УДК 371.312:517.0

М.А. Калавур

АБ ПРАБЛЕМАХ УВЯДЗЕННЯ ПАНЯЦЦЯ ПЕРШАІСНАЙ У ШКОЛЬНЫМ КУРСЕ МАТЭМАТЫКІ

На аснове аналізу школьных падручнікаў матэматыкі і падручнікаў па вышэйшай матэматыцы разглядаюцца праблемы ўвядзення паняцця першаіснай. Прапануецца эфектыўная методыка ўвядзення паняцця першаіснай у школьным курсе матэматыкі.

Аналіз азначэнняў паняцця «першаісная» ў школьных падручніках паказвае, што пры ўвядзенні дадзенага паняцця ўзнікаюць метадычныя цяжкасці. Разгледзім гэтае пытанне падрабязней.

У школьных падручніках для базавых класаў уводзіцца наступнае азначэнне.

Азначэнне. Першаіснай функцыі f(x) на прамежку I называецца функцыя F(x), калі для любога x з прамежка I выконваецца роўнасць $F'(x)=$ f(x).

Пасля гэтага ў якасці прамежкаў разглядаюцца толькі інтэрвалы. Узнікае пытанне, чаму не выкарыстоўваюцца іншыя прамежкі. Гэта тлумачыцца тым, што для інтэрвалу не трэба рабіць агаворкі аб існаванні вытворнай у любым пункце прамежку. Для кожнага пункта інтэрвалу існуе ваколле, таму мы можам гаварыць аб існаванні вытворнай у кожным пункце інтэрвалу. Гэтымі ўласцівасцямі не валодае адрэзак. Мы не ведаем аб паводзінах функцыі злева ад левага канца адрэзка і справа ад правага канца. Таму пры ўвядзенні паняцця першаіснай на прамежку трэба рабіць агаворку аб існаванні вытворнай у крайніх пунктах прамежку. Напрыклад, у падручніках для класаў з паглыбленым вывучэннем матэматыкі ўводзіцца наступнае азначэнне.

Азначэнне. Функцыю F, зададзеную на некаторым прамежку X, называюць першаіснай для функцыі f, зададзенай на тым жа прамежку, калі для ўсіх $x\in X$ выконваецца роўнасць $F'(x)=$ f(x), або, што тое ж самае, dF(x)=f(x)dx.

Заўвага. У канцавых пунктах прамежку X гаворка ідзе аб аднабаковых вытворных.

У даведніках па матэматыцы ўводзіцца наступнае азначэнне.

Азначэнне. Функцыя F(x), дыферэнцаваная на некаторым інтэрвале, называецца першаіснай функцыяй для функцыі f(x) на гэтым інтэрвале, калі для кожнага x F'(x)=f(x).

Прыклады. f(x)=cosx, F(x)=sinx, $x\in(-\infty;\infty)$.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ F(x)=\arcsin x,\ x\in(-1;1).$$

$$f(x)=1/x,\ F(x)=\ln|x|\ (x\neq 0)=\begin{cases}\ln x, & x\in(0;\infty),\\ \ln(-x), & x\in(-\infty;0).\end{cases}$$

Такое азначэнне першаіснай здаецца найбольш правільным, таму што для любога пункта інтэрвалу можна знайсці ваколле гэтага пункта, што дазваляе без ніякіх агаворак весці размову аб вытворнай функцыі.

Калі разгледзець падручнікі па вышэйшай матэматыцы, то і там для азначэння паняцця першаіснай функцыі выкарыстоўваецца паняцце інтэрвалу. У падручніку па дыферэнцыяльным і інтэгральным злічэнні С. Банаха ўводзіцца наступнае азначэнне.

Азначэнне. Кажуць, што функцыя F(x) з'яўляецца першаіснай функцыяй функцыі f(x) у некаторым інтэрвале (канечным ці бясконцым), калі ў кожным пункце гэтага інтэрвалу $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

Заслугоўвае ўвагі наступны прыклад. Функцыя $y = \sqrt{1-x^2}$ з'яўляецца першаіснай функцыі $y = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ у інтэрвале (-1;1), таму што $\frac{d(\sqrt{1-x^2})}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$.

Першаісную функцыю называюць таксама нявызначаным інтэгралам і абазначаюць сімвалам $\int f(x)dx$.

