УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

На правах рукописи
УДК 512.542

**ЗУБЕЙ
ЕКАТЕРИНА ВЛАДИМИРОВНА**

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С УСЛОВИЕМ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Монахов В. С.

Гомель, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Рассматриваются только конечные группы. Используются обозначения, принятые в книгах [31, 71].

p, q, r — простые числа;
$n \mid m$ — число n делит число m;
$n \nmid m$ — число n не делит число m;
$\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел;
$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;
π — некоторое множество простых чисел, т. е. $\pi \subseteq \mathbb{P}$;
$\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$ — дополнение к π во множестве всех простых чисел; в частности, $p' = \mathbb{P} \setminus \{p\}$.

Скобки $\langle \ldots \rangle$ применяются для обозначения подгрупп, порожденных некоторым множеством элементов.

Пусть $p \in \mathbb{P}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда
Z_n — циклическая группа порядка n;
D_{2n} — диэдральная группа порядка $2n$;
Q_8 — группа кватернионов порядка 8;
E_{p^n} — элементарная абелева группа порядка p^n;
S_n — симметрическая группа степени n;
A_n — знакопеременная группа степени n;
$\mathrm{GL}(n, p^m)$ — полная линейная группа степени n над полем из p^m элементов;
$\mathrm{SL}(n, p^m)$ — специальная линейная группа степени n над полем из p^m элементов;
$\mathrm{PGL}(n, p^m)$ — проективная полная линейная группа степени n над полем из p^m элементов, т. е. фактор-группа полной линейной группы по центру;
$\mathrm{PSL}(n, p^m)$ — проективная специальная линейная группа степени n над полем из p^m элементов, т. е. фактор-группа специальной линейной группы по центру.

Пусть A и B — подгруппы группы G. Тогда
$A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B;
$A \rtimes B$ — полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B;
$A \simeq B$ — подгруппы A и B изоморфны.

Группу G называют
p-группой, если порядок группы G есть степень простого числа p;
p'-группой, если порядок группы G не делится на число p.

Пусть G — группа. Тогда

$|G|$ — порядок группы G;

1 — единичный элемент и единичная подгруппа группы G;

$\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых делителей порядка группы G;

$|\pi(G)|$ — число различных простых делителей порядка группы G;

$\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, т. е. пересечение всех максимальных подгрупп неединичной группы G; если $G = 1$ единична, то $\Phi(G) = 1$;

$F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, т. е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G;

$O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа группы G;

$O_{p'}(G)$ — наибольшая нормальная p'-подгруппа группы G;

G_p — силовская p-подгруппа группы G;

$G_{p'}$ — p'-холлова подгруппа группы G;

G_π — π-холлова подгруппа группы G;

$H \leq G$ — H является подгруппой группы G;

$H < G$ — H является собственной подгруппой группы G;

$M < \cdot\, G$ — M является максимальной подгруппой группы G, т. е. собственной подгруппой группы G, не содержащейся ни в какой другой подгруппе, отличной от всей группы G;

$H \lhd G$ — H является нормальной подгруппой группы G;

$H \cdot\!\lhd G$ — H является минимальной нормальной подгруппой группы G;

$H \lhd\lhd G$ — H является субнормальной подгруппой группы G;

$|G : H|$ — индекс подгруппы H в группе G;

$\pi(G : H) = \pi(|G : H|)$;

$H_G = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$ — ядро подгруппы H в группе G, т. е. наибольшая нормальная в G подгруппа, содержащаяся в H;

$H^G = \langle g^{-1}Hg \mid g \in G\rangle$ — нормальное замыкание подгруппы H в группе G, т. е. наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая H;

$C_G(H)$ — централизатор подгруппы H в группе G;

$N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G;

$Z(G) = C_G(G)$ — центр группы G;

G' — коммутант группы G, т. е. подгруппа, порожденная коммутаторами всех элементов группы G;

$G^{(n)}$ — n-ый коммутант группы G, $G^{(n)} = \left(G^{(n-1)}\right)'$;

$S(G)$ — разрешимый радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G;

$S_r(G)$ — наибольшая нормальная r-разрешимая подгруппа группы G для простого r;

$d(G)$ — производная длина группы G;

$n(G)$ — нильпотентная длина группы G;

$l_p(G)$ — p-длина группы G;

$r(G)$ — ранг группы G.

Ряд подгрупп $1 = A_0 < A_1 < \ldots < A_{a-1} < A_a = G$ называется
нормальным, если $A_i \lhd G$ для всех i;
субнормальным, если $A_{i-1} \lhd A_i$ для всех i.
Фактор-группы A_i/A_{i-1}, $i = 1, \ldots a$, называются факторами ряда, числа $|A_i/A_{i-1}|$ — индексами ряда.

Группу G называют
примарной, если $|\pi(G)| = 1$;
бипримарной, если $|\pi(G)| = 2$;
pd-группой, если $p \in \pi(G)$;
p-замкнутой, если $G_p \lhd G$;
p-нильпотентной, если существует $G_{p'}$ и $G_{p'} \lhd G$;
p-разложимой, если G_p и $G_{p'}$ нормальны в G;
разрешимой, если G обладает субнормальным рядом с абелевыми факторами;
π-разрешимой, если группа G обладает субнормальным рядом, факторы которого являются либо разрешимыми π-группами, либо π'-группами;
сверхразрешимой, если G обладает нормальным рядом с циклическими факторами.

