. *Каноническим видом* симметрической билинейной формы называется любая эквивалентная ей каноническая форма.

Всякая симметрическая билинейная форма эквивалентна над основным полем некоторой канонической билинейной форме.

Определение 7.5. Канонический вид симметрической билинейной формы над полем C называется *нормальным*, если все его ненулевые коэффициенты равны 1. Канонический вид симметрической билинейной формы над полем R называется *нормальным*, если каждый его ненулевой коэффициент равен 1 или -1.

Утверждение. Всякая симметрическая билинейная форма над $C(R)$ с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к нормальному виду. Число ненулевых коэффициентов в нормальном виде симметрической билинейной формы над C, а также число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде симметрической билинейной формы над R не зависят от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, приводящего эту форму к нормальному виду.

Определение 7.6. Симметрическая билинейная форма над R называется *положительно-определенной*, если положительно- определенна полярная ей квадратичная форма.

Утверждение. Нормальным видом положительно-определенной симметрической билинейной формы порядка n является

$$F(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n) = x_1y_1 + ... + x_ny_n.$$

7.2. Квадратичные формы

В дальнейшем будем рассматривать поле P, характеристика которого не равна 2.

Определение 7.7. *Квадратичной формой* от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ над полем P называется многочлен от этих переменных с коэффициентами из поля P, каждое слагаемое которого имеет вторую степень. Каждая квадратичная форма может быть записана в следующем симметричном виде:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{12}x_1x_n +$$
$$a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ...$$

$$... + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2, \tag{7.4}$$

где коэффициенты $a_{ij} \in P$ удовлетворяют условию:

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{7.5}$$

Если в первоначальной записи квадратичной формы коэффициенты при x_ix_j и x_jx_i различны, то можно сложить их и, разделив сумму на 2, получить равные.

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов квадратичной формы $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, записанной в симметричном виде 7.4, называется *матрицей квадратичной формы* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Ранг матрицы A

называется *рангом квадратичной формы* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Из условия 7.5 следует, что матрица квадратичной формы является симметрической матрицей.

Квадратичную форму удобно записывать в матричной форме. Для этого введем в рассмотрение строку переменных $X = (x_1 x_2 ... x_n)$. Тогда $f(x_1, x_2, ..., x_n) = XAX^T$, где A — матрица квадратичной формы $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Напомним, что X^T — транспонированная матрица по отношению к матрице X.

Линейным преобразованием переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ *над полем* P называется переход от них к переменным $y_1, y_2, ..., y_n$ по формулам

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + ... + \alpha_{1n}y_n \\
x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + ... + \alpha_{2n}y_n \\
...x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + ... + \alpha_{nn}y_n
\end{aligned} \qquad (7.6)$$

где $\alpha_{ij} \in P$. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *матрицей линейного преобразования* 7.6. Линейное преобразование с невырожденной матрицей называется *невырожденным*.

Если $X = (x_1 x_2 ... x_n)$, $Y = (y_1 y_2 ... y_n)$, то система равенств 7.6 в матричной форме принимает вид: $X^T = AY^T$. Если ?? — невырожденное линейное преобразование переменных, тот можно выразить переменные $y_1, y_2, ..., y_n$ через переменные $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$Y^T = A^{-1}X^T. \qquad (7.7)$$

Линейное преобразование 7.7 переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называется *обратным* к преобразованию 7.6.

Под *произведением* двух линейных преобразований переменных понимается их последовательное выполнение. Матрица произведения линейных преобразований переменных равна произведению матриц этих преобразований.

Определение 7.8. Квадратичная форма называется *канонической*, если она не содержит произведений различных переменных. *Каноническим видом* квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ называется любая каноническая квадратичная форма $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, в которую превращается форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в результате применения к входящим в неё переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ невырожденного линейного преобразования.

Теорема 7.2. *Всякую квадратичную форму над полем P можно с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования её переменных привести к каноническому виду.*

Теорема 7.3. *Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы над полем P не зависит от способа приведения квадратичной формы к этому виду и равно рангу квадратичной формы.*

Теорема 7.3 позволяет ввести следующее определение. Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется *индексом инерции* этой квадратичной формы.

Одним из наиболее простых способов приведения квадратичной формы к каноническому виду является так называемый метод Лагранжа. Он подробно описан в учебниках по линейной алгебре. В следующей теореме предлагается другой способ приведения действительной квадратичной формы к каноническому виду.

Теорема 7.4. *Для любой действительной квадратичной формы* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *существует линейное преобразование переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *с ортогональной матрицей, приводящее эту форму к каноническому виду. При этом коэффициентами при квадратах переменных будут корни характеристического многочлена матрицы квадратичной формы* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Нормальным видом комплексной квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется такой её канонический вид, в котором все ненулевые коэффициенты равны 1.

Теорема 7.5. *Всякая комплексная квадратичная форма может быть приведена с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования переменных к нормальному виду.*

Нормальным видом действительной квадратичной формы $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется такой её канонический вид, в котором все ненулевые коэффициенты равны либо 1, либо (-1).

Теорема 7.6. *Всякая действительная квадратичная форма может быть приведена с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования переменных к нормальному виду.*

Следующая теорема показывает, что нормальный вид действительной квадратичной формы определён однозначно с точностью до обозначения переменных, а число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде являются инвариантами квадратичной формы.

Теорема 7.7. *Число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы не зависят от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, приводящего эту форму к нормальному виду.*

Число положительных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы называется *положительным индексом инерции* этой квадратичной формы, а число отрицательных коэффициентов — её *отрицательным индексом инерции.*

7.3. Знакоопределенные квадратичные формы

Определение 7.9. Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется положительно определённой, если для любых n действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, имеет место неравенство

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) > 0.$$

Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *отрицательно определённой*, если для любых n действительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, имеет место неравенство

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) < 0.$$

Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы называются *знакоопределенными*.

Лемма 7.1. *Если к переменным положительно определённой квадратичной формы применить невырожденное линейное преобразование, то полученная квадратичная форма также будет положительно определённой.*

Лемма 7.2. *Если к переменным отрицательно определённой квадратичной формы применить невырожденное линейное преобразование, то полученная квадратичная форма также будет отрицательно определённой.*

На следующих двух теоремах основаны способы распознавания характера определённости действительной квадратичной формы путём приведения её к каноническому виду.

Теорема 7.8. *Для того, чтобы действительная квадратичная форма от n переменных была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы положительный индекс инерции этой квадратичной формы был равен n.*

Теорема 7.9. *Для того, чтобы действительная квадратичная форма от n переменных была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы отрицательный индекс инерции этой квадратичной формы был равен n.*

Главными минорами квадратной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называются миноры:

$$\Delta_1 = |a_{11}|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т. е миноры, расположенные в левом верхнем углу матрицы A.

Лемма 7.3. *Знак определителя матрицы действительной квадратичной формы не меняется при применении к этой форме невырожденного линейного преобразования переменных.*

Следствие. Определитель матрицы положительно определённой квадратичной формы является положительным числом.

Теорема 7.10. *Действительная квадратичная форма является положительно определённой тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы положительны. Действительная квадратичная форма является отрицательно определённой тогда и только тогда, когда все главные миноры нечетного порядка её матрицы отрицательны, а все главные миноры четного порядка положительны.*

Способ распознавания характера определённости квадратичной формы, основанный на теореме 7.10, называется *критерием Сильвестра.*

7.4. Практическая часть

7.4.1 Практическое занятие по теме «Билинейные и квадратичные формы»

1. По заданной квадратичной форме $A = -18x_1x_2 + 9x_2^2$ составить билинейную форму в пространстве R^2 записать её матрицу.

2. Составить матрицу данной симметричной билинейной формы в пространстве R^n и записать соответствующую ей квадратичную форму:

1) $B = x_1y_1, n = 1$;
2) $B = x_1y_1, n = 2$;
3) $B = 2x_1y_1 - x_1y_2 - 5x_2y_2, n = 2$.

3. По заданной квадратичной форме составить билинейную форму в пространстве R^n и записать ее матрицу:

1) $A = -3x_1^2, n = 1$;
2) $A = 2x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2, n = 3$;
3) $A = x_1^2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2, n = 3$.

4. Привести квадратичную форму в пространстве R^3 к каноническому виду методом Лагранжа, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса:

1) $A(x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;
2) $A(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;
3) $A(x) = x_1x_2 + x_2x_3$;
4) $A(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

5. Привести квадратичную форму в пространстве R^3 к каноническому виду методом ортогонального преобразования, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса:

1) $A(x) = -2x_2x_3$;
2) $A(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$;

3) $A(x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

ТЕМА 8
Евклидовы пространства

8.1. Скалярное умножение. Евклидово пространство

Определение 8.1. Пусть L – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Отображение $L^2 \to \mathbb{R}$ называется **скалярным умножением векторов** из L, а образ пары векторов $(a, b) \in L^2$ при этом отображении называется **скалярным произведением векторов** a и b и обозначается $a \cdot b$, если выполняются следующие условия (аксиомы скалярного произведения):
1) $(\forall a, b \in L)\ a \cdot b = b \cdot a$;
2) $(\forall a, b, c \in L)\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
3) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ (\forall a, b \in L)\ (\alpha a)b = \alpha(a \cdot b)$;
4) $(\forall a \in L, a \neq 0)\ a^2 > 0$.

Векторное пространство L над полем $\mathbb{R}$ со скалярным умножением векторов из L называется **евклидовым пространством** и обозначается символом E.

Пример 8.1. 1) Обычное скалярное произведение в пространстве V_3 является скалярным произведением в смысле приведенного вышего определения. Таким образом, пространство V_3 геометрических векторов, в котором определено скалярное умножение, является евклидовым пространством.

2) В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ скалярное произведение векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ зададим формулой $a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. (Проверьте, что аксиомы (1-4) при этом выполняются). Значит, пространство $\mathbb{R}^n$ евклидово пространство.
3) В пространстве $C_{[a,b]}$ непрерывных функций действительной переменной на промежутке $[a,b]$ скалярное произведение функций f и g определяется по формуле $fg = \int_a^b f(x)g(x)dx$. (Убедитесь, что эта формула задает скалярное произведение).
Таким образом, пространство $C_{[a,b]}$ с определенной на нем операцией скалярного умножения является евклидовым.

Теорема 8.1. Любое ненулевое векторное пространство L_n над полем $\mathbb{R}$ можно преобразовать в евклидово пространство E_n, это значит в $\mathbb{L}_n$ можно ввести скалярное умножение.

Доказательство. Действительно, это можно сделать, например, следующим способом. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ – произвольный базис пространства L_n. Для любых векторов $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ из $\mathbb{L}_n$ примем

$$a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i. \qquad (8.1)$$

Введенное таким образом скалярное умножение векторов удовлетворяет аксиомам (1 - 4). На самом деле, когда $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i u_i$, $c = \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i u_i$ – любые векторы пространства L_n и λ – любое действительное число, то:

1) $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \ \alpha_i = b \cdot a$;

2) $(a+b) \cdot c = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\gamma_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \gamma_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i \gamma_i = a \cdot c + b \cdot c$;

3) $(\lambda a) \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda \alpha_)\beta_i = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \lambda(a \cdot b)$;

4) $a \neq 0$, $a^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$, поскольку хотя бы одно из чисел α_i отлично от нуля.

Таким образом, получено евклидово пространство E_n. $\square$

Заметим, что выбирая в пространстве L_n различные базисы, получим из L_n различные евклидовы пространства. Можно даже другими способами преобразовать пространство L_n в евклидово.

Но дальше будет доказано, что как бы не выбиралось в пространстве L_n скалярное произведение, все эти пространства изоморфны между собой и обязательно найдется такой базис пространства E_n (и даже не один), в котором скалярное произведение выражается формулой (8.1).