Паняцце першаіснай мэтазгодна ўводзіць задачным метадам. Пры навучанні праз задачы фарміраванне паняцця ўяўляе сабою актыўную дзейнасць, скіраваную на ўстанаўленне істотных прыкмет аб'екта і лагічных сувязяў паміж імі. На этапе замацавання рашаюцца задачы, дзе веды аб новым паняцці прымяняюцца ў спецыфічных сітуацыях. Пры навучанні паняццям праз задачы могуць выкарыстоўвацца некаторыя метады з іншых навук. Сярод такіх метадаў можна вылучыць ітэрацыйны метад – метад паслядоўных набліжэнняў.

Напрыклад, пры ўвядзенні паняцця першаіснай матывацыйнай можа быць наступная задача.

Задача. Скорасць пункта, які рухаецца прамалінейна, вызначаецца законам $v(t) = 3t + t^2$. Знайсці каардынату x(t) пункта як функцыю ад часу.

Рашэнне гэтай задачы прыводзіць да неабходнасці разгляду аперацыі, адваротнай дыферэнцаванню. Пасля таго як у вучняў узнікла цікавасць да вывучэння новай аперацыі, можна ўвесці нястрогае азначэнне першаіснай, для знаходжання якой выкарыстоўваецца гэтая новая аперацыя.

Азначэнне. Функцыя F(x) называецца першаіснай для функцыі f(x), калі выконваецца $F'(x) = f(x)$.

Пасля гэтага з дапамогай простых задач фармуецца ўяўленне аб новым паняцці. Рашаюцца задачы з дапамогай дыферэнцавання.

Задача. Даказаць, што x^2 ёсць першаісная для 2x; $x^2/2$ – першаісная для x.

Далей робім удакладненне азначэння. Разгледзім задачу.

Задача. Даказаць, што F(x)= $2\sqrt{x}$ з'яўляецца першаіснай для $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Пры рашэнні гэтай задачы бачым, што функцыя F(x) вызначана на прамежку $[0;+\infty)$, а для функцыі f(x) трэба дадаткова выключыць пункт 0. Значыць, нельга гаварыць аб першаіснай функцыі f(x) на ўсёй лікавай прамой. Адсюль вынікае, што паняцце першаіснай трэба разглядаць на пэўным прамежку, а дакладней – на інтэрвале. Гэта значыць, наша азначэнне трэба ўдакладніць.

Азначэнне. Функцыя F(x) называецца першаіснай для функцыі f(x) на зададзеным інтэрвале, калі для ўсіх x з гэтага інтэрвалу выконваецца $F'(x) = f(x)$.

З дапамогай гэтага азначэння можна рашаць задачы.

Задача. Ці з'яўляецца функцыя $F(x) = \frac{1}{x}$ першаіснай для функцыі $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ на прамежку $(-\infty;+\infty)$?

Пры рашэнні бачым, што роўнасць $F'(x)$=f(x) не выконваецца ў пункце 0. Значыць, F(x) не з'яўляецца першаіснай для функцыі f(x) на прамежку $(-\infty;+\infty)$.

Задачы на замацаванне дакладнага паняцця першаіснай дзеляцца на тры класы.

1. Задачы на доказ таго, што адна функцыя з'яўляецца першаіснай для другой функцыі на ўказаным прамежку.
2. Задачы на праверку таго, ці з'яўляецца дадзеная функцыя першаіснай для другой дадзенай функцыі на ўказаным прамежку.
3. Задачы на знаходжанне першаіснай для простых функцый.

Разгледзім прыклады.

<u>Задача</u>. Даказаць, што F(x)=$\sqrt{-x}$ з'яўляецца першаіснай для $f(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$ на прамежку $(-\infty\,;0)$.

<u>Рашэнне.</u> Па ўмове задачы x<0, значыць, -x>0, F(x)=$\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)$, $F'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot(-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-x)'=-\dfrac{1}{2}(-x)^{-\frac{1}{2}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$. Для ўсіх $x\in(-\infty;0)$ выконваецца роўнасць $F'(x)$=f(x), адсюль вынікае, што фукцыя F(x) з'яўляецца першаіснай для f(x) на ўказаным прамежку.

<u>Задача.</u> Даказаць, што $F(x)=\sin^2 x$ з'яўляецца першаіснай для $f(x)=\sin 2x, x\in(0;+\infty)$.

<u>Рашэнне</u>. $F'(x)=2\sin x(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x=f(x)$. $F'(x)=f(x)$ для ўсіх $x\in(0;\infty)$, таму $F(x)$ ёсць першаісная для $f(x)$ на ўказаным прамежку.