Класс групп — множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой все группы ей изоморфные.
$\mathfrak{E}$ — класс всех групп;
$\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп;
$\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп;
$\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп;
$\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп;
$\mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп;
$\mathfrak{N}_\pi$ — класс всех нильпотентных π-групп.
Класс групп $\mathfrak{F}$ называется
наследственным, когда из $H \leq G \in \mathfrak{F}$ следует $H \in \mathfrak{F}$;
нормально наследственным, когда из $H \lhd G \in \mathfrak{F}$ следует $H \in \mathfrak{F}$;
насыщенным, когда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$.
$G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G.

ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы предполагаются конечными.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучению таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [53]. Определяющие соотношения и универсальные накрывающие групп Шмидта найдены Ю. А. Гольфандом [12]. Группам Шмидта посвящены отдельные параграфы монографий Б. Хупперта [71], Л. А. Шеметкова [52]. В работе В. С. Монахова [39] приведен обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп.

Группы с ограничениями на подгруппы Шмидта исследовались во многих работах. В. С. Монахов [35] указал строение групп, в которых все подгруппы Шмидта сверхразрешимы, а также групп с несверхразрешимыми подгруппами Шмидта. В работах В. Н. Семенчука [46], В. Н. Княгиной и В. С. Монахова [18], В. А. Ведерникова [8], Х. А. Аль-Шаро и А. Н. Скибы [54] изучались группы с субнормальными подгруппами Шмидта. Разрешимость группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта установил В. Н. Тютянов [48]. В работе В. Н. Княгиной и В. С. Монахова [17] получены признаки частичной разрешимости группы с полунормальными подгруппами Шмидта четного порядка. Простые группы, в которых нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, перечислили В. Н. Тютянов и П. В. Бычков [47].

Говорят, что подгруппы A и B перестановочны, если $AB = BA$, т. е. множество всех элементов ab, где $a \in A,\ b \in B$, образуют подгруппу. Часто встречается ситуация, когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G существует подгруппа X такая, что $AB^x = B^xA$ для всех $x \in X$. Такие подгруппы А. Н. Скиба (см., например, [69]) предложил называть X-перестановочными. В работах [11, 67, 69] установлены свойства X-перестановочных подгрупп, а также признаки разрешимости групп, в которых некоторые подгруппы X-перестановочны.

Одной из первых работ, посвященной перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта, можно считать работу Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [2]. В этой работе, наряду с другими результатами, была получена разрешимость групп при условии, что некоторые силовские подгруппы перестановочны с подгруппами Шмидта четного порядка, а также при условии, что некоторые максимальные подгруппы перестановочны с подгруппами Шмидта. Эти результаты нашли развитие в работах В. Н. Княгиной и В. С. Монахова [19–21]. Так в работе [20] получена частичная разрешимость групп с условием $S_r(G)$-перестановочности некоторой силовской подгруппы с подгруппами Шмидта. Здесь $S_r(G)$ — наибольшая нормальная в G r-разрешимая подгруппа. Локальные аналоги результатов работы [2] получены в статье [19]. В. Н. Князгина [23] установила разрешимость групп, в которых некоторые подгруппы Шмидта четного порядка перестановочны между собой.

Строение группы, которая является произведением силовской подгруппы и подгруппы Шмидта, а также группы, совпадающей с произведением двух подгрупп Шмидта, исследовал В. С. Монахов [37, 40–42].

Представленный краткий обзор свидетельствует о том, что задача изучения строения конечных групп с условием перестановочности некоторых подгрупп с некоторыми подгруппами Шмидта, является актуальной и значимой в современной теории групп. В данной диссертационной работе это направление получило дальнейшее развитие.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» в период с 2016 по 2019 год в соответствии со следующей научной темой: «Инварианты частично разрешимых конечных групп и их приложения», номер гос. регистрации — 20161494. Тема входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».

Цель и задачи исследования

Цель диссертации — исследование строения конечных групп, в которых некоторая силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта.

Достижение поставленной цели предполагает решение следующих задач:

— установление r-разрешимости групп с условием перестановочности силовской r-подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта;

— перечисление композиционных факторов групп, силовская подгруппа которых перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка;

— получение признаков разрешимости групп, в которых силовская подгруппа перестановочна с коммутантами B-подгрупп;

— установление признаков разрешимости групп с полусубнормальными подгруппами Шмидта;

— исследование групп с ограничениями на две максимальные подгруппы.

Объектом исследования являются подгруппы Шмидта с условием перестановочности. Предметом исследования являются композиционные факторы и частичная разрешимость группы.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми и впервые получены соискателем. В диссертационной работе проведено исследование строения групп с условием перестановочности силовской подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта. Получены новые признаки частичной разрешимости и перечислены композиционные факторы исследуемых групп.

Положения, выносимые на защиту

1. Перечислены неабелевы композиционные факторы группы с условием перестановочности некоторых силовских подгрупп и подгрупп Шмидта,

теоремы 2.1.2 [3–А], 2.2.1 [6–А], 3.1.2 и 3.1.4 [4–А]. Отсюда выводятся новые признаки частичной разрешимости таких групп.

2. Получены признаки разрешимости группы, в которой перестановочны коммутанты B-подгрупп четного порядка, теорема 2.3.3 [7–А].