Рассмотрим простейшие свойства скалярного произведения.

1)$(\forall a, b \in E)$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Действительно, применяя аксиомы (1),(2), получим: $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$;

2)$(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ $(\forall a, b \in E)$ $a \cdot (\alpha b) = \alpha(a \cdot b)$. На самом деле, с аксиом (1),(3) следует, что $a \cdot (\alpha b) = (\alpha b) \cdot a = \alpha(a \cdot b)$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} b_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j$ – формула скалярного произведения двух произвольных систем векторов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_m$ из E;

4)$\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_j b_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (a_i \cdot b_j)$ – формула скалярного произведения линейных комбинаций двух произвольных систем векторов $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_m$ из E.

(Формулы (3) и (4) докажите самостоятельно методом математической индукции);

5) $(\forall a \in E)$ $a \cdot 0 = 0$. Действительно, $a \cdot 0 = a \cdot (0 \cdot b) = 0(a \cdot b) = 0$, где b – любой вектор из E. В частности, $0^2 = 0$, это значит скалярный квадрат нулевого вектора равен 0.

Заметим, что из формулы (4) для произвольного базиса $u_1, \ldots, u_n$ пространства E и для любых векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j u_j$ получим , что $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_i (u_i \cdot u_j)$.

8.2. Длина вектора. Угол между векторами. Ортогональность

Пусть a – произвольный вектор пространства E. Известно, что $a^2 \geq 0$.

Определение 8.2. **Длиной(нормой, модулем) вектора** a называется арифметический квадратный корень из скалярного квадрата этого вектора.

Обозначим длину вектора a через $||a||$. Таким образом, $||a|| = \sqrt{a^2}$. Значит, $||a||^2 = a^2$.

Определение 8.3. Вектор a называется **нормированным**, когда $||a|| = 1$.

Рассмотрим некоторые свойства нормы вектора.
1) $||a|| \geq 0$, причем $||a|| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.
2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $||\alpha a|| = |\alpha| \cdot ||a||$. Действительно, $||\alpha a|| = \sqrt{(\alpha a)\cdot(\alpha a)} = \sqrt{\alpha^2 a^2} = |\alpha|\sqrt{a^2} = |\alpha| \cdot ||a||$.

Вывод. Любой ненулевой вектор $a \in E$ можно нормировать, это значит, преобразовать в нормированный вектор. Для этого достаточно вектор a умножить на число $\frac{1}{||a||}$ или $-\frac{1}{||a||}$. На самом деле, $\left|\left|\pm\frac{1}{||a||}\cdot a\right|\right| = \frac{1}{||a||}\cdot||a|| = 1$.

3) $(\forall a, b \in E)\ |a \cdot b| \leq ||a|| \cdot ||b||$ (неравенство Коши-Буняковского), причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.

Доказательство. Когда хотя бы один с векторов нулевой, то неравенство Коши-Буняковского очевидно. Пусть a и b – произвольные ненулевые вектора пространства E, а α – любое действительное число. Понятно, что $(\alpha a - b)^2 \geq 0$, откуда $\alpha^2 a^2 - 2\alpha(a \cdot b) + b^2 \geq 0$. Заметим, что левая часть последнего неравенства есть квадратный трехчлен относительно α. Поэтому это неравенство действительно при всех $\alpha \in R$ тогда и только тогда, когда дискриминант трехчлена неположительный, то есть $(a \cdot b)^2 - a^2 b^2 \leq 0$ или $(a \cdot b)^2 \leq a^2 b^2$. Поскольку обе части неравенства неотрицательные, то $\sqrt{(a \cdot b)^2} \leq \sqrt{a^2 b^2}$ или $|a \cdot b| < ||a|| \cdot ||b||$. Когда векторы a и b линейно зависимы, то $b = \alpha a$. Тогда $|a \cdot b| = |a \cdot (\alpha a)| = |\alpha| \cdot ||a||^2 = ||a|| \cdot ||b||$. Когда же векторы a и b линейно независимы, то при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha a - b \neq 0$, а поэтому $(\alpha a - b)^2 > 0$, откуда $|a \cdot b| < ||a|| \cdot ||b||$. $\square$

4) $(\forall a, b \in E)\ ||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$ (неравенство треугольника). Действительно, $||a + b||^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$. Но поскольку, по неравенству Коши-Буняковского, $|a \cdot b| \leq ||a|| \cdot ||b||$, то $||a + b||^2 \leq$ $\leq ||a||^2 + 2||a||\ ||b|| + ||b||^2 = (||a|| + ||b||)^2$, и поэтому $||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$. Пусть a и b – ненулевые вектора евклидового пространства E. Из неравенства Коши-Буняковского следует, что $\frac{|a \cdot b|}{||a|| \cdot ||b||} \leq 1$. Поэтому на проме-

жутке $[0,\pi]$ из равенства $\cos\varphi = \frac{a\cdot b}{||a||\cdot||b||}$ однозначно определяется число φ, а значит, корректно будет следующее определение.

Определение 8.4. **Углом между ненулевыми векторами a и b** пространства E называется такое действительное число φ, $0\le\varphi\le\pi$, что $\cos\varphi = \frac{a\cdot b}{||a||\cdot||b||}$. С этого определения следует, что $a\cdot b = ||a||\cdot||b||\cos\varphi$.

Определение 8.5. Векторы a и b пространства E называются **ортогональными или взаимно ортогональными** и пишут $a\perp b$, когда их скалярное произведение равно нулю.

Отметим некоторые свойства ортогональных векторов.
1) $a\perp a$ тогда и только тогда, когда $a=0$.
2) Вектор a ортогонален каждому вектору пространства E тогда и только тогда, когда $a=0$.
3) Ненулевые вектора a и b пространства E ортогональны тогда и только тогда, когда угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$.
4) Если $a\perp b$, то $||a+b||^2 = ||a||^2+||b||^2$.

8.3. Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации. Ортонормированный базис евклидова пространства

Определение 8.6. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ пространства E называется **ортогональной**, когда её векторы попарно ортогональны, это значит $a_i \cdot a_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, k}$. Система, которая состоит из одного вектора, считается ортогональной.

Базис евклидова пространства E, который является ортогональной системой векторов называется **ортогональным базисом**. Например, в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ базис $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$
$\ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ – ортогональный базис.

Теорема 8.2. Любая ортогональная система ненулевых векторов пространства E линейно независима.

Доказательство. Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_k - \tag{8.1}$$

ортогональная система ненулевых векторов пространства E. Допустим, что она линейно зависимая, это значит существуют числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0. \tag{8.2}$$

Пусть $\alpha_j \neq 0, 1 \leq j \leq k$. Умножив скалярно обе части равенства (8.2) на вектор a_j, получим равенство $\alpha_1(a_1a_j)+\cdots+\alpha_j(a_ja_j)+\cdots+\alpha_k(a_ka_j) = 0$. Отсюда, учитывая ортогональность системы (8.1), имеем

$$\alpha_j a_j^2 = 0. \tag{8.3}$$

Поскольку по допущению $\alpha_j \neq 0$, то из (8.3) следует, что $a_j^2 = 0$. Это означает, что a_j – нулевой вектор, что противоречит условию теоремы. □

Вывод 1. Любая ортогональная система n ненулевых векторов евклидова пространства E_n является ортогональным базисом этого пространства.
Вывод 2. Любая ортогональная система ненулевых векторов пространства E_n содержит не более n векторов.

Теорема 8.3. Всякую систему векторов

$$a_1, \ldots, a_k \tag{8.4}$$

пространства E можно ортогонализовать, это значит преобразовать в ортогональную систему векторов

$$b_1, \ldots, b_k \in E \tag{8.5}$$

такую, что системы

$$a_1, \ldots, a_i \tag{8.6}$$

и

$$b_1, \dots, b_i, i = \overline{1, k} \tag{8.7}$$

эквивалентные.

Доказательство. Систему (8.5) будем строить последовательно, применяя способ, который называется **процессом ортогонализации**. Возьмем вектор $b_1 = a_1$. Вектор b_2 будем искать в форме линейной комбинации векторов a_2 и b_1: $b_2 = a_2 + \lambda_1 b_1$. Поскольку b_2 должен быть ортогонален b_1, то $b_1 \cdot b_2 = b_1 \cdot a_2 + \lambda_1 b_1^2 = 0$, откуда $\lambda_1 = \frac{-b_1 \cdot a_2}{b_1^2}$. Когда же $b_1 = 0$, то $b_2 \perp b_1$ при $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}$. Заметим, что системы (8.6), (8.7) эквивалентные при $i = 1, 2$. Пусть уже построена ортогональная система (8.7), эквивалентная системе (8.6), $i < k$. Возьмем следующий вектор

$$b_{i+1} = a_{i+1} + \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \dots + \mu_i b_i, \tag{8.8}$$

где $\mu_j, j = \overline{1, i}$ – пока неизвестное действительное число. Условия ортогональности b_{i+1} каждому $b_j (j = \overline{1, i})$ дают систему уравнений для определения μ_j: $b_{i+1} \cdot b_j = a_{i+1} \cdot b_j + \mu_j b_j^2 = 0, j = \overline{1, i}$. Когда $b_j \neq 0$, то $\mu_j = -\frac{b_j \cdot a_{i+1}}{b_j^2}$. Когда же $b_j = 0$, то $b_{i+1} \perp b_j$ при $\forall \mu_j \in \mathbb{R}$. Докажем, что системы

$$a_1, \dots, a_i, a_{i+1} \tag{8.9}$$

и

$$b_1, \dots, b_i, b_{i+1} \tag{8.10}$$

эквивалентные. Действительно, система (8.7) инейно выражается через систему (8.6) ($i < k$), а вектор b_{i+1} – через систему (8.9), значит, система (8.10) линейно выражается через систему (8.9). В свою очередь, система (8.6) линейно выражается через систему (8.7) ($i < k$), а вектор a_{i+1}, согласно с равенством (8.8) – через систему (8.10). Значит система (8.9) линейно выражается через систему (8.10). Поэтому эти системы эквивалентные. Таким образом, всякую систему (8.4) можно ортогонализовать, применяя процесс ортогонализации. □

Вывод 3. Всякую линейно независимую систему векторов

$$a_1, \ldots, a_k \tag{8.11}$$

пространства E можно преобразовать с помощью процесса ортогонализации в ортогональную линейно независимую систему векторов

$$b_1, \ldots, b_k \in E \tag{8.12}$$

Действительно, по теореме 8.3 системы (8.11) $\sim$ (8.12). Так как ранги эквивалентных систем векторов равны, то rang (8.11) $=$
$=$ rang (8.12) $= k$. Поэтому система (8.12) линейно независимая.
Вывод 4. В каждом ненулевом евклидовом пространства E_n существует ортогональный базис. На самом деле, пусть

$$a_1, \ldots, a_n \tag{8.13}$$

Кафедра АГ и ММ

произвольный базис пространства E_n. По выводу 3 базис (8.13) можно преобразовать в ортогональную линейно независимую систему $b_1, \dots, b_n \in E_n$. Поскольку число векторов этой системы равно размерности E_n, то она является ортогональным базисом E_n.

Вывод 5. Всякую ортогональную систему ненулевых векторов пространства E_n, которая содержит менее n векторов, можно дополнить до ортогонального базиса пространства E_n.

Пример 8.2. Ортогонализуем систему векторов $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 1, -3, -3), a_3 = (4, 3, 0, -1) \in \mathbb{R}^4$.