Другой першаіснай для дадзенай функцыі можа быць $F(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x,\ F'(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x(2x)'=\sin 2x.$

У працэсе рашэння задач трэцяга класа ўводзіцца паняцце новай аперацыі – інтэгравання. Пры такім падыходзе спачатку ўводзіцца паняцце выніку аперацыі, а затым паняцце самой аперацыі. Прычым падыход заснаваны на выкарыстанні міжпрадметных сувязяў з фізікай.

Неабходна падкрэсліць, што знаходжанне першаіснай функцыі $F(x)$ для функцыі $f(x)$, зададзенай на прамежку I, нярэдка аказваецца складанай задачай, таму што яна зводзіцца да адгадвання рашэння раўнання $F'(x)=f(x)$.

Для знаходжання першаіснай зададзенай функцыі трэба добра ведаць табліцу вытворных элементарных функцый, правілы дыферэнцавання і ўмець прымяняць іх у адваротнай паслядоўнасці. На прыкладзе канкрэтнай функцыі пакажам правіла знаходжання першаіснай найпрасцейшай функцыі, супастаўляючы аперацыі дыферэнцавання і знаходжання для яе першаіснай.

Няхай $f(x)=x^n, x\in R$, тады $f'(x)=nx^{n-1}$. Паказчык ступені пераменнай x пры дыферэнцаванні спадае на адзінку, і з'яўляецца каэфіцыент, роўны паказчыку ступені. Пры знаходжанні першаіснай для функцыі $f(x)=x^n, x\in R$ гэтая зададзеная функцыя $f(x)$ з'яўляецца яе вытворнай, значыць, першаісная функцыя $F(x)$ мае паказчык ступені на адзінку больш, г.зн. $n+1$, а каэфіцыент яе роўны $\frac{1}{n+1}$. Такім чынам, $F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}, n\neq -1.$ Пераканаемся ў правільнасці разважанняў: $F'(x)=\left(\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=\dfrac{n+1}{n+1}x^{n+1-1}=x^n=f(x).$

Для выпрацоўкі ўменя адгадвання першаісных некаторых функцый неабходна звярнуць увагу на табліцу, у якой прыведзены некаторыя найбольш ужывальныя функцыі і іх першаісныя. У правільнасці запісу прыведзеных паршаісных вучні пераконваюцца непасрэдным дыферэнцаваннем.

Пры аналізе працэсу знаходжання першаісных для функцый, якія прадстаўлены ў табліцы, неабходна перасцерагчы вучняў ад няправільнага ўражання, што аперацыя інтэгравання вельмі лёгкая. Трэба растлумачыць вучням, што прастата знаходжання першаісных для таблічных функцый тлумачыцца спецыяльным іх выбарам. Але ў агульным выпадку аперацыя інтэгравання відавочна складанейшая за аперацыю дыферэнцавання. Пры веданні табліцы вытворных і правілаў дыферэнцавання мы практычна ў стане прадыферэнцаваць любую элементарную функцыю, і вынік дыферэнцавання ёсць зноў элементарная функцыя. У той жа час не для ўсякай элементарнай функцыі першаісная ёсць элементарная функцыя. Прывядзём прыклады такіх функцый:

$$f(x)=\frac{1}{\ln x},\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ f(x)=\frac{\sin x}{x}\ \text{і г.д.}$$

Другі падыход заснаваны на выкарыстанні ўнутрыпрадметных сувязяў. Разглядаецца праблема існавання і адназначнасці матэматычных аперацый, адваротных дадзеным.

Для аперацыі складання на мностве сапраўдных лікаў заўсёды існуе адваротная аперацыя – адыманне, прычым адназначная. Але на мностве натуральных лікаў адыманне існуе не заўсёды. Для множання на мностве сапраўдных лікаў існуе адназначная адваротная аперацыя – дзяленне. Пры разглядзе аперацыі ўзвядзення ў ступень адваротная аперацыя здабывання кораня існуе не заўсёды і нават неадназначная ў некаторых выпадках. Раўнанне $x^2=9$ мае два карані 3 і –3; $\sqrt{-5}$ не існуе.

Узнікае праблема. Ці існуе аперацыя, адваротная аперацыі дыферэнцавання? Ці адназначная гэтая адваротная аперацыя?