3. Найдены признаки разрешимости группы с полусубнормальными подгруппами Шмидта четного порядка из некоторой максимальной подгруппы, теоремы 3.2.4 и 3.2.5 [5–А].

4. Установлена сверхразрешимость группы при условии, что силовские подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе, теорема 3.3.1 [8–А], а также доказана нильпотентность второго коммутанта группы, в которой все максимальные подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе, теорема 3.3.2 [8–А].

Личный вклад соискателя

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Виктора Степановича Монахова. Научным руководителем были поставлены задачи и цель исследования. В работах [2–А, 3–А], опубликованных совместно с научным руководителем, идеи и методы принадлежат научному руководителю, а их реализация проводилась соискателем. Работы [4–А, 6–А, 8–А] выполнены и опубликованы совместно с научным руководителем и кандидатами физико-математических наук, доцентами В. Н. Князиной и А. А. Трофимуком, результаты принадлежат авторам на паритетных условиях. Без соавторства выполнены работы [1–А, 5–А, 7–А].

Апробация результатов диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертации апробированы на

— Гомельском алгебраическом семинаре (учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»);

— XX–XXII Республиканских научных конференциях студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 20–22 марта 2017 г.; 19–21 марта 2018 г.; 25–27 марта 2019 г.);

— V Международной научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» (Брест, 19 октября 2018 г.);

— Международной конференции, посвящённой 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, 28–31 мая 2019 г.).

Отдельные положения диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» при чтении спецкурсов «Теория групп» и «Элементы современной и прикладной алгебры» для студентов математических специальностей, при написании курсовых и дипломных работ (акты внедрения от 03.09.2018, 21.01.2019).

Опубликованность результатов диссертации

По теме диссертационного исследования опубликовано 8 статей в научных журналах, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (объемом 4,08 авторского листа), 12 материалов и тезисов докладов конференций (объемом 0,67 авторского листа).

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня сокращений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 87 наименований использованных источников и 20 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 88 страниц, из них 8 страниц занимает библиографический список.

Соискатель выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Виктору Степановичу Монахову за оказанные им внимание и помощь при написании данной диссертации.

ГЛАВА 1

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1.1 Свойства групп Шмидта. Группы Шмидта порядка, не превышающего 500

В 1924 г. О. Ю. Шмидт опубликовал работу [53], в которой ввел в рассмотрение и изучил класс ненильпотентных групп, в которых всякая собственная подгруппа нильпотентна. Впоследствии эти группы получили название групп Шмидта или минимальных ненильпотентных групп.

Напомним, что показателем числа p по модулю q называют такое наименьшее натуральное число m, что q делит $(p^m - 1)$. Следующие свойства групп Шмидта получены самим О. Ю. Шмидтом в работе [53].

Теорема 1.1.1. *Пусть S — группа Шмидта, т. е. ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$S = P \leftthreetimes Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа, Q — ненормальная силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа;*

(2) *$Q =< y >$ — циклическая подгруппа и $y^q \in Z(S)$;*

(3) *$|P/P'| = p^m$, где m — показатель числа p по модулю q;*

(4) *главный ряд группы S имеет систему индексов:*

$$p, p, \ldots, p, p^m, q, \ldots, q,$$

где m — показатель числа p по модулю q; число индексов равных p совпадает с n, где $p^n = |P'|$; число индексов равных q совпадает с b, где $q^b = |Q|$.

В дальнейшем $S_{<p,q>}$-группой будем называть группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой. Для $S_{<p,q>}$-группы S будем использовать запись $S = P \leftthreetimes Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа, а Q — циклическая ненормальная силовская q-подгруппа.

В этой же работе [53] О. Ю. Шмидт привел два примера ненильпотентных групп порядков $p^a q^b$ с нильпотентными собственными подгруппами.

Пример 1.1.1. Пусть $p = 2,\ q = 3,\ a = 3$. Число b остается произвольным натуральным. Зададим группу:

$$< x_1, x_2, y \mid x_1^4 = x_2^4 = y^{3^b} = 1,\ x_1^2 = x_2^2 = z,\ x_2 x_1 = x_1 x_2 z,$$

$$y^{-1} x_1 y = x_2,\ y^{-1} x_2 y = x_1 x_2 > .$$

Тогда $P =< x_1, x_2 >$ — группа кватернионов восьмого порядка, $\Phi(P)$ — подгруппа второго порядка. Число m равно 2.

Пример 1.1.2. Группа порядка $p^3 3^b$, где p — нечетное простое число вида $3k+2$, задается равенствами:

$$< x_1, x_2, x_3, y \mid x_1^p = x_2^p = x_3^p = y^{3^b} = 1,\ x_2x_1 = x_1x_2x_3,\ x_1x_3 = x_3x_1,$$

$$x_2x_3 = x_3x_2,\ y^{-1}x_1y = x_2,\ y^{-1}x_2y = x_1^{-1}x_2^{-1},\ y^{-1}x_3y = x_3 > .$$

Тогда $P =< x_1, x_2, x_3 >$ — регулярная группа.

О. Ю. Шмидт [53] также рассмотрел ненильпотентные группы, все собственные подгруппы которых абелевы. Такие группы являются частным случаем групп Шмидта и ранее рассматривались в работе Г. Миллера и Х. Морено [79]. О. Ю. Шмидт показал справедливость следующего утверждения.