Применим процесс ортогонализации. Возьмем $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \lambda_1 b_1$, причем λ_1 найдем из условия ортогональности $b_2 \cdot b_1 = 0$ или $a_1 \cdot a_2 + \lambda_1 a_1^2 = 0$. Отсюда $\lambda_1 = -\frac{a_1 \cdot a_2}{a_1^2} = 1$. Поэтому $b_2 = a_2 + a_1 = (2, 2, -2, -2)$. Вектор $b_3 = a_3 + \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$, причем $a_3 \cdot a_1 + \alpha_1 b_1^2 = 0, a_3 \cdot b_2 + \alpha_2 b_2^2 = 0$, откуда $\alpha_1 = -\frac{3}{2}, \alpha_2 = -1$. Тогда $b_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Значит, система векторов b_1, b_2, b_3 является ортогональной.

Определение 8.7. Система векторов $a_1, \dots, a_k$ евклидова пространства называется **ортонормированной**, когда она ортогональная и каждый ее вектор **нормированный**, это значит $a_i \cdot a_j = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j, i, j = \overline{1, k} \end{cases}$

Вывод 6. Любая ортонормированная система векторов пространства E_n содержит не более n векторов.

Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства E_n называется **ортонормированным**, когда он ортогонален и все его векторы нормированы. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ базис $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots$ $\ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$является ортонормированным.

Теорема 8.4. В каждом ненулевом евклидовом пространстве E_n существует ортонормированный базис.

Доказательство. По выводу 4 в E_n существует ортогональный базис. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ такой базис. Нормируем его векторы: $e_1 = \frac{b_1}{||b_1||}, \ldots$ $\ldots, e_n = \frac{b_n}{||b_n||}$. Очевидно, что $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j, i, j = \overline{1, n}. \end{cases}$

Значит, система $e_1, \ldots, e_n$ является ортонормированным базисом пространства E_n. □

Вывод 7. Любая ортонормированная система векторов пространства E_n является ортонормированным базисом, когда она содержит n векторов, и может быть дополнена до ортонормированного базиса, когда она содержит менее n векторов.

Ортонормированный базис удобнен потому, что в нем скалярное произведение двух векторов просто выражается через их координаты.

Теорема 8.5. Скалярное произведение векторов $a, b \in E_n$, разложенных по базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства E_n, равно сумме произведений одноименных координат тогда и только тогда, когда этот базис ортонормированный.

Доказательство. Необходимость. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства E_n такой, что скалярное произведение любых векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ выражается формулой $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. Так как вектор e_i имеет i-тую координату, равную 1, а остальные его координаты ровны 0, то по этой формуле получим, что $e_i \cdot e_i = 1$. Аналогично по той же формуле получаем при $i \neq j$, произведение $e_i \cdot e_j = 0$. Значит, $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства E_n.
Достаточность. Пусть базис $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства E_n,то есть $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j, i, j = \overline{1, n} \end{cases}$. Тогда для любых векторов $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j$ имеем $a \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$. □

Отметим еще некоторые свойства ортонормированного базиса. Если $e_1, \ldots, e_n$ – ортонормированный базис пространства E_n и $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ – любой вектор из E_n, то:
1) $||a|| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$
2) $\alpha_i = a e_i, i = \overline{1, n}$.

8.4. Практическая часть

8.4.1 Практическое занятие по теме «Евклидовы пространства»

1. В евклидовом пространстве R^4 найти углы между следующими парами векторов:
1) $a = (1, 1, 1, 1), b = (3, 5, 1, 1)$;
2) $a = (1, 1, 1, 1), b = (3, -5, 1, 1)$;
3) $a = (1, 1, 1, 1), b = (-3, -3, -3, -3)$.

2. В евклидовом пространстве R^4 найти длины сторон и углы треугольника, образованного векторами $a, b, a + b$ при:
1) $a = (1, 1, 1, 1), b = (3, 5, 1, 1)$;
2) $a = (1, 1, 1, 1), b = (3, -5, 1, 1)$;
3) $a = (2, -1, 2, 4), b = (2, -1, 2, -4)$.

3. Ортонормировать следующие системы векторов пространства R^4 :
1) $a_1 = (1, 1, 1, 1), a_2 = (1, 1, -3, -3), a_3 = (4, 3, 0, -1)$;
2) $a_1 = (1, 2, 2, 0), a_2 = (1, 1, 3, 5), a_3 = (1, 0, 1, 0)$.

4. Показать, что следующие системы векторов ортогональны, доролнить их до ортогональных базисов, нормировать эти базисы:
1) $a_1 = (1, -1, 1, -1), a_2 = (1, 1, 1, 1)$;
2) $a_1 = (1, -1, -1, 3), a_2 = (1, 1, -3, -1)$.

5. Построить ортонормированный базис подпространства, натянутого на систему векторов:

1) $a_1 = (1, -5, -2, 10), a_2 = (3, 11, -6, -22), a_3 = (3, -2, -6, 4), a_4 = (3, 11, 4, -7)$;

2) $a_1 = (3, 0, 0, -2), a_2 = (1, 2, 2, 4), a_3 = (3, 0, -6, -13), a_4 = (-1, 2, 4, 9)$.

6. В евклидовом пространстве R^4 найти ортонормированный базис ортогонального дополнения к линейной оболочке следующих систем векторов:

1) $a_1 = (4, 10, -1, 4), a_2 = (1, 1, -1, -3), a_3 = (2, 4, -1, 0)$;

2) $a_1 = (5, 3, 0, -2), a_2 = (9, 5, 6, -4), a_3 = (1, 1, -6, 0)$.

ТЕМА 9

Линейные операторы в евклидовых пространствах

9.1. Изоморфизмы евклидовых пространств

Пусть V и V' — два изоморфных линейных пространства. Биективное отображение $f : V \to V'$ называется *изоморфизмом* линейного пространства V на линейное пространство V', если f сохраняет операции сложения векторов и умножения вектора на число. Это означает, что для любых векторов a и b пространства V и любого числа α из основного поля

$$f(a+b) = f(a) + f/(b),\ f(\alpha a) = \alpha f(a).$$

Пусть теперь V и V' — евклидовы пространства, т. е. линейные пространства над полем действительных чисел R, на каждом из которых определено соответствующее скалярное произведение.

Определение 9.1. Изоморфизм линейных пространств $f : V \to V'$ называется *изоморфизмом евклидова пространства* V на евклидово пространство V', если он сохраняет скалярное произведение векторов, т. е. для любых $a, b \in V$ верно равенство $f(a)f(b) = ab$.

Легко проверить, что отношение изоморфизма евклидовых пространств есть отношение эквивалентности на множестве всех евклидовых пространств, а именно:

1) всякое евклидово пространство изоморфно самому себе;

2) если $f : V \to V'$ — изоморфизм евклидовых пространств, то и $f^{-1} : V' \to V$ — изоморфизм евклидовых пространств;

3) если $f : V \to V'$ и $g : V' \to V''$ — изоморфизмы евклидовых пространств, то и $gf : V' \to V$" — изоморфизм евклидовых пространств.

Понятие изоморфизма евклидовых пространств позволяет выделять одинаково «устроенные» евклидовы пространства. С точки зрения аксиоматической теории, изоморфные пространства различаются лишь обозначениями и названиями своих элементов.

Следующая принципиально важная теорема утверждает изоморфизм любых двух евклидовых пространств одинаковой размерности.

Теорема 9.1. *Два евклидовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Так как при изоморфизмах евклидовых пространств сохраняется скалярное произведение, то должны сохраняться длины векторов и их ортогональность. Поэтому *изоморфизм евклидовых пространств $f : V \to V'$ переводит любой ортонормированный базис пространства V в ортонормированный базис пространства V'.*

Обратно, справедлива

Теорема 9.2. *Пусть $f : V \to V'$ — линейный оператор евклидова пространства V в евклидово пространство V'. Если образы всех векторов какого-либо ортоноржированного базиса пространства V состав-*

ляют ортонормированный базис пространства V', то f — изоморфизм евклидовых пространств.

Далее произвольное n-мерное евклидово пространство будем обозначать E^n.

9.2. Сопряженный оператор

Сопряженный оператор играет важную роль при изучении ли- нейных операторов евклидовых пространств.

Напомним некоторые сведения о линейных функциях на пространстве E^n, при этом будем рассматривать его как линейное пространство. Каждая такая функция α есть отображение $\alpha : E^n \to R$, для которого $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$, $\alpha(\lambda a) = \lambda\alpha(a)$ при любых $a, b \in E^n$ и любом $\lambda \in R$. Множество всех линейных функций на E^n превращается в линейное пространство над полем R, если определить сумму функций с помощью формулы $(\alpha+\beta)(a) = \alpha(a) + +\beta(a)$, а умножение функции на число — с помощью формулы $(\alpha\lambda)(a) = \alpha\lambda(a)$. Это линейное пространство также имеет размерность n. Оно называется *сопряженным* пространству E^n и обозначается $(E^n)^*$. Таким образом, $dim(E^n)^* = dimE^n$.

Наличие скалярного произведения на линейном пространстве позволяет сопоставить каждому вектору $a \in E^n$ некоторую вполне определенную линейную функцию $\alpha \in (E^n)^*$, а именно: $\alpha(b) = ab$ для любого

$b \in E^n$. Проверим линейность функции a, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$$\alpha(b_1 + b_2) = a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2 = \alpha(b_1) + \alpha(b_2),$$

$$\alpha(\lambda b) = a(\lambda b) = \lambda(ab) = \lambda\alpha(b).$$

Обратно, справедливо

Лемма 9.1. *Для всякой линейной функции $\alpha \in (E^n)^*$ существует единственный вектор $a \in E^n$, такой, что $\alpha(b) = ab$ при любом $b \in E^n$.*

Пусть f — некоторый линейный оператор пространства E^n. Зафиксируем вектор $a \in E^n$ и рассмотрим функцию $\alpha : E^n \to R$, такую, что $\alpha(b) = af(b)$ для любого $b \in E^n$. Ясно, что α зависит от выбора a. Из линейности f и свойств скалярного произведения следует, что α линейная функция. Поэтому, согласно лемме 9.1, существует единственный вектор $a' \in E^n$, для которого $\alpha(b) = a'b$ при любом $b \in E^n$. Следовательно, каждому вектору $a \in E^n$ соответствует единственный вектор $a' \in E^n$, т. е. определено некоторое преобразование $f^* : E^n \to E^n$, такое, что $f^*(a) = a'$. Преобразования f и f^* связаны соотношением

$$f^*(a)b = af(b). \tag{9.1}$$

Покажем, что f^* — линейный оператор. Для любого $b \in E^n$

$$f^*(a_1 + a_2)b = (a_1 + a_2)f(b) = a_1 f(b) + a_2 f(b) =$$

$$= f^*(a_1)b + f^*(a_2)b = (f^*(a_1) + f^*(a_2))b.$$

Мы видим, что линейные функции, соответствующие векторам $f^*(a_1 + a_2)$ и $f^*(aa_1) + f^*(a_2)$, совпадают. Поэтому, согласно лемме 9.1, $f^*(a_1 + a_2) = f^*(a_1) + f^*(a_2)$.

Аналогично

$$f^*(\lambda a)b = (\lambda a)f(b) = \lambda(af(b)) = \lambda(f^*(a)b) = (\lambda f^*(a))b,$$

откуда $f^*(\lambda) = \lambda f^*(a)$.

Приведенные рассуждения доказывают

Лемма 9.2. *Для каждого линейного оператора $f : E^n \to E^n$ существует единственное преобразование $f^* : E^n \to E^n$, удовлетворяющее условию 9.1. при любых $a, b \in E^n$. При этом f^* — тоже линейный оператор.*

Оператор f^* называется *сопряженным* оператору f.

Лемма 9.3. *Для любых линейных операторов f и g пространства E^n*

$$(fg)^* = g^* f^*, \; (f^*)^* = f.$$

Следующая теорема играет в дальнейшем важную роль.

Теорема 9.3. *Пусть $f : E^n \to E^n$ — линейный оператор и W — подпространство пространства E^n. Если W инвариантно относительно*

f, то его ортогональное дополнение $W^\perp$ инвариантно относительно f^*.

