С. А. Жилина (Москва)

Граф ортогональности алгебры контрседенионов

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $Z^{**}(\mathcal{A})$ — множество нетривиальных двусторонних делителей нуля в $\mathcal{A}$. *Графом ортогональности* $\Gamma_O(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ называют граф, множество вершин которого — $Z^{**}(\mathcal{A})$, а различные вершины a и b соединены ребром, если и только если $ab = ba = 0$ ([1]).

Пусть $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ — алгебра над полем $\mathbb{F}$ с единицей $1_{\mathcal{A}}$, на которой задана операция сопряжения $a \mapsto \bar{a}$. Будем называть это сопряжение *правильным*, если для любого элемента $a \in \mathcal{A}$ выполнено $a + \bar{a} \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$ и $a\bar{a} \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$. Далее будем считать, что на $\mathbb{F}$-алгебре $\mathcal{A}$ задана правильная операция сопряжения $a \mapsto \bar{a}$. Тогда для каждого элемента $a \in \mathcal{A}$ можно определить его *действительную часть* — $\mathfrak{Re}(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}$, *мнимую часть* — $\mathfrak{Im}(a) = \frac{a-\bar{a}}{2}$, а также *норму* — $n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a$.

Алгебра $\mathcal{A}\{\gamma\}$, полученная из $\mathcal{A}$ с помощью процедуры Кэли-Диксона с параметром $\gamma \in \mathbb{F}$, определяется как множество упорядоченных пар элементов из $\mathcal{A}$ с операциями

$$\begin{aligned} \alpha(a,b) &= (\alpha a, \alpha b); \\ (a,b) + (c,d) &= (a+c, b+d); \\ (a,b)(c,d) &= (ac + \gamma \bar{d} b, da + b\bar{c}) \end{aligned}$$

и сопряжением

$$\overline{(a,b)} = (\bar{a}, -b), \qquad a,b,c,d \in \mathcal{A},\ \alpha \in \mathbb{F}.$$

Можно проверить, что операция сопряжения на $\mathcal{A}\{\gamma\}$ является правильной, причём выполнено $\mathfrak{Re}((a,b)) = \mathfrak{Re}(a)$, $\mathfrak{Im}((a,b)) = (\mathfrak{Im}(a), b)$ и $n((a,b)) = n(a) - \gamma n(b)$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$.

Алгебра контрседенионов $\hat{\mathbb{S}}$ получается применением процедуры Кэли-Диксона с параметром $\gamma = 1$ к алгебре октонионов $\mathbb{O}$ и является естественным обобщением алгебр контркватернионов $\hat{\mathbb{H}}$ и контроктонионов $\hat{\mathbb{O}}$ ([2]), графы ортогональности которых были изучены ранее. В рамках данной работы была получена следующая теорема:

Теорема 1. $Z^{**}(\hat{\mathbb{S}}) = \{a \neq 0 \mid n(a) = 0\}$. Компоненты связности $\Gamma_O(\hat{\mathbb{S}})$ имеют один из двух видов:

1. полный двудольный граф, долями которого являются $(\mathbb{R} \setminus \{0\})a$ и $(\mathbb{R} \setminus \{0\})\bar{a}$, где $n(a) = 0$, $\mathfrak{Re}(a) \neq 0$, диаметр такой компоненты связности равен 2;
2. подграф на множестве вершин $\{a \neq 0 \mid n(a) = 0, \mathfrak{Re}(a) = 0\}$. Диаметр этой компоненты связности равен 5.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.Э. Гутерману.

Литература. [1] Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, Графы, определенные ортогональностью. Зап. научн. сем. ПОМИ, 428, (2014), 49–80; Переведено в J. Math. Sci. (N. Y.) 207, (2015), No 5, 698–717. [2] K. McCrimmon, A Taste of Jordan Algebras. Springer-Verlag New York, 2004.

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

e-mail: zhilina0sveta@gmail.com

Е. В. Зубей (Гомель, Беларусь)

О конечной группе, в которой силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Обзор о группах Шмидта представлен в [1].