Теорема 1.1.2. *Пусть S — ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой абелевы. Тогда:*

(1) *$S = P \leftthreetimes Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа, Q — ненормальная силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа;*

(2) *$Q =< y >$ — циклическая подгруппа и $y^q \in Z(S)$;*

(3) *P — элементарная абелева подгруппа порядка p^m, где m — показатель числа p по модулю q;*

(4) *$Z(S) =< y^q >$.*

О. Ю. Шмидт установил также, что при $P' = 1$ всякая группа Шмидта $S = P \leftthreetimes Q$ является группой Миллера–Морено.

Спустя 5 лет после выхода работы О. Ю. Шмидта [53] С. А. Чунихин доказал, что коммутант группы Шмидта совпадает с нормальной силовской подгруппой [50]. Позже в серии работ С. А. Чунихина группы Шмидта применялись для нахождения признаков нильпотентности и обобщенной нильпотентности, а также для нахождения ненильпотентных подгрупп группы, см. [51].

Дальнейшим исследованием групп Шмидта занимался Ю. А. Гольфанд [12], который описал строение нормальной силовской подгруппы.

Теорема 1.1.3 [12]. *Пусть $S = P \leftthreetimes Q$ — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если подгруппа P абелева, то P — элементарная абелева подгруппа порядка p^m, где m — показатель числа p по модулю q;*

(2) *если подгруппа P неабелева, то*

$$Z(P) = P' = \Phi(P), \quad |P/Z(P)| = p^m;$$

(3) *если P_1 — нормальная p-подгруппа группы S, то либо $P = P_1$, либо $P_1 \le Z(P)$ и $P \ne Z(P)$;*

(4) *если $p > 2$, то P имеет экспоненту p; при $p = 2$ экспонента P не превышает 4.*

Ю. А. Гольфанд [12] также определил универсальные накрывающие групп Шмидта.

Напомним, что накрывающей для группы G называют группу H, содержащую такую подгруппу $Z \leq H' \cap Z(H)$, что H/Z изоморфна G. Для каждой группы среди накрывающих есть универсальные, т. е. накрывающие максимального порядка, который определен однозначно. Каждая накрывающая данной группы является фактор-группой универсальной накрывающей по её центральной подгруппе. Сами накрывающие в общем случае неизоморфны, но коммутанты универсальных накрывающих изоморфны [71, теорема V.23.6].

Теорема 1.1.4 [12]. *Зафиксируем натуральное число b и простые числа p и q. Пусть m — показатель числа p по модулю q. Тогда существует $S_{<p,q>}$-группа $S^* = P^* \leftthreetimes Q^*$ наибольшего порядка, обладающая следующими свойствами:*

(1) $|Q^*| = q^b$;

(2) *если m — нечетное число, то $|P^*| = p^m$ и P^* абелева;*

(3) *если m — четное число, то $|P^*| = p^{\frac{3}{2}m}$ и P^* неабелева;*

(4) *если S — любая $S_{<p,q>}$-группа с силовской q-подгруппой порядка q^b, то в S^* существует нормальная p-подгруппа K такая, что фактор-группа S^*/K изоморфна S.*

Эти результаты можно найти также в статье Л. Редеи [81].

Описание неабелевых нормальных силовских подгрупп групп Шмидта и описание простых групп с силовской подгруппой, изоморфной нормальной силовской подгруппе из группы Шмидта, получили В. Д. Мазуров, С. А. Сыскин и А. Х. Журтов [14, 28].

Теорема 1.1.5 [14, 28]. *Пусть $S = P \leftthreetimes Q$ — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если P неабелева, то P изоморфна U/Z, где U — силовская p-подгруппа группы $PSU(3, p^{2n})$ и $Z \leq Z(U)$;*

(2) *если G — простая группа с силовской 2-подгруппой, изоморфной неабелевой силовской 2-подгруппе из группы Шмидта, то G изоморфна $PSU(3, 2^{2n})$ для некоторого n;*

(3) *если G — p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой, изоморфной силовской подгруппе группы Шмидта, то $l_p(G) \leq 1$;*

(4) *если в P есть абелева подгруппа индекса p, то либо P элементарная абелева, либо порядок P равен p^3.*

Из перечисленных свойств групп Шмидта нетрудно вывести следующие свойства, которые хорошо известны в теории групп, см., например, [52].

Лемма 1.1.1. *Пусть $S = P \leftthreetimes Q$ — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $Z(S) = \Phi(S) = \Phi(P) \times < y^q >$;

(2) $S' = P,\ P' = (S')' = \Phi(P)$;

(3) *группа имеет точно два класса сопряженных максимальных подгрупп:*

$$\{P \times < y^q >\},\ \{\Phi(P) \times < x^{-1}yx > \mid\ x \in P \setminus \Phi(P)\};$$

(4) $P/\Phi(P)$ *— главный фактор группы* S;

(5) *если* N *— нормальная подгруппа из* S, *то фактор-группа* S/N *либо* $S_{<p,q>}$*-группа, либо циклическая* q*-группа;*

(6) *группа* S *порождается двумя элементами;*

(7) *подгруппа Фраттини группы* S *совпадает с гиперцентром группы* S.

Возможности больших приложений групп Шмидта впервые обсуждались в работе С. А. Чунихина [50], который заметил, что каждая ненильпотентная группа содержит по крайней мере одну подгруппу Шмидта, см. также [51]. Таким образом, справедлива

Лемма 1.1.2 [50]. *Каждая ненильпотентная группа содержит подгруппу Шмидта.*

Теорема 1.1.6 [71, IV.5.4]. *Если в группе* G *каждая собственная подгруппа* p*-нильпотентна, то либо группа* G p*-нильпотентна, либо* G *—* $S_{<p,q>}$*-группа для некоторого простого* q.