В заключение выясним, как связаны между собой матрицы операторов f и f^* в одном и том же ортонормированном базисе пространства E^n.

Теорема 9.4. *Пусть A и B — матрицы линейных операторов f и f^* в произвольном ортонормированном базисе пространства E^n. Тогда B получается из A с помощью операции транспонирования, т. е. $B = A^T$.*

9.3. Ортогональные операторы

Понятие ортогонального оператора является частным случаем более общего понятия изоморфизма евклидовых пространств.

Определение 9.2. Изоморфизм евклидова пространства E^n на себя называется *ортогональным оператором* пространства E^n.

Ясно, что ортогональный оператор является линейным и сохраняет скалярное произведение. Верно и обратное.

Лемма 9.4. *Линейный оператор $f : E^n \to E^n$ является ортогональным оператором пространства E^n тогда и только тогда, когда*

Начало
Содержание
Страница 260 из 315
Назад
На весь экран
Закрыть

f сохраняет скалярное произведение, т. е. $f(a)f(b) = ab$ для любых векторов $a, b \in E^n$.

Следующее предложение вытекает из свойств изоморфизмов евклидовых пространств.

Лемма 9.5. *Ортогональный оператор $f : E^n \to E^n$ переводит любой ортонормированный базис пространства E^n в ортонормированный базис. Обратно, если линейный оператор $f : E^n \to E^n$ переводит некоторый ортонормированный базис пространства E^n в ортонормированный базис, то f ортогонален.*

Теорема 9.5. *Линейный оператор $f : E^n \to E^n$ является ортогональным тогда и только тогда, когда $f * f = e$, где e — тождественное преобразование.*

Из теоремы 9.5 в качестве простого следствия вытекает

Теорема 9.6. *Линейный оператор евклидова пространства является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе ортогональна.*

Теорема 9.7. *Множество всех ортогональных операторов евклидова пространства E^n образует группу преобразований пространства E^n, изоморфную группе всех ортогональных матриц порядка n.*

Установленная связь между ортогональными операторами и ортогональными матрицами позволяет детально исследовать произвольный ортогональный оператор n-мерного евклидова пространства. А это в свою очередь приводит к соответствующему утверждению для ортогональных матриц.

В основе дальнейших рассуждений лежит следующая

Теорема 9.8. *Если подпространство W инвариантно относительно ортогонального оператора f, то ортогональное дополнение $W^{\perp}$ также инвариантно относительно f.*

Лемма 9.6. *Для любого линейного оператора f действительного конечномерного ненулевого линейного пространства V существует инвариантное относительно f одномерное или двумерное подпространство.*

Из теоремы 9.8 и леммы 9.6 следует

Теорема 9.9. *Пусть f — ортогональный оператор евклидова пространства E^n. Тогда E^n — прямая сумма попарно ортогональных одномерных или двумерных подпространств, инвариантных относительно f.*

Теорема 9.9 сводит описание ортогональных операторов n-мерного евклидова пространства к случаю $n \leq 2$.

Нам понадобятся следующие два предложения.

Лемма 9.7. *Собственные значения ортогонального оператора равны ± 1.*

Лемма 9.8. *Определитель ортогональной матрицы равен ± 1.*

Перейдем к описанию ортогональных операторов одномерных и двумерных евклидовых пространств.

Лемма 9.9. *Существуют только два ортогональных оператора евклидова пространства E^1:*

1) тождественное преобразование;

2) преобразование, переводящее каждый вектор в противоположный.

Лемма 9.10. *Любой ортогональный оператор евклидова пространства E^2 имеет в подходящем ортонормированном базисе либо матрицу*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9.2}$$

либо матрицу вида

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \phi \in R. \tag{9.3}$$

Леммы 9.9 и 9.10 вместе с теоремой 9.9 позволяют описать произвольный ортогональный оператор n-мерного евклидова пространства.

Теорема 9.10. *Для любого ортогонального оператора $f : E^n \to E^n$ существует ортонормированный базис пространства E^n, в котором f имеет матрицу вида*

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & & \\ & \dots & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & & & \\ & & & & \dots & & & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & & & \cos\phi_1 & -\sin\phi_1 & & & & & \\ & & & & & & \sin\phi_1 & \cos\phi_1 & & & & & \\ & & & & & & & & \dots & & & & \\ & & & & & & & & & \cos\phi_k & -\sin\phi_k \\ & & & & & & & & & \sin\phi_k & \cos\phi_k \end{bmatrix}. \qquad (9.4)$$

Теорема 9.10 позволяет получить соответствующий результат для ортогональных матриц.

Теорема 9.11. *Любая ортогональная матрица A порядка n ортогонально подобна некоторой ортогональной матрице B вида 9.4. Другими словами, для любой ортогональной матрицы A существует такая ортогональная матрица C, что $C^{-1}AC = B$ — матрица вида 9.4.*

9.4. Самосопряженные операторы

Самосопряженные операторы образуют еще один важный класс операторов евклидова пространства.

Определение 9.3. Линейный оператор f пространства E^n называется *самосопряженным*, если он совпадает со своим сопряженным оператором f^*, т. е. если $f(a)b = af(b)$ для любой пары векторов $a, b \in E^n$.

Теорема 9.12. *Линейный оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица A в ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A^T = A$, т. е. является симметрической.*

Теорема 9.13. *Если подпространство W инвариантно относительно самосопряженного оператора f, то ортогональное дополнение $W^\perp$ также инвариантно относительно f.*

Теорема 9.13 позволяет исследовать произвольный самосопряженный оператор с помощью метода, которым мы уже пользовались при изучении ортогональных операторов.

Теорема 9.14. *Для любого самосопряженного линейного оператора f пространства E^n существует одномерное инвариантное относительно f подпространство.*

Теорема 9.15. *Пусть f — самосопряженный линейный оператор евклидова пространства E^n. Тогда E^n есть прямая сумма попарно* *ортогональных одномерных подпространств, инвариантных относительно f.*

Так как каждый ненулевой вектор инвариантного относительно линейного оператора f одномерного подпространства является собственным вектором этого оператора, то справедлива

Теорема 9.16. *Для любого самосопряженного линейного оператора f пространства E^n существует ортонормированный базис пространства E^n, состоящий из собственных векторов оператора f.*

Очевидно, что в этом базисе оператор f имеет диагональную матрицу. Из теоремы 9.16 легко получается соответствующее утверждение для симметрических матриц.

Теорема 9.17. *Любая действительная симметрическая матрица ортогонально подобна некоторой диагональной матрице. Другими словами, для любой действительной симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица C, что $C^{-1}AC = B$ — диагональная матрица.*

В качестве следствия из теоремы 9.17 получаем следующее утверждение.

Теорема 9.18. *Все корни характеристического многочлена действительной симметрической матрицы действительны.*

9.5. Разложение линейного оператора в произведение ортогонального и самосопряженного операторов

Несмотря на то что ортогональные и самосопряженные операторы пространства E^n — это линейные операторы специального вида, всякий линейный оператор $f^{E^n} \to E^n$ можно представить в виде произведения двух подходящих операторов: ортогонального и самосопряженного.

Предположим, что искомое разложение существует:

$$f = hg, \tag{9.5}$$

где h — ортогональный оператор; g — самосопряженный оператор, т. е. $h^* = h^{-1}$, $g^* = g$. Тогда $f^* = (hg)^* = g^*h^* = gh^{-1}$ и $f^*f = (gh^{-1})(hg) = g^2$. Следовательно, из существования разложения 9.5 вытекает, что

$$g^2 = f^*f \tag{9.6}$$

Рассмотрим более внимательно произведение f^*f.

Лемма 9.11. *Для произвольного линейного оператора f пространства E^n произведение f^*f — самосопряженный оператор, все собственные значения которого неотрицательны.*

Лемма 9.11 позволяет доказать существование самосопряженного оператора g, удовлетворяющего условию 9.6. В самом деле, так как оператор f^*f — самосопряженный, то существует ортонормированный базис пространства E^n, состоящий из собственных векторов оператора $f^* f$. В этом базисе $f^* f$ имеет диагональную матрицу

$$A = diag[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n],$$

где h — действительные неотрицательные числа. Пусть

$$B = diag\left[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n}\right].$$

Очевидно, что $B^2 = A$. Обозначим через g линейный оператор пространства E^n с матрицей B в рассматриваемом базисе. Тогда $g^2 = f^* f$, и так как B — симметрическая матрица, то оператор g — самосопряженный.

Поскольку можно указать несколько различных диагональных матриц, квадрат которых равен матрице A, оператор g не определяется однозначно условием 9.6.

Отметим, что если оператор f — невырожденный, то и любой оператор g, удовлетворяющий условию 9.6, будет невырожденным.

Вернемся к разложению 9.5 и предположим, что оператор f невырожден. В этом случае g тоже должен быть невырожденным оператором, так что можно говорить об обратном операторе g^{-1}. Тогда $h = fg^{-1}$, следовательно, h однозначно определяется преобразованием g.

Проверим, будет ли $h = fg^{-1}$ ортогональным преобразованием, если g — самосопряженное преобразование, удовлетворяющее условию 9.6:

$$h^* h = (fg^{-1})^*(fg^{-1}) = (g^{-1})^*(f^* f)g^{-1} =$$

Кафедра
АГ и ММ

$$= (g^*)^{-1}g^2g^{-1} = g^{-1}g^2g^{-1} = e.$$

Итак, $h = fg^{-1}$ — ортогональный оператор, откуда $f = hg$ — искомое разложение. Доказана

Теорема 9.19. *Для любого невырожденного линейного оператора f пространства E^n существуют ортогональный оператор h и самосопряженный оператор g, такие, что $f = hg$.*

Можно показать, что теорема 9.19 остается верной и для любого вырожденного линейного оператора.

Из доказанной теоремы вытекает неожиданное на первый взгляд следствие.

Следствие. *Для любого невырожденного линейного оператора f пространства E^n существует ортогональный базис пространства E^n, который переводится этим оператором в ортогональный базис.*

Теорема 9.19 приводит к соответствующему утверждению для матриц.

Теорема 9.20. *Всякая невырожденная действительная матрица A порядка n есть произведение ортогональной и симметрической матриц.*

Можно показать, что теорема 9.20 остается справедливой и для любой вырожденной действительной матрицы A.

9.6. Приведение действительной квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных

Свойства симметрических матриц, полученные при изучении самосопряженных преобразований, находят применение в теории квадратичных форм.

Теорема 9.21. *Для всякой действительной квадратичной формы $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ существует линейное преобразование переменных $X = CY$ с ортогональной матрицей C, приводящее эту форму к каноническому виду*

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + ... + \lambda_n y_n^2,$$

где λ_i — корни характеристического многочлена матрицы формы $F(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Теорему 9.21 используют при решении следующего вопроса. Пусть $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $G(x_1, x_2, ..., x_n)$ — пара действительных квадратичных форм от n переменных. Существует ли невырожденное линейное преобразование переменных x_1, x_2, ..., x_n, приводящее обе эти формы к каноническому виду? В общем случае ответ будет отрицательным. Однако ситуация меняется, если дополнительно потребовать, чтобы одна из двух данных квадратичных форм была положительно-определенной. Имеет место

Теорема 9.22. *Для любой пары действительных квадратичных форм от n переменных, одна из которых является положительно- определенной, существует невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее каждую из этих форм к каноническому виду.*

9.7. Практическая часть

9.7.1 Практическое занятие по теме «Ортогональные и унитарные матрицы. Эрмитовы и симметричные матрицы. Самосопряженные операторы. Свойства собственных значений и собственных векторов самосопряженного оператора»

1. Найти ортонормированный базис из собственных векторов для унитарных операторов, заданных матрицами:

1) $\begin{bmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{bmatrix} (\alpha \neq k\pi);$

2) $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{bmatrix}.$

2. Найти каноническую матрицу и канонический базис ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей:

1) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

2) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$;

3) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{bmatrix}$.

3. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2$—ортонормированный базис и линейный оператор φ имеет в базисе $\bar{f}_1 = \bar{e}_1, \bar{f}_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Найти матрицу линейного оператора φ^* в том же базисе $\bar{f}_1, \bar{f}_2$.

4. Линейный оператор φ имеет в базисе $\bar{f}_1 = (1,2,1), \bar{f}_2 = (1,1,2), \bar{f}_3 = (1,1,0)$ матрицу $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$. Найти матрицу сопряженного оператора в том же базисе, если координаты векторов базиса даны в некотором ортонормированном базисе.

5. Найти матрицу линейного оператора φ^* в ортонормированном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, оператор φ переводит векторы $\bar{a}_1 = (0,0,1), \bar{a}_2 = (0,1,1), \bar{a}_3 = (1,1,1)$ в $\bar{b}_1 = (1,2,1), \bar{b}_2 = (3,1,2), \bar{b}_3 = (7,-1,4)$.

6. Найти диагональную форму и ортонормированный базис из собственных векторов для самосопряженного оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей:

1) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -7 \\ -2 & -7 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -3 & -6 & 7 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ -\sqrt{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 13 \end{bmatrix}$.

9.7.2 Практическое занятие по теме «Приводимость эрмитовых и симметричных матриц к диагональному виду. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований»

1. Привести к диагональному виду следующие матрицы:

1) $\begin{bmatrix} 5 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$;

4) $\begin{bmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{bmatrix}$;

5) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -7 & 2 \\ 3 & -7 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

6) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ -3 & 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

2. Привести квадратичную форму в пространстве R^3 к каноническому виду методом ортогонального преобразования, найдя канонические коэффициенты и преобразование базиса:

1) $A(x) = -2x_2x_3$;

2) $A(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_2$;

3) $A(x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

9.7.3 Практическое занятие по теме «Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм. Изометрии. Приведение к каноническому виду уравнения фигур второго порядка»

1. Определить тип кривой и найти ее каноническое уравнение:

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;

2) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;

3) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;

4) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$;

5) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;

6) $2x^2 - 5xy - 12y^2 - x + 26y - 10 = 0$;
7) $8x^2 + 6xy - 26x - 12y + 11 = 0$;
8) $x^2 - 12xy - 4y^2 + 12x + 8y + 5 = 0$.

2. Определить вид каждой из следующих поверхностей второго порядка и написать ее каноническое уравнение:
1) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$;
2) $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz - 4zx + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$;
3) $7x^2 + 7y^2 + 16z^2 - 10xy - 8yz - 8zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$;
4) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$;
5) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$;
6) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$.

ТЕМА 10

Элементы теории групп

10.1. Понятие группы. Основные свойства групп

Определение 10.1. Множество G с заданной на нём бинарной алгебраической операцией (умножением) называется *группой*, если:

1) эта операция ассоциативна, т.е. $(ab)c = a(bc)$ для любых элементов a, b, c из G;

2) в G существует единичный элемент e такой, что $ae = ea = a$ для любого элемента a из G;

3) для каждого элемента a из G в G существует обратный элемент a^{-1} такой, что $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Все определения и результаты легко переносятся на множества с аддитивной формой записи операции.

Определение 10.2. T10Группа G называется *абелевой, или коммутативной*, если все элементы группы перестановочны между собой, т.е. выполняется коммутативный закон $ab = ba$ для любых элементов a, b из группы G.

Пример.

1. Множества $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ с операцией сложения — абелевы группы.

2. Множество $\mathbb{N}$ со сложением не является группой, т.к. в $\mathbb{N}$ нет нулевого и противоположных элементов. Однако $\mathbb{N}$ со сложением — коммутативная полугруппа.

3. Множество $\{-1, 1\}$ с умножением — конечная абелева группа порядка 2.

4. Ни одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ с умножением группу не образует. Если положим $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, то $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{R}^*$ и $\mathbb{Q}^*$ с умножением являются абелевыми группами. Множества $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ и $\mathbb{N}$ с умножением — коммутативные полугруппы с единицей, но не группы.

Определение 10.3. *Порядком элемента a называется наименьшее натуральное число n такое, что $a^n = e$ и обозначается $|a|$. Порядком группы называется количество ее элементов. Обозначается порядок группы G через $|G|$. В случае, если множество элементов бесконечно, говорят, что G имеет бесконечный порядок, и пишут $|G| = \infty$.*

Пусть $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ и S_n — совокупность всех подстановок степени n. Множество S_n с операцией умножения образует конечную группу порядка $n!$ с единичным элементом

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Группу S_n называют *симметрической группой степени* n. При $n \geq 3$ эта группа неабелева.

Четные подстановки образуют конечную группу A_n порядка $n!/2$, которую называют *знакопеременной группой степени* n.

Определение 10.4. Подмножество H группы G называется *подгруппой*, если H — группа относительно той же операции, которая определена на G. Запись $H \leq G$ означает, что H — подгруппа группы G, а $H < G$, что H — *собственная подгруппа группы* G, т.е. $H \leq G$ и $H \neq G$.

Теорема 10.1. ***(критерий подгруппы)*** *Непустое подмножество H группы G будет подгруппой тогда и только тогда, когда $h_1h_2 \in H$ и $h_1^{-1} \in H$ для всех $h_1, h_2 \in H$.*

Отметим, что каждая группа G обладает *единичной подгруппой* $E = \{e\}$. Сама группа G также считается подгруппой в G. Эти подгруппы называют *тривиальными подгруппами. Нетривиальная подгруппа* группы G — это такая подгруппа H из G, которая отлична от G и E.

Пример.

1. Т.к. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — аддитивные группы и $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, то $\mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}$.
2. Поскольку $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^*$, $\{-1, 1\}$ — мультипликативные группы, то $\{-1, 1\} < \mathbb{Q}^* < \mathbb{R}^* < \mathbb{C}^*$.
3. Т.к. S_n и A_n — группы с одной и той же операцией и $A_n \subseteq S_n$, то $A_n < S_n$.
4. Примером подгруппы группы отличных от нуля комплексных чисел по умножению могут служить все комплексные числа, являющиеся

корнями n-ой степени из единицы. Еще одну подгруппу этой же группы образуют все комплексные числа, равные по абсолютной величине единице.

Теорема 10.2. *Произведение двух подгрупп A и B группы G является подгруппой тогда и только тогда, когда A и B перестановочны, т.е. $AB = BA$.*

Определение 10.5. Пусть M — произвольное подмножество группы G. Пересечение всех подгрупп из G, содержащих M, называется *подгруппой, порожденной множеством M*. Множество M в этом случае называется *порождающим множеством*, и подгруппа, им порожденная, обозначается $\langle M\rangle$.

Теорема 10.3. *Если M — подмножество группы G, то*

$$\langle M\rangle = \{a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n} \mid a_i \in M, m_i = \pm 1, n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Определение 10.6. *Диэдральной группой* называется группа, порожденная двумя различными инволюциями, где под инволюцией понимают элемент порядка 2.

Определение 10.7. *Группой кватернионов* называется группа, порожденная двумя матрицами над полем комплексных чисел:

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определение 10.8. Группа, порожденная одним элементом a, называется *циклической* и обозначается $< a >$.

Теорема 10.4. *Любая подгруппа циклической группы — циклическая группа.*

Определение 10.9. К *циклической группе* относится аддитивная группа $\mathbb{Z}$, порождающим элементом которой является 1. Аддитивная группа $m\mathbb{Z}$ является циклической группой, порождающим элементом которой является m, где $m \in \mathbb{N}$.

Пример. Выясните, будет ли подгруппой произведение групп $A = \langle(12)\rangle$ и $B = \langle(13)\rangle$ группы S_3?

Подгруппы A и B состоят из следующих элементов:

$A = \{e, (12)\}, B = \{e, (13)\}$.

Найдем произведения AB и BA:

$AB = \{e, (12)\} \cdot \{e, (13)\} = \{e, (12), (13), (132)\}$,

$BA = \{e, (13)\} \cdot \{e, (12)\} = \{e, (13), (12), (123)\}$.

Т.к. $AB \neq BA$, то по теореме 3.1.2 AB не является подгруппой группы S_3.

В 1872 г. была доказана основная для теории конечных групп теорема, описывающая строение максимальных p-подгрупп конечной группы. Теорема доказана норвежским математиком Л. Силовым. Поэтому максимальные p-подгруппы названы в его честь силовскими p-подгруппами.

Напомним, что группа, порядки всех элементов которой являются степенями некоторого фиксированного простого числа p, называется p-группой.

Определение 10.10. Максимальная p-подгруппа называется *силовской p-подгруппой.*

Теорема 10.5. ***(Теорема Силова)*** *Пусть G — конечная группа, p — простое число. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) для каждой степени p^k, делящей порядок G, в G существует подгруппа порядка p^k;

2) если p^k делит порядок G, то каждая подгруппа порядка p^k из G вложена в некоторую подгруппу порядка p^{k+1} из G. В частности, силовские p-подгруппы из G — это в точности подгруппы порядка p^r, где p^r — максимальная степень p, делящая порядок G;

3) все силовские p-подгруппы из G сопряжены в G;

4) количество силовских p-подгрупп из G сравнимо с единицей по модулю p и делит порядок G.

Теорему Силова можно применять для исследования строения групп небольших порядков. С ее помощью можно определить простоту группы или найти точное количество силовских подгрупп, решать другие вопросы о строении группы.

10.2. Практическая часть

10.2.1 Практическое занятие по теме «Элементы теории групп»

1. Доказать, что следующие подмножества из C являются мультипликативными группами:

1) $Q^* = Q \setminus \{0\}$;
2) $R^* = R \setminus \{0\}$;
3) $C^* = C \setminus \{0\}$;
4) $\{x \in Q | x > 0\}$;
5) $\{x \in R | x > 0\}$;
6) $\{z \in C || z| = 1\}$;
7) $\{a + b\sqrt{3} | a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$;
8) $\{a + bi\sqrt{3} | a, b \in Q, a^2 + b^2 > 0\}$;
9) множество R_n всех корней $n-$ой степени из единицы.

2. Доказать, что следующие множества чисел являются аддитивными группами:

1) Z;
2) $2Z$;
3) Q;
4) R;
5) C;
6) $\{\frac{a}{7^k} | a \in Z, k \in N\}$;

7) $\{a+bi|a,b\in Z\}$;
8) $\{a+bi\sqrt{3}|a,b\in Z\}$;
9) $\{\frac{a+bi\sqrt{3}}{2}|a,b\in Z, a,b$ - числа одинаковой четности $\}$.

3. Доказать, что следующие множества преобразований с операцией - композицией преобразований - являются группами, и определить, какие из этих групп абелевы:

1) множество всех взаимно-однозначных отображений непустого множества X на себя;

2) полугруппа взаимно-однозначных отображений множества X на себя, которая вместе с каждым отображением содержит обратное ему;

3) множество всех вращений (поворотов) плоскости вокруг фиксированной точки O.

4. Доказать, что в аддитивной абелевой группе G :
1) $(a+b)-c=a+(b-c)$;
2) $(a+b)-(a+c)=b-c$;
3) $(a+b)-c=a-(c-b)$;
4) $c-(a+b)=(c-a)-b$.

5. Доказать, что в мультипликативной группе:
1) существует единственная единица;
2) каждый элемент имеет единственный обратный;
3) уравнение $ax=b(ya=b)$ имеет решение и это решение единственное;

4) $ac = bc \Rightarrow a = b (ca = cb \Rightarrow a = b)$;
5) $(a^{-1})^{-1} = a$;
6) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;
7) $(a_1 a_2 \dots a_k)^{-1} = a_k^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$;
8) $(a^k)^{-1} = (a^{-1})^k, k \in N$;
9) $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \Leftrightarrow ab = ba$.