Такая адваротная аперацыя існуе і называецца інтэграваннем, а вынік аперацыі мае назву першаісная. Узнікае пытанне, ці ўсякая функцыя мае першаісную. У курсе матэматычнага аналізу даказана, што непарыўная ў некаторым прамежку функцыя мае на гэтым прамежку першаісную (у школьным курсе гэтая тэарэма прымаецца без доказу). Такім чынам, калі функцыя $f(x)$ непарыўная на некаторым прамежку, то ў гэтым прамежку яна мае першаісную $F(x)$. Моцныя вучні могуць разгледзець цікавыя прыклады.

<u>Прыклад 1.</u> Няхай $f(x)=|x|$. Гэтая функцыя вызначаная і непарыўная на мностве ўсіх сапраўдных лікаў, але не дыферэнцаваная ў пункце x=0. Мноства ўсіх першаісных для дадзенай функцыі на прамежку $(-\infty;\infty)$ мае выгляд $F(x)=\frac{1}{2}x|x|+C$.

Разгледзім $F(x)=\frac{1}{2}x|x|$, або $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2\ \textit{пры}\ x\ge 0,\\ -\frac{1}{2}x^2\ \textit{пры}\ x<0,\end{cases}$ адсюль $F'(x)=\begin{cases}x\ \textit{пры}\ x\ge 0,\\ -x\ \textit{пры}\ x<0,\end{cases}$

або $F'(x)=|x|=f(x)$.

Трэба звярнуць увагу вучняў на тое, што першаісная для дадзенай функцыі $f(x)$ зададзеная на прамежку, на якім вызначаная функцыя $f(x)$, прычым першаісная $F(x)$ дыферэнцаваная ў кожным пункце гэтага прамежку.

Прыклад 2. Разгледзім функцыю $f(x)=|x-1|$, або $f(x)=\begin{cases} x-1, x\ge 1, \\ -x+1, x<1. \end{cases}$ Гэтая функцыя вызначаная на мностве ўсіх сапраўдных лікаў і непарыўная. Знойдзем першаісную для гэтай функцыі, якая павінна быць зададзена ў выглядзе некаторай непарыўнай функцыі:

$$F_1(x)=\frac{1}{2}x^2-x+C_1,\ x\ge 1,$$

$$F_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+C_2,\ x<1.$$

Для таго каб забяспечыць непарыўнасць $F(x)$, патрабуецца выкананне ўмовы $F_1(1)=F_2(1)$.

$$\frac{1}{2}-1+C_1=-\frac{1}{2}+1+C_2,\ C_2=C_1-1.$$

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-x+C,\ x\ge 1, \\ -\frac{1}{2}x^2+x-1+C,\ x<1. \end{cases}$$

На канкрэтных прыкладах паказваецца, што задача знаходжання першаіснай $F(x)$ для функцыі $f(x)$ на прамежку I неадназначная. Гэтае дапушчэнне лёгка ўспрымаецца вучнямі, таму што яны ведаюць правіла дыферэнцавання сумы і вытворную пастаяннай ($C'=0$).

Прыклад 3. Ці будуць функцыі $F_1(x)=\sin x,\ F_2(x)=\sin x+3,\ F_3(x)=\sin x-\frac{1}{7}$ першаіснымі для функцыі $f(x)=\cos x$ на мностве сапраўдных лікаў?

Пасля рашэння атрымаем гіпотэзу: калі $F(x)$ ёсць першаісная для $f(x)$ на прамежку I, то $F(x)+C$ таксама ёсць першаісная для $f(x)$ на прамежку I пры любых C.

Гіпотэза абгрунтоўваецца доказам тэарэмы аб асноўнай уласцівасці першаіснай.

СПІС ЛІТАРАТУРЫ

1 Виленкин Н.Я. и др. Алгебра и математический анализ для 11 класса.– М.: Просвещение, 2003.– 288с.

2 Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1980.– 976с.

3 Алгебра и начала анализа 10-11 / Под ред. А.Н.Колмогорова. – М.: Просвещение, 2002.– 320с.

4 Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление.– М.: Наука, 1966.– 436с.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 17.01.2004 г.

***M.A. Kalavur.* On Problems of Introduction of Concept Prototypal in a School Rate of Mathematics.**

On the basis of the analysis of school textbooks on mathematics and textbooks on higher mathematics the problems of introduction of prototypal concept are considered. The effective technique of prototypal introduction on a school rate of mathematics is offered.