Следствие 1.1.1. *Если в группе* G *нет* $S_{<p,q>}$*-подгрупп для всех* $q \in \pi(G)$, *то группа* G p*-нильпотентна.*

Следующее следствие эквивалентно следствию 1.1.1.

Следствие 1.1.2. *Если группа не* p*-нильпотентна, то в ней существует* $S_{<p,q>}$*-подгруппа для некоторого* q.

Следствие 1.1.3. *Если* $\{p,q\}$*-группа не* q*-замкнута, то в ней существует* $S_{<p,q>}$*-подгруппа.*

Теорема 1.1.7 [4, с. 34; 36, следствие 3.1.1]. *Каждая не 2-замкнутая группа содержит* $S_{<q,2>}$*-подгруппу для некоторого* $q \in \pi(G)$.

Пример 1.1.3. Для любого нечетного p аналог теоремы 1.1.7 неверен. Для $p = 3$ контрпримером служит простая группа $SL(2, 2^n)$ при любом нечетном $n > 2$, а для $p \geq 5$ — группа $PSL(2, p)$.

Теорема 1.1.8 [4,36]. *Группа тогда и только тогда 2-замкнута, когда все ее подгруппы Шмидта 2-замкнуты.*

Я. Г. Беркович [4] доказал это утверждение на основе теоремы Судзуки о простых группах с независимыми силовскими 2-подгруппами. Более короткое доказательство имеется в работе В. С. Монахова [36].

Следствие 1.1.4 [36, следствие 3.1.1]. *Любая группа либо 2-замкнута, либо в ней существует 2-нильпотентная* $2d$*-подгруппа Шмидта.*

В 1968 г. Я. Г. Беркович опубликовал теорему, из которой следует разрешимость группы с дополняемыми подгруппами Шмидта, [3, теорема 2]. Этот результат многократно применялся различными авторами при изучении разнообразных классов групп. В. С. Монахов развил этот результат.

Теорема 1.1.9 [36, теорема 3.2]. *В любой группе G либо подгруппа $O^2(G)$ 2-замкнута, либо в $O^2(G)$ существует 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта четного индекса, и каждая такая подгруппа из $O^2(G)$ не $\{2\}$-дополняема в группе G.*

Следствие 1.1.5 [36, следствие 3.2.1]. *В любой группе, за исключением разрешимых групп 2-длины ≤ 2, существует не $\{2\}$-дополняемая 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта четного индекса.*

Следствие 1.1.6 [36, следствие 3.2.2]. *В любой группе, за исключением разрешимых групп 2-длины ≤ 2, существует недополняемая 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта четного индекса.*

Оценка 2-длины здесь точная, на что указывает пример симметрической группы степени 4, в которой дополняемы все подгруппы Шмидта. Пример простой группы порядка 60 показывает, что группа с дополняемыми 2-замкнутыми $2d$-подгруппами Шмидта может быть неразрешимой.

Лемма 1.1.3 [10, лемма 1]. *Тогда и только тогда в p-разрешимой группе каждая собственная бипримарная подгруппа p-замкнута, когда группа G либо p-замкнута, либо является p'-замкнутой группой Шмидта.*

Лемма 1.1.4 [36, лемма 1.9]. *Если K и H — подгруппы группы G, K нормальна в H и H/K — недисперсивная $\{p,q\}$-подгруппа, то минимальное добавление к K в H содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу и $S_{<q,p>}$-подгруппу.*

Лемма 1.1.5 [17, лемма 1]. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{<p,q>}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

(1) *L — p-замкнутая $\{p,q\}$-подгруппа;*

(2) *все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;*

(3) *L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу $P \leftthreetimes Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = (P \leftthreetimes Q)^L = Q^L$.*

Лемма 1.1.6 [36, лемма 1.10]. *Не S_4-свободная группа содержит $S_{<2,3>}$-подгруппу и $S_{<3,2>}$-подгруппу.*

Приведем примеры групп Шмидта порядка меньшего 500.

Лемма 1.1.7. *Пусть $S = P \leftthreetimes Q$ — группа Шмидта, $|P| = p^a$, $|Q| = q^b$, m — показатель числа p по модулю q. Тогда*

(1) *если m — нечетное число, то $a = m$;*

(2) *если $m = 2t$ — четное число, то $2t \leq a \leq 3t$.*

Доказательство. (1) По теореме 1.1.4 существует универсальная накрывающая $S^* = P^* \leftthreetimes Q^*$ такая, что $|P^*| = p^m$, $|Q^*| = q^b$. Так как S — произвольная $S_{<p,q>}$-группа, то в S^* существует нормальная p-подгруппа K такая, что $S^*/K \simeq S$. Поскольку для нечетного m подгруппа P^* является минимальной нормальной p-подгруппой, то $K = 1$ и $S^* \simeq S$, т. е. $a = m$.