ТЕМА 11
Тензорная алгебра

11.1. Общее определение тензора

Пусть V^n — n-мерное линейное пространство над полем P. Возьмем какой-либо вектор $x \in V^n$. Если выбрать некоторый базис

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \tag{11.1}$$

то вектор x можно единственным образом разложить по этому базису:

$$x = x^1e_1 + x^2e_2 + \ldots + x^ne_n =_{i=1}^{n} x^ie_i, \tag{11.2}$$

Здесь мы номер координаты вектора х помещаем в верхний индекс буквы х, а не в нижний, как это делалось раньше. Такой способ обозначений при рассмотрении тензоров оказывается более удобным.

Введем новое соглашение относительно операции суммирования: если в каком-либо выражении производится суммирование по индексу, стоящему один раз вверху и один раз внизу, знак суммирования будем опускать. Другими словами, сумму, стоящую в правой части равенства 11.2, будем обозначать x^ie_i. Итак, формулу разложения вектора x по базису 11.1 можно переписать в виде

$$x = x^ie_i, \tag{11.3}$$

Возьмем теперь какой-либо другой (новый) базис

$$e'_1, e'_2, \ldots, e'_n, \tag{11.4}$$

и разложим каждый из векторов 11.4 по базису 11.1:

$$\begin{array}{l} e'_1 = a_1^1 e_1 + a_1^2 e_2 + \ldots + a_1^n e_n, \\ e'_2 = a_2^1 e_1 + a_2^2 e_2 + \ldots + a_2^n e_n, \\ \ldots \\ e'_n = a_n^1 e_1 + a_n^2 e_2 + \ldots + a_n^n e_n. \end{array} \tag{11.5}$$

Из коэффициентов разложения в формулах 11.5 можно составить матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & & & \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{bmatrix} \tag{11.6}$$

которая называется матрицей перехода от базиса 11.1 к базису 11.4. Заметим, что элемент матрицы A, стоящий в i-й строке и j-м столбце, мы обозначаем теперь a_j^i. Использовав соглашение о суммировании, перепишем теперь формулы 11.5 в виде

$$e'_j = a_j^i e_i, \tag{11.7}$$

Индекс i в равенстве 11.7 называется *индексом суммирования*, а j — *свободным индексом*. В дальнейшем будем считать, что если в формуле есть свободный индекс, это означает, что данная формула является краткой записью n формул, которые получаются, когда свободному индексу придают значения 1,2, ..., n.

Разложим теперь указанный выше вектор x по базису 11.4:

$$x = x'^i e'_i, \; i = 1, 2, ..., n \tag{11.8}$$

Здесь $x'^1, x'^2, ..., x'^n$ — новые координаты вектора x, т.е. его координаты в новом базисе 11.4, Выразим новые координаты вектора x через его старые координаты $x^1, x^2, ..., x^n$. Для этого запишем формулы 11.7 в матричном виде:

$$[e'_1 \; e'_2 \; ... \; e'_n] = [e_1 \; e_2 \; ... \; e_n]A \tag{11.9}$$

Пусть B — матрица, обратная матрице A:

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & ... & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & ... & b_n^2 \\ ... & & & \\ b_1^n & b_2^n & ... & b_n^n \end{bmatrix} \tag{11.10}$$

Умножая обе части равенства 11.9 справа на матрицу B, получаем

$$[e_1 \; e_2 \; ... \; e_n] = [e'_1 \; e'_2 \; ... \; e'_n]B.$$

Перепишем это равенство в виде

$$e_j = b_j^j e'_j. \tag{11.11}$$

Использовав равенства 11.3 , 11.8 , 11.11, имеем:

$$x = x'^i e'_i = x^j e_j = x^j (b^j_j e'_j) = (b^j_j x^j) e'_j.$$

Отсюда в силу единственности разложения вектора x по базису 11.4 следует искомая формула

$$x'^i = b^j_j x^j. \tag{11.12}$$

Запишем эту формулу в развернутом виде:

$$\begin{aligned} &x'^1 = b^1_1 x^1 + b^{11}_2 e^2 + ... + b^1_n x^n, \\ &x'^2 = b^1_2 x^2 + b^{12}_2 e^2 + ... + b^2_n x^n, \\ &... \\ &x'^2 = b^1_n x^2 + b^{1\,2}_n e^2 + ... + b^n_n x^n. \end{aligned} \tag{11.13}$$

Сопоставим формулы 11.5 и 11.13. Если в формулах 11.5 коэффициенты перехода от старого базиса 11.1 к новому базису 11.4 обра- зуют матрицу A^T, в формулах 11.13 коэффициенты перехода от старых координат вектора x к его новым координатам образуют матрицу $b = A^{-1}$.

Теперь мы сформулируем первое определение тензора.

Определение 11.1. Говорят, что в линейном пространстве V^n дан *одновалентный контравариантный тензор*, если в каждом базисе указано n чисел $a^1, a^2, ..., a^n$ из поля (координат тензора), преобразующихся при переходе от базиса 11.1 к базису 11.4 по закону

$$a'^i = b^j_j a^j, \tag{11.14}$$

где $B = [b^j_j]$ — матрица перехода от базиса 11.4 к базису 11.1.

Термин «контравариантный», т. е. «противопреобразующийся», указывает на то, что координаты контравариантного тензора $a^1, a^2, \ldots, a^n$ преобразуются не так, как векторы базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а с помощью обратной транспонированной матрицы (ср. формулы 11.5 и 11.13). Выше мы видели, что примером одновалентного контравариантного тензора служат координаты вектора.

Рассмотрим теперь линейную функцию на линейном пространстве V^n:

$$f : V^n \to P. \tag{11.15}$$

Исходя из базиса 11.1, получаем

$$f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i) = a_i x^i,$$

где

$$a_i = f(e_i). \tag{11.16}$$

Определение 11.2. Числа 11.16 называются *координатами линейной функции f в базисе* 11.1.

Посмотрим теперь, как преобразуются координаты линейной функции f при переходе к новому базису 11.4. Имеем

$$a'_j = f(e'_j) = f(a^j_j e_j) = a^j_j f(e_j) = a^i_j a_i.$$

Итак,

$$a'_j = a^i_j a_i. \qquad (11.17)$$

Мы видим, что координаты линейной функции преобразуются так же, как базисные векторы (ср. равенства 11.7 и 11.17). Этим и объясняется употребление термина «ковариантныи», т. е. «сопреобразующийся», в следующем определении.

Определение 11.3. Говорят, что в линейном пространстве V^n дан одновалентный ковариантныи тензор, если в каждом базисе указано n чисела $a_1, a_2, ..., a_n$ из поля (координат тензора), преобразующихся при переходе от базиса 11.1 к базису 11.4 по закону 11.17, где $A = [a^i_j]$ — матрица перехода от базиса 11.1 к базису 11.4.

Выше было показано, что координаты линейной функции образуют одновалентный ковариантныи тензор. Рассмотрим введенную билинейную функцию ϕ на линейном пространстве V^n. Элементы матрицы этой билинейной функции в базисе 11.1 задаются с помощью формулы

$$a_{ij} = \phi(e_i, e_j). \qquad (11.18)$$

Назовем числа 11.18 *координатами билинейной функции ϕ в базисе 11.1* и найдем закон преобразования этих координат при пере ходе к базису 11.4. Имеем

$$a'_{kl} = \phi(e_k, e_l) = \phi(a^i_k e_i, a^j_l e_j) = a^i_k a^j_l \phi(e_i, e_j) = a^i_k a^j_l a_{ij}$$

Итак,

$$a'_{kl} = a^i_k a^j_l a_{aj}. \qquad (11.19)$$

Определение 11.4. Говорят, что в линейном пространстве V^n дан *двухвалентный ковариантный тензор*, если в каждом базисе указано n^2 чисел a_{ij}, преобразующихся при переходе от базиса 11.1 к базису11.4 по закону 11.19.

Выше было показано, что координаты билинейной функции образуют двухвалентный ковариантный тензор.

Теперь мы сформулируем понятие тензора общего вида.

Определение 11.5. Говорят, что в линейном пространстве V^n дан $(p+q)$*-валентный тензор*, p раз ковариантный и q раз контравариантный, или типа (p,q), если в каждом базисе указаны n^{p+q} чисел $a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ (координаты тензора), преобразующихся при переходе от базиса 11.1 к базису 11.4 по закону

$$a'^{l_1 l_2 \dots l_q}_{k_1 k_2 \dots k_p} = a^{i_1}_{k_1} \dots a^{i_p}_{k_p} b^{l_1}_{j_1} \dots b^{l_q}_{j_q} a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p} \qquad (11.20)$$

Суть закона преобразования 11.20 состоит в том, что каждый нижний индекс тензора $a^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ участвует в преобразовании один раз по схеме ковариантного тензора 11.17, а каждый верхний индекс — один раз по схеме контравариантного тензора 11.14.

11.2. Алгебраические операции над тензорами

Как известно, при сложении векторов складываются их соответствующие координаты, а при сложении линейных операторов — их матрицы. Этими свойствами можно воспользоваться при определении операции сложения для тензоров.

Пусть в пространстве V^n заданы два тензора одного и того же типа, например 2, 1). Их координаты c^i_{jk} и d^i_{jk} в базисах:

$$e_1, e_2, ..., e_n, \tag{11.21}$$

$$e'_1, e'_2, ..., e'_n \tag{11.22}$$

записываются соответственно в виде:

$$c'^l_{rs} = a^j_r a^k_s b^l_i c^i_{jk} \tag{11.23}$$

$$d'^l_{rs} = a^j_r a^k_s b^l_i d^i_{jk}. \tag{11.24}$$

Рассмотрим теперь в каждом базисе систему чисел, полученных при сложении соответствующих координат данных тензоров:

$$h^i_{jk} = c^i_{jk} + d^i_{jk},\ \ h'^l_{rs} = c'^l_{rs} + d'^l_{rs}.$$

Чтобы получить закон преобразования чисел h^i_{jk} при переходе от базиса 11.21 к базису 11.22, достаточно сложить левые и правые части равенств 11.23 и 11.24 и воспользоваться свойством дистрибутивности суммы. В результате имеем

$$h'^{l}_{rs} = a^j_r a^k_s b^l_i h^i_{jk}.$$

Итак, числа h^i_{jk} преобразуются по закону тензора типа $(2,1)$. Аналогично рассматривается общий случай тензоров типа (p,q).

Определение 11.6. *Суммой двух тензоров одного и того же типа* (p,q) *называется тензор того же типа, полученный в результате сложения соответствующих координат данных тензоров в каждом базисе.*

Аналогично обосновывается и следующее

Определение 11.7. *Произведением тензора типа* (p,q) *на число* $\lambda \in P$ называется тензор того же типа, полученный умножением координат данного тензора в каждом базисе на число λ.

Теперь введем операцию умножения для двух произвольных тензоров, заданных в пространстве V^n. Пусть, например, заданы тензоры типа $(1,2)$ и типа $(2,0)$. Возьмем их координаты c^i_{jk}, g^{lm} в базисах 11.21 и 11.22 соответственно:

$$c'^{t}_{rs} = a^j_r a^k_s b^t_i c^i_{jk} \tag{11.25}$$

$$g'^{uv} = b^u_l b^v_m g^{lm}. \tag{11.26}$$

Рассмотрим теперь в каждом базисе систему чисел, полученных в результате умножения каждой координаты первого тензора на каждую координату второго тензора:

$$e^{ilm}_{jk} = c^{i}_{jk} g^{lm}, \;\; e'^{tuv}_{rs} = c'^{t}_{ts} g'^{uv}.$$

Чтобы получить закон преобразования чисел c^{ilm}_{jk}, достаточно перемножить левые и правые части равенств 11.25 и 11.26 и воспользоваться известными свойствами операции суммирования. В результате имеем

$$e'^{tuv}_{rs} = a^{j}_{r} a^{k}_{s} b^{t}_{i} b^{u}_{l} b^{v}_{m} e^{ilm}_{jk}.$$

Мы видим, что при умножении получился тензор типа $(2, 3)$.