Группы, в которых силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта четного порядка рассматривались в работах [2, 3]. В работе [4] указаны неабелевы композиционные факторы группы, в которой нет подгрупп Шмидта нечетного порядка.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть в группе G существует $2'$-холлова подгруппа B. Если некоторая силовская 2-подгруппа P группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B, то G либо разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2, 7)$.

Литература. [1] В. С. Монахов, Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения. Труды Укр. матем. конгресса-2001, секция 1 (2002), 81–90. [2] В. Н. Княгина, В. С. Монахов, О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта. Труды института математики и механики УрО РАН, Т. 16, 3 (2010), 130–139. [3] В. С. Монахов, Е. В. Зубей, О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта из некоторого ее добавления. Труды института математики и механики УрО РАН, Т. 24, 3 (2018), 145–154. [4] В. Н. Тютянов, П. В. Бычков, Конечные группы с нильпотентными подгруппами нечетного порядка. Проблемы физики, математики и техники, 3 (36) (2018), 84–86.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

e-mail: ekateina.zubey@yandex.ru

Д. З. Каган (Москва)

Ширина вербальных подгрупп аномальных произведений с бесконечной циклической группой

Шириной вербальной подгруппы [1] $V(G)$ относительно множества слов V называется наименьшее число $m \in \mathcal{N} \bigcup \{+\infty\}$ такое, что всякий элемент подгруппы $V(G)$ записывается в виде произведения не более чем m значений слов $V^{\pm 1}$. Рассматриваются конечные собственные множества слов V, так как в противном случае ширина $V(G)$ всегда будет конечна.

Напомним, что множество слов V называется собственным, а подгруппу $V(G)-$ собственной, если $V(F_2) \neq E$ и $V(F_2) \neq F_2$.

Понятие ширины вербальных подгрупп было введено Ю. И. Мерзляковым [1] в 1967 году. Результаты для свободных произведений были получены А. Х. Ремтуллой. Было доказано, что ширина всякой собственной вербальной подгруппы $V(G)$ будет бесконечна в свободном произведении неединичных групп $G = A * B$, за исключением $Z2 * Z2$.

В. А. Файзиевым [2] был получен результат о бесконечности ширины вербальных подгрупп в свободном произведении с объединением $A *_U B$, если $|A : U| \geq 2$, $|B :: U| \geq 3$. В последствии И.В. Добрынина [3] доказала бесконечность ширины вербальных подгрупп для свободных произведений с объединением $A *_U B$, при выполнении следующих условий: $|A : U| \geq 2$ и $|B : U| \geq 3$. И.В. Добрыниной и В.М. Безверхним [4] были также получены некоторые результаты о бесконечности ширины вербальных подгрупп в группах с двумя образующими и одним определяющим соотношением. В.Г. Бардаковым [5] доказана бесконечность ширины всякой собственной вербальной подгруппы для HNN-расширений, где связные подгруппы отличны от базовой группы.

Р. И. Григорчук [6] установил условия бесконечности для коммутантных собственных вербальных подгрупп в свободных произведениях с объединением и HNN-расширениях. Вербальная подгруппа $V(G)$ называется коммутантной, если V содержит только коммутаторные слова - слова, лежащие в коммутанте совободной группы F_n'. В работах автора [7, 8] были доказаны утверждения, продолжающие результаты Григорчука. В частности, решен вопрос об условиях бесконечности ширины собственных коммутантных вербальных подгрупп для групп с одним определяющим соотношением и нетривиальным центром. Доказаны некоторые утверждения о коммутантных вербальных подгруппах для аномальных произведений.

В работе [9] приводится обзор полученных различными алгебраистами результатов о ширине вербальных подгрупп.

Доказательство бесконечности ширины коммутантных вербальных подгрупп, как правило, основано на построении для рассматриваемых группах специальных функций - нетривиальных псевдохарактеров. Для произвольных вербальных подгрупп, необязательно коммутантных, этот метод неприменим. Из существования на группе G нетривиальных псевдохарактеров