(2) По теореме 1.1.4 существует универсальная накрывающая $S^* = P^* \leftthreetimes Q^*$ такая, что $|P^*| = p^{\frac{3}{2}m} = p^{3t}$, $|Q^*| = q^b$. По теореме 1.1.3 (2) $|P^*/Z(P^*)| = p^m$. Следовательно, $|Z(P^*)| = p^t$. Так как S — произвольная $S_{<p,q>}$-группа, то в S^* существует нормальная p-подгруппа K такая, что $S^*/K \simeq S$. По теореме 1.1.3 (3) $K \leq Z(P^*)$. Пусть $|K| = p^k$, тогда p^k делит p^t и $0 \leq k \leq t$. Так как $p^a = p^{3t-k}$, то $2t \leq a \leq 3t$. Лемма доказана.

Пример 1.1.4. Пусть $S = P \leftthreetimes Q$ — группа Шмидта четного порядка меньшего 500. Будем считать, что $|Q| = q$. Тогда

(1) если S — 2-замкнутая группа Шмидта ранга 2, то S изоморфна $Q_8 \leftthreetimes Z_3$ и $E_4 \leftthreetimes Z_3$;

(2) если S — 2-замкнутая группа Шмидта ранга 3, то S изоморфна $E_8 \leftthreetimes Z_7$;

(3) если S — 2-замкнутая группа Шмидта ранга 4, то порядок S равен одному из следующих чисел $2^6 \cdot 5,\ 2^5 \cdot 5,\ 2^4 \cdot 5$;

(4) 2-замкнутые группы Шмидта ранга ≥ 5 имеют порядок, превышающий 500;

(5) все 2-нильпотентные группы Шмидта имеют порядок $2p$, где $p < 250$.

Доказательство. (1) Пусть ранг группы S равен 2. Тогда по лемме 1.1.7 $|S| = 2^2 \cdot q$ либо $|S| = 2^3 \cdot q$. Из сравнения $2^2 \equiv 1 \pmod q$ получаем, что $q = 3$. Тогда $|S| = 2^2 \cdot 3$ и $S \simeq E_4 \leftthreetimes Z_3$, или $|S| = 2^3 \cdot 3$ и $S \simeq Q_8 \leftthreetimes Z_3$.

(2) Пусть ранг группы S равен 3. Тогда по лемме 1.1.7 порядок группы S равен $2^3 \cdot q$. Решая сравнение $2^3 \equiv 1 \pmod q$, получаем, что q должно делить $2^3 - 1 = 7$. Отсюда следует, что $q = 7$. Значит, $|S| = 2^3 \cdot 7$, и группа S изоморфна группе $E_8 \leftthreetimes Z_7$.

(3) Пусть ранг группы S равен 4. Тогда по лемме 1.1.7 порядок группы S равен одному из чисел $2^4 \cdot q$, $2^5 \cdot q$ или $2^6 \cdot q$. Решая сравнение $2^4 \equiv 1 \pmod q$, находим, что $q = 5$. Значит, $|S| \in \{2^4 \cdot 5,\ 2^5 \cdot 5,\ 2^6 \cdot 5\}$.

(4) Если ранг группы S равен 5, то по лемме 1.1.7 порядок группы S равен $2^5 \cdot q$. Решая сравнение $2^5 \equiv 1 \pmod q$, получаем, что $q = 31$. Тогда $|S| = 2^5 \cdot 31 > 500$, противоречие. Следовательно, 2-замкнутых групп Шмидта четного порядка меньшего 500 ранга 5 не существует. Аналогично можно показать, что 2-замкнутых групп Шмидта четного порядка меньшего 500 рангов > 5 не существует.

(5) Пусть $S = P \leftthreetimes Q$ — 2-нильпотентная группа Шмидта четного порядка меньшего 500. По следствию 1.1.3 S является $S_{<p,2>}$-подгруппой, и она имеет ранг 1. Значит существует универсальная накрывающая порядка $2p$. Так как порядок S не превышает 500, то $p < 250$.

Пример 1.1.5. Пусть $S = P \leftthreetimes Q$ — $3d$-группа Шмидта нечетного порядка меньшего 500, и порядок Q — простое число. Тогда

(1) если S — 3-нильпотентная группа Шмидта ранга 1, то порядок S

равен $3p$, $p < 170$, 3 делит $p-1$;

(2) если S — 3-нильпотентная группа Шмидта ранга 2, то порядок S равен одному из следующих чисел $5^3 \cdot 3$, $5^2 \cdot 3$ или $11^2 \cdot 3$;

(3) не существует 3-нильпотентных групп Шмидта нечетного порядка меньшего 500 ранга ≥ 3;

(4) если S — 3-замкнутая группа Шмидта ранга ≤ 3, то S — $S_{<3,13>}$-группа порядка $3^3 \cdot 13$;

(5) если S — 3-замкнутая группа Шмидта ранга ≥ 4, то S изоморфна $E_{3^4} \leftthreetimes Z_5$.

Доказательство. Пусть S — 3-нильпотентная группа Шмидта нечетного порядка, тогда она является $S_{<p,3>}$-группой.

(1) Так как ранг группы S равен 1, то по лемме 1.1.7 порядок группы S равен $3p$, а по [18, лемма 10] 3 делит $p-1$. По условию $3p \leq 500$, значит $p \leq 170$. Из таблицы простых чисел получаем, что

$$p \in \{7,\ 13,\ 19,\ 31,\ 37,\ 43,\ 61,\ 67,\ 73,$$

$$79,\ 97,\ 103,\ 109,\ 127,\ 139,\ 151,\ 157,\ 163\}.$$

(2) Так как ранг группы S равен 2, то по лемме 1.1.7 порядок группы S равен одному из чисел $3p^2,\ 3p^3$. Решим сравнение $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Получаем, что 3 делит p^2-1, а значит 3 делит $p+1$. По условию $3p^2 \leq 500$, следовательно $p = 5$ и $p = 11$. Значит, $|S| \in \{5^2 \cdot 3,\ 5^3 \cdot 3,\ 11^2 \cdot 3\}$.