Итак, можно сформулировать следующее

Определение 11.8. *Произведением тензора типа* (p, q) *на тензор типа* (r, s) называется тензор типа $(p + r, q + s)$, который получается в результате умножения в каждом базисе каждой координаты первого тензора на каждую координату второго тензора.

Теперь рассмотрим так называемую *операцию свертывания тензоров*. Пусть задан тензор, имеющий по крайней мере один верхний и один нижний индекс, например c^{ij}_{kl}. Выберем какой-нибудь из верхних индексов, например первый, и какой-нибудь из нижних индексов, например второй. Отберем те координаты тензора, для которых два выбранных индекса имеют одинаковые значения 1, 2, ..., n, и просуммируем их при фиксированных значениях остальных индексов:

$$c_{k1}^{1j} + c_{k2}^{2j} + \ldots + c_{kn}^{nj} = c_{sj}^{ks}.$$

Эта сумма зависит только от индексов j и k, и ее можно обозначить c_k^j. Итак,

$$c_{ks}^{sj} = c_k^j. \tag{11.27}$$

Такое же суммирование проведем и в любом другом базисе. Например, для базиса 11.22 получим

$$c'^{\,sr}_{ts} = c'^{\,t}_{r}. \tag{11.28}$$

Покажем теперь, что построенные нами системы чисел c_k^j, c'^r_t, ... образуют тензор типа $(1, 1)$, т. е. тензор, имеющий по сравнению с исходным на один верхний индекс и на один нижний индекс меньше. Запишем закон преобразования координат исходного тензора:

$$c'^{\,ur}_{tv} = a_t^k a_v^l b_i^u b_j^r c_{kl}^{ij}$$

Придадим индексам u и v одинаковые значения и проведем суммирование:

$$c'^{\,sr}_{ts} = a_t^k a_s^l b_i^s b_j^r c_{kl}^{ij} \tag{11.29}$$

В правой части равенства 11.29 происходит суммирование по пяти индексам: i, j, k, l, s. Выполним сначала суммирование по индексу s. Так как матрицы $A = [a_k^l]$ и $B = [b_t^r]$ взаимно обратные, то

$$a_s^l b_i^s = \delta_i^l = \begin{cases} 1, & \text{если } l = i, \\ 0, & \text{если } l \neq i. \end{cases} \tag{11.30}$$

Подставляя формулу 11.30 в равенство 11.29, получаем

$$c'^{sr}_{ts} = a_t^k \delta_i^l b_j^r c_{kl}^{ij}$$

и, далее,

$$c'^{\ sr}_{ts} = a_t^k b_j^r c_{ki}^{ij} \tag{11.31}$$

В силу равенств 11.27 и 11.28 равенство 11.31 принимает вид т. е. числа c_k^j образуют тензор типа $(1, 1)$. Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее

Определение 11.9. Получение тензора c_k^j из тензора c_{kl}^{ij} по формуле 11.27 называется *операцией свертывания тензора* c_{kl}^{ij} по первому верхнему и второму нижнему индексам.

Это определение применимо и к произвольному тензору типа (p, q) если $p > 0$ и $q > 0$. В результате свертывания получается тензор типа $(p-1, q-1)$.

Операция свертывания является важным источником получения инвариантов, т. е. тензоров типа $(0, 0)$. Если выполнить последовательно p свертываний тензора типа (p, p) по парам разнотипных индексов, получится тензор типа $(0, 0)$.

Возьмем, например, тензор c^l_j, образованный матрицами линейного оператора f пространства V^n. Свертывание приводит к инварианту

$$c = c^i_i = c^1_1 + c^2_2 + \ldots + c^n_n,$$

который по аналогии со следом матрицы может быть назван *следом тензора* c^i_j.

Линейная функция на пространстве V^n

$$f(x) = a_i x^i$$

может рассматриваться как результат умножения тензора a_i на тензор x^j и последующего свертывания. Аналогично билинейная функция

$$g(x, y) = g_{ij} x^i y^j$$

может рассматриваться как результат умножения тензоров g_{ij}, x^k, y^l и последующего двукратного свертывания.

Определение 11.10. Тензор c_{ij} называется *симметрическим*, если $c_{ij} = c_{ji}$.

Аналогично произвольный тензор $c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$, содержащий по крайней мере два однотипных индекса, называется *симметрическим по паре таких индексов*, например j_1 и j_q, если

$$c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_q j_2 \cdots j_1}.$$

11.3. Тензоры в евклидовых пространствах

Пусть E^n — n-мерное линейное евклидово пространство. Все, что было сказано о тензорах в произвольном линейном пространстве, остается верным и для пространства E^n. Однако благодаря наличию скалярного произведения появляются новые возможности для операций над тензорами.

Билинейную функцию, задающую в пространстве E^n скалярное произведение, обозначим через g. Выберем в пространстве E^n какой-либо базис

$$e_1, e_2, ..., e_n. \tag{11.32}$$

Как и в предыдущих параграфах, координаты произвольного вектора x в базисе 11.32 будем обозначать $x^1, x^2, ..., x^n$. Заметим, что они порождают один раз контравариантный тензор. Если $y(y^1, y^2, ..., y^n)$ — еще один вектор из E^n, то, как известно

$$g(x, y) = g_{ij}x^i y^j,$$

где

$$g_{ij} = (e_i, e_j) \tag{11.33}$$

являются координатами дважды ковариантного тензора.

Определение 11.11. Тензор, определяемый формулой 11.33, называется *ковариантным метрическим тензором.*

Как известно, тензор g_{ij} является симметрическим и матрица $G = (g_{ij})$ — невырожденная. Рассмотрим в каждом базисе матрицу G^{-1} обратную матрице G. Элементы матрицы G^{-1} будем обозначать через g^{ij}.

Теорема 11.1. *Элементы матрицы G^{-1} заданные в каждом базисе, образуют дважды контравариантный симметрический тензор.*

Возьмем наряду с базисом 11.32 еще один базис

$$e'_1, e'_2, ..., e'_n. \tag{11.34}$$

Пусть $A = (a^i_j)$ — матрица перехода от базиса 11.32 к базису 11.34, а $B = (b^i_j)$ — обратная матрица перехода от базиса 11.34 к базису 11.32. Рассмотрим дважды контравариантный тензор, имеющий в базисе 11.32 координаты g^{ij}, а в базисе 11.34 — координаты

$$g'^{kl} = b^k_l b^l_j g^{ij}.$$

Так как g_{st} — координаты дважды ковариантного тензора в базисе 11.32, то координаты этого тензора в базисе 11.34 задаются формулой

$$g'_{lp} = a^s_l a^t_p g_{st}.$$

Имеем

$$g'^{kl} g'_{lp} = b^k_i b^l_j g^{ij} a^s_l a^t_p g_{st} = b^k_i \delta^s_j g^{ij} a^t_p g_{st} =$$
$$= b^k_i a^t_p g^{ij} g_{jt} = b^k_i a^t_p \delta^i_t = b^k_i a^i_p = \delta^k_p.$$

Итак, показано, что координаты g'^{kl} в базисе 11.34 тензора, определяемого матрицей G^1 совпадают с элементами матрицы, обратной матрице ковариантного метрического тензора в любом базисе. Симметричность матрицы G^{-1} следует из симметричности матрицы G.

Определение 11.12. Дважды контравариантный тензор, определяемый элементами g^{ij} матрицы G^{-1} называется *контравариантным метрическим тензором.*

Пусть задан произвольный вектор

$$x = x^i e_i. \tag{11.35}$$

Его координаты, взятые в каждом базисе, образуют один раз контравариантный тензор. Рассмотрим теперь тензор, полученный перемножением тензоров g_{ij} и x^k последующим свертыванием:

$$x_i = g_{ij} x^j. \tag{11.36}$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ полученные по формуле 11.36 в каждом базисе, образуют один раз ковариантный тензор. Выясним, как связаны эти числа с вектором x:

$$x_i = g_{ij} x^j = (e_i \cdot e_j) x^j = e_i \cdot x. \tag{11.37}$$

Итак, x_i равно скалярному произведению вектора x на базисный вектор e_i.

Определение 11.13. Числа $x^1, x^2, ..., x^n$, определяемые формулой 11.35, называются *контравариантными координатами вектора* x. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ заданные формулой 11.37 называются *ковариантными координатами этого вектора.*

Формулы 11.36 выражают ковариантные координаты вектора x через его контравариантные координаты. Чтобы найти выражение контравариантных координат через ковариантные, умножим тензор 11.36 на тензор g^{kl} и произведем свертывание:

$$g^{ki}x_i = g^{ki}g_{ij}x^j = \delta^k_j x^j = x^k. \tag{11.38}$$

В случае ортонормированного базиса 11.32 матрицы тензоров g_{ij} и g_{ij} обращаются в единичную матрицу, и ковариантные координаты совпадают с контравариантными.

Определение 11.14. Переход от тензора x^j к тензору x_i по формуле 11.37 называется *операцией опускания индекса*. Обратный переход от тензора x_i к тензору x^j по формуле 11.38 называется *операцией поднятия индекса.*

Эти две операции можно перенести на тензоры любого типа. Прежде всего изменим способ нумерации нижних и верхних индексов тензора. До сих пор мы проводили раздельную нумерацию нижних и верхних индексов. Например, у тензора a^{ij}_{klm} среди нижних индексов k стоит на первом месте, l — на втором, m — на третьем, а среди верхних индексов на первом месте стоит i и на втором j. В дальнейшем нумерация мест нижних и верхних индексов будет производиться в совокупности. Если, например, первый индекс стоит вверху, то первое место внизу остается пустым, что отмечается точкой. Аналогично для нижних индексов. Запись $a^{i\cdot\cdot j}_{\cdot kl\cdot m}$ обозначает тензор, у которого на первом месте стоит верхний индекс, на втором и третьем — нижние индексы, на четвертом — верхний и на пятом — нижний индексы. У этого тензора можно, например, опустить первый индекс:

$$a^{\cdot\cdot\cdot j}_{skl\cdot m} = g_{si} a^{i\cdot\cdot j}_{\cdot kl\cdot m}.$$

У вновь полученного тензора можно поднять последний индекс:

$$a^{\cdot\cdot\cdot jt}_{skl\cdot} = g^{tm} a^{\cdot\cdot\cdot j}_{skl\cdot m}.$$

Аналогично выполняются операции поднятия и опускания индексов у тензора произвольного типа.

11.4. Практическая часть

11.4.1 Практическое занятие по теме «Общее определение тензора»

1. Найти значение $F(v, f)$ тензора $F = e^1 \otimes e_2 + e^2 \otimes (e_1 + 3e_3)$, где $v = e_1 + 5e_2 + 4e_3$, $f = e^1 + e^2 + e^3$.

2. Найти значение тензора $A\otimes B - B\otimes A$ от набора $v_1,\dots,v_5$, где

1) $A = e^1\otimes e^2 + e^2\otimes e^3 + e^2\otimes e^2$, $B = e^1\otimes e^1\otimes(e^1 - e^3)$, $v_1 = e_1, v_2 = e_1 + e_2, v_3 = e_2 + e_3, v_4 = v_5 = e_2$;

2) $A = e^1\otimes e^2 + e^2\otimes e^3 + e^3\otimes e^1$, все координаты тензора B равны 1 и $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_2 + e_3, v_3 = e_3 + e_1, v_4 = v_5 = e_2$.