(3) Пусть ранг группы S равен 3. Тогда по лемме 1.1.7 порядок группы S равен $3p^3$. По условию $3p^3 \leq 500$, значит $p \leq 5$. По определению ранга $p^3 \equiv 1 \pmod 3$, но 5^2-1 делится на 3, противоречие. Следовательно, не существует 3-нильпотентных групп Шмидта нечетного порядка ранга 3. Аналогично можно показать, что не существует 3-нильпотентных групп Шмидта нечетного порядка рангов > 3.

(4) Пусть S — 3-замкнутая группа Шмидта нечетного порядка, тогда она является $S_{<3,q>}$-группой. Из [18, лемма 10] следует, что ее ранг более 2.

Если ранг группы S равен 3, то по лемме 1.1.7 порядок группы S равен $3^3 \cdot q$. По определению ранга $3^3 \equiv 1 \pmod q$, и q делит $3^3 - 1 = 26 = 2 \cdot 13$. Следовательно, $q = 13$. Значит порядок группы S равен $3^3 \cdot 13$.

(5) Пусть ранг группы S равен 4. Тогда по лемме 1.1.7 порядок группы S равен $3^4 \cdot q$, $3^5 \cdot q$ или $3^6 \cdot q$. Решая сравнение $3^4 \equiv 1 \pmod q$, получаем, что $q = 5$. По условию $3^5 \cdot 5 > 500$, противоречие. Значит порядок группы S равен $3^4 \cdot 5$, и она изоморфна $E_{3^4} \leftthreetimes Z_5$.

Если ранг группы S равен 5, то по лемме 1.1.7 порядок S равен $3^5 \cdot q$. Решая сравнение $3^5 \equiv 1 \pmod q$, получаем, что $q = 11$. Тогда $|S| = 3^5 \cdot 11 > > 500$, противоречие. Следовательно, 3-замкнутых групп Шмидта нечетного порядка меньшего 500 ранга 5 не существует. Аналогично можно показать, что 3-замкнутых групп Шмидта нечетного порядка меньшего 500 рангов > 5 не существует.

Пример 1.1.6. Пусть $S = P \rtimes Q$ — $3'$-группа Шмидта нечетного порядка меньшего 500 и $|Q| = q$. Тогда S имеет ранг 1 и S — группа одного из видов:

(1) $S_{<p,5>}$-группа, где $p \in \{11,\ 31,\ 41,\ 61,\ 71\}$;

(2) $S_{<p,7>}$-группа, где $p \in \{29,\ 43,\ 71\}$;

(3) $S_{<23,11>}$-группа.

Доказательство. Данные утверждения очевидны.

Теорема 1.1.10 [72, теорема IX.8.3]. *Пусть a и m — целые числа > 1. Тогда, исключая случаи $m = 2$, $a = 2^b - 1$ и $m = 6$, $a = 2$, существует простое число q со следующими свойствами:*

(1) *q делит $a^m - 1$;*

(2) *q не делит $a^i - 1$ для всех $0 < i < m$;*

(3) *q не делит m.*

В частности, m есть показатель числа a по модулю q.

Согласно теореме 1.1.4 при фиксированных p и q все $\{p, q\}$-группы Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой имеют ранг m, где m — показатель числа p по модулю q.

Возникает вопрос: при фиксированном натуральном числе m конечно ли число пар простых чисел p и q, для которых одновременно существуют две $\{p, q\}$-группы Шмидта ранга m: одна с нормальной силовской p-подгруппой, другая с нормальной силовской q-подгруппой?

На первый взгляд кажется, что для фиксированного m пар (p, q) конечное число. Но доказать это пока не представляется возможным.

Наибольшая известная нам тройка $(p, q, m) = (147481, 9833, 9832)$.

Пример 1.1.7. Пусть G — $\{13, 61\}$-группа и в ней нет нормальных силовских подгрупп. Тогда любая ее подгруппа Шмидта имеет ранг 3.

Доказательство. Так как G — не 13-замкнутая $\{13, 61\}$-группа, то по следствию 1.1.3 в ней существует $S_{<61,13>}$-подгруппа S_1. Показатель числа 61 по модулю 13 равен 3, по [18, лемма 10] ранг S_1 равен 3. Поскольку G — не 61-замкнутая $\{13, 61\}$-группа, то по следствию 1.1.3 в ней существует $S_{<13,61>}$-подгруппа S_2. Так как показатель числа 13 по модулю 61 равен 3, то по [18, лемма 10] ранг S_2 равен 3. Следовательно, любая подгруппа Шмидта в G имеет ранг 3.

Пример 1.1.8. Для простых чисел 5 и 13 число 4 является показателем 5 по модулю 13 и показателем 13 по модулю 5. Поэтому любая $\{5, 13\}$-группа без нормальных силовских подгрупп имеет подгруппы Шмидта только ранга 4.

1.2 Группы с подгруппами Шмидта ранга не больше 4

Пусть $1 = G_0 \leq ... \leq G_s = G$ — главный ряд группы G. Тогда главные факторы G_{i+1}/G_i являются характеристически простыми группами. В частности, разрешимые главные факторы являются элементарными абелевыми примарными группами. Если G — неединичная разрешимая группа и $p_i^{n_i} = |G_{i+1}/G_i|$, то число $r(G) = \max n_i$ называется рангом группы G, см. [71, с. 685]. Для единичной группы полагают $r(1) = 0$. В силу теоремы Жордана – Гельдера любые два главных ряда группы G изоморфны, поэтому значения ранга определяются однозначно. Ясно также, что сверхразрешимые неединичные группы и только они имеют ранг, равный 1.

Из статьи О. Ю. Шмидта [53], см. теорему 1.1.1, вытекает, что любая $S_{<p,q>}$-группа имеет ранг m, где m — показатель числа p по модулю q.

Лемма 1.2.1. *Пусть p и q — различные простые числа и m — показатель числа p по модулю q. Тогда любая $S_{<p,q>}$-группа имеет ранг m.*

Лемма 1.2.2 [12]. *Пусть p, q — различные простые числа и m — показатель p по модулю q. Тогда естественное полупрямое произведение $P \leftthreetimes Q$ элементарной абелевой p-группы P порядка p^m и группы Q порядка q является $S_{<p,q>}$-группой ранга m, у которой все подгруппы примарны.*

Для любой подгруппы H группы G ранг подгруппы H не превышает ранга группы G. Следовательно, ранги подгрупп Шмидта не выше ранга группы. В минимальной несверхразрешимой группе $E_{7^2} \leftthreetimes S_3$ все подгруппы Шмидта имеют ранг 1, а ранг всей группы > 1. Поэтому совпадение ранга группы и ранга подгрупп в общем случае не будет.

В 1995 г. В. С. Монахов [35] исследовал строение групп, в которых все подгруппы Шмидта сверхразрешимы (т. е. имеют ранг 1), и строение групп, в которых все подгруппы Шмидта несверхразрешимы (т. е. нет подгрупп Шмидта ранга 1). В частности, такие группы оказались всегда разрешимыми.

Лемма 1.2.3 [35, лемма 1]. *Пусть $A = P \leftthreetimes Q$ — группа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P и циклической силовской q-подгруппой Q. Тогда и только тогда A сверхразрешима, когда $|P| = p > q$ и q делит $p - 1$.*

Теорема 1.2.1 [35, теорема 1]. *Тогда и только тогда в конечной группе G все подгруппы Шмидта сверхразрешимы, когда G дисперсивна по Оре и для каждой пары простых чисел $p > q$, q не делит $p - 1$, бипримарные $\{p, q\}$-холловы в G подгруппы нильпотентны.*

Лемма 1.2.4 [35]. *Группа Шмидта четного порядка сверхразрешима тогда и только тогда, когда она 2-нильпотентна.*

Для ранга 2 подобное описание получено в работе С. Л. Максимова [29].

Теорема 1.2.2 [29]. *В ненильпотентной группе G все подгруппы Шмидта имеют ранг 2 тогда и только тогда, когда:*

(1) *группа G 2-замкнута и 3-нильпотентна;*

(2) *$\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна;*

(3) *$2'$-холлова подгруппа дисперсивна по Оре;*

(4) *$3'$-холлова подгруппа 2-разложима и дисперсивна по Оре;*

(5) *$\{p,q\}$-холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел $p > q > 2$, q не делит $(p+1)$.*

Из теоремы 1.2.2 вытекает, в частности, что все бипримарные холловы подгруппы в рассматриваемой группе дисперсивны.

Теорема 1.2.3 [29]. *Тогда и только тогда в разрешимой группе G нет подгрупп Шмидта ранга 2, когда её $\{2,3\}$-холлова подгруппа 3-замкнута, а $\{p,q\}$-холлова подгруппа q-замкнута для всех простых чисел $p > q > 2$, q делит $(p+1)$.*

Отметим, что из результатов В. С. Монахова [36, лемма 1.18] вытекает, что неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы G, в которой нет подгрупп Шмидта ранга 2, изоморфны $PSL(2,2^n)$, n нечетно, $n > 1$, $PSU(3,2^{2n})$, $n \not\equiv 0 \pmod 3$ или $Sz(2^n)$, n нечетно, $n \geq 3$.

В работе [30] получено описание бипримарных холловых подгрупп с подгруппами Шмидта ранга 3.

Теорема 1.2.4 [30]. *В ненильпотентной группе G все подгруппы Шмидта имеют ранг 3 тогда и только тогда, когда:*

(1) *группа G 2-замкнута и 3-замкнута;*

(2) *$7'$-холлова подгруппа $G_{7'}$ 2-разложима, а $13'$-холлова подгруппа $G_{13'}$ 3-разложима;*

(3) *для любых простых $p > q > 3$ бипримарная $\{p,q\}$-холлова подгруппа $G_{\{p,q\}}$ является группой одного из следующих типов:*

(3.1) *нильпотентна в каждом из следующих случаев:*

(3.1.1) $p \nmid (q^3-1)$, $q | (p-1)$;

(3.1.2) $p \nmid (q^3-1)$, $q \nmid (p-1)$, $q | (p^2-1)$;

(3.1.3) $p \nmid (q^3-1)$, $q \nmid (p^2-1)$, $q \nmid (p^3-1)$;

(3.1.4) $p \nmid (q