3. Найти значение $F(v,v,v,f,f)$ тензора $F\in T_3^2(V)$, если все координаты тензра F равны 3, $v = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$, $f = e^1 - e^4$.

4. Найти ранг билинейных функций, представленных тензорами:

1) $(e^1+e^2)\otimes(e^1+e^3) - e^1\otimes e^1 - e^2\otimes e^2$;

2) $(e^1-2e^3)\otimes(e^1+3e^2-e^4) + (e^1-2e^3)\otimes e^4$;

3) $(e^1+e^3)\otimes(e^2+e^4) - (e^2-e^4)\otimes(e^1-e^3)$.

11.4.2 Практическое занятие по теме «Алгебраические операции над тензорами»

1. Найти свертку тензора:

1) $(e_1+3e_2-e_3)\otimes(e^1-2e^3+3e^4) - (e_1+e_3)\otimes(e^1-3e^3+e^4)$;

2) $(e_1+2e_2+3e_3)\otimes(e^1+e^2-2e^3) - (e_1-e_2+e_4)\otimes(e^2-2e^3-3e^4)$;

3) $e_1\otimes(e^1+e^2+e^3+e^4) + e_2\otimes(e^1+2e^2+3e^3+4e^4) + 2e_3\otimes(e^1-e^2-e^4)$.

2. Найти Жорданову форму матрицы оператора $\varphi\otimes\psi$, если матрицы операторов φ и ψ имеют жордановы формы:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$;

3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Вычислить:

1) $(e_1 + 2e_2 + 3e_3) \wedge (e_1 - e_2 + 3e_3) + (e_1 - 3e_3) \wedge (2e_1 + 3e_2 + e_3)$;

2) $a \wedge a$, где $a = e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_4$;

3) $(2e_1 + 3e_2 + e_3) \wedge (e_1 + 2e_2 - 3e_3) \wedge (e_1 + 3e_2 + 2e_3)$;

4) $(2e_1 - 3e_2 + 5e_3 + 4e_4) \wedge (-5e_1 + 7e_2 - 9e_3 - 6e_4) \wedge (e_1 - e_2 + 2e_3 + e_4) \wedge (2e_1 + 4e_2 + 7e_3 + 2e_4)$.

11.4.3 Практическое занятие по теме «Тензоры в евклидовых пространствах»

1. Вычислить значения внешней формы ω от набора векторов:

1) $\omega = e^1 \wedge e^2 + 2e^2 \wedge e^3, v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (2, 3, 4)$;

2) $\omega = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^3, v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (2, 1, 2)$;

3) $\omega = 2e^1 \wedge e^2 + 3e^2 \wedge e^1, v_1 = (1, 2, 4), v_2 = (1, 2, 5)$.

2. Вычислить значения внешней формы ω от набора векторов:

1) $\omega = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + 2e^3 \wedge e^2 \wedge e^4 + e^4 \wedge e^3 \wedge e^1$, $v_1 = (1, 1, 1, 3)$, $v_2 = (1, 2, 2, 4)$, $v_3 = (1, 2, 3, 6)$;

2) $\omega = e^1 \wedge 2e^2 \wedge 3e^3 + 2e^2 \wedge e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^1 \wedge e^3$, $v_1 = (2, 1, 2, 4)$, $v_2 = (2, 2, 2, 1)$, $v_3 = (1, 1, 5, 3)$;

3) $\omega = e^1 \wedge e^2 \wedge 3e^4 + 2e^1 \wedge 2e^2 \wedge 2e^4 + e^2 \wedge e^3 \wedge e^4$, $v_1 = (1, 1, 3, 6)$, $v_2 = (3, 2, 1, 2)$, $v_3 = (5, 1, 3, 1)$.

Кафедра
АГ и ММ

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Понятие матрицы. Операции сложения матриц, умножения матрицы на число, произведения матриц и их свойства.

2. Элементарные преобразования строк матрицы. Ранг матрицы. Понятие обратной матрицы. Первый способ вычисления обратной матрицы.

3. Определитель квадратной матрицы и его свойства. Методы вычисления определителей. Определитель произведения матриц.

4. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о существовании обратной матрицы. Второй способ вычисления обратной матрицы.

5. Понятие геометрического вектора. Операция сложения векторов, умножения вектора на число и их свойства. Линейное пространство геометрических векторов.

6. Базис на прямой, на плоскости, в пространстве. Разложение вектора по базису. Координаты вектора.

7. Аффинная система координат, прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве. Преобразования координат на плоскости.

8. Проекция вектора на ось. Скалярное произведение векторов и его свойства. Векторное произведение векторов и его приложения.
9. Смешанное произведение векторов и его приложения. Критерии коллинеарности, компланарности и ортогональности векторов.
10. Двойное векторное произведение. Тождество Якоби.
11. Каноническое и параметрическое уравнения прямой на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой на плоскости.
12. Взаимное расположение прямых на плоскости. Уравнение прямой по точке и нормальному вектору. Угол между прямыми. Вычисление расстояния от точки до прямой.
13. Параметрические уравнения плоскости. Уравнение плоскости, заданной точкой и двумя неколлинеарными векторами. Общее уравнение плоскости. Нормальный вектор плоскости.
14. Прямая в пространстве. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве. Преобразование общих уравнений прямой к каноническому виду.
15. Взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых в пространстве.

16. Определение эллипса. Вывод канонического уравнения эллипса. Фокальные радиусы эллипса. Свойства эллипса и его изображение в системе координат.
17. Определение гиперболы. Вывод канонического уравнения гиперболы. Фокальные радиусы гиперболы, асимптоты. Свойства гиперболы и ее изображение в системе координат.
18. Определение параболы. Вывод канонического уравнения параболы. Фокальный параметр параболы. Свойства параболы и ее изображение в системе координат.
19. Директрисы и эксцентриситет эллипса, гиперболы, параболы. Директориальное свойство линий второго порядка.
20. Полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы. Параметрическое уравнение эллипса. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы.
21. Классификация поверхностей второго порядка, их изображения.
22. Метод сечений для исследования формы поверхности второго порядка. Эллипсоид и его свойства. Однополостный и двуполостный гиперболоиды. Параболоиды и их свойства.
23. Определение линейного пространства и простейшие следствия из аксиом. Примеры линейных пространств.

24. Понятие линейно зависимой и линейно независимой системы векторов линейного пространства. Теоремы о линейной зависимости.

25. Базис и размерность линейного пространства. Разложение вектора по базису. Координаты вектора в линейном пространстве.

26. Преобразование координат вектора при переходе от одного базиса линейного пространства к другому. Матрица перехода.

27. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств.

28. Линейная оболочка. Формула размерности Грассмана.

29. Ранг матрицы и размерность линейной оболочки ее столбцов. Элементарные преобразования над матрицами.

30. Системы линейных уравнений. Матричный метод решения систем линейных уравнений.

31. Системы линейных уравнений. Системы крамеровского типа. Правило Крамера.

32. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Критерий Гаусса.

33. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. Критерий Кронекера-Капелли.

34. Пространство решений системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.

35. Скалярное произведение и его свойства. Евклидово пространство.

36. Длина вектора, угол между векторами. Ортогональность векторов.

37. Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации. Ортонормированный базис.

38. Изоморфизм евклидовых пространств и его свойства.

39. Линейные операторы. Свойства линейного оператора.

40. Образ и ядро линейного оператора. Ранг и дефект.

41. Матрица линейного оператора в данном базисе.

42. Связь между координатными столбцами образа и прообраза линейного оператора.

43. Связь меду матрицами линейного оператора относительно разных базисов. Подобие матриц.

44. Действия над линейными операторами. Свойства действий над линейными операторами.

45. Обратный линейный оператор и его свойства. Понятие линейной матрицы.
46. Собственные вектора и собственное значение линейного оператора. Характеристическое уравнение линейного оператора.
47. Линейные операторы с простым спектром. Диагональные матрицы.
48. Жорданова нормальная форма матрицы.
49. Квадратичные формы.
50. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
51. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Закон инерции.
52. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
53. Понятие группы. Основные свойства групп. Примеры групп.
54. Общее определение тензора.
55. Алгебраические операции над тензорами.

Литература

1. Аналитическая геометрия в примерах и задачах : учеб. пособие / Н. Г. Абрашина-Жадаева [и др.]. – Минск : РИВШ, 2008. – 156 с.

2. Бузланов, А. В. Алгебра и теория чисел. Линейная алгебра : практическое пособие по выполнению лабораторных работ для студентов математических специальностей вузов / А. В. Бузланов, С. Ф. Каморников, В. С. Монахов. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 144 с.

3. Грицук Д. В. Компьютерная алгебра : курс лекций / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук; М-во образ. РБ, Брестский гос. ун-т им. А. С. Пушкина. — Брест: БрГУ имени А. С. Пушкина, 2017. — 112 с.

4. Грицук, Д.В. Компьютерная алгебра / Д.В. Грицук, А.А. Трофимук // 1-02 05 01 «Математика и информатика» физико-математического факультета, Брест, объем — 2,97 Мб, 1 файл, 270 с., 2018 (рег.свид. №2271815426 от 28.04.2018, http://www.brsu.by/div/elektronnye-uchebnye-izdaniya-1).

5. Кононов, С. Г. Аналитическая геометрия : учебное пособие для математических спец. вузов / С. Г. Кононов – Минск : БГУ, 2014. – 238 с.

6. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченкою – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 576 с.

7. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия : часть 1. / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. — Минск : Амалфея, 2001. — 400 с.

8. Милованов, М. В. Алгебра и аналитическая геометрия : часть 2. / М. В. Милованов, Р. И. Тышкевич, А. С. Феденко. — Минск : Амалфея, 2001. — 352 с.

9. Монахов, В. С. Алгебра и теория чисел : практикум : учеб. пособие. в 2 ч. / В. С. Монахов, А. В. Бузланов. — Минск : Изд. центр БГУ, 2007. — Ч. 1. — 264 с.

10. Панов, А.Н. Задачи по линейной алгебре и геометрии: учеб. пособие / А.Н. Панов; Федер. агентство по образованию. – Самара: Изд-во "Самарский университет", 2006. – 40 с

11. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : тридцать пять лекций : в 2 ч. / Д. Т. Письменный. — 9-е изд. — М. : Айрис-Пресс, Ч.1. — 2008. — 288 с.

12. Силаева, З. Н. Линии второго порядка : пособие для студентов физ.-мат. фак. / З. Н. Силаева; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. —

Брест : БрГУ, 2014. – 39 с.

13. Силаева, З. Н. Классификация линий второго порядка / З. Н. Силаева // Электронно-методическое пособие для студентов стационара и ОЗО, Брест, объем – 2,1 Мб, 1 файл, 32 с., 2 п.л., 2012 (свидетельство №10/2012 от 03.10.2012, http://www.brsu.by/div/elektronnye-uchebnye-izdaniya-1).

14. Силаева, З. Н. Линии второго порядка / З. Н. Силаева // Электронно-методическое пособие для студентов стационара и ОЗО, Брест, объем – 2,2 Мб, 1 файл, 31 с., 2 п.л., 2013 (свидетельство №16/2013 от 18.10.2013, http://www.brsu.by/div/elektronnye-uchebnye-izdaniya-1).

15. Хомицкий, Д.В. Сборник задач по линейной алгебре (практикум) / Д.В. Хомицкий, А.С. Гаревский, А.В. Тележников – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2010. – 51 с.

16. Шнеперман, Л.Б. Сборник задач по алгебре и теории чисел: учеб. пособие / Л.Б. Шнеперман – Мн.: выш. школа, 1982. – 223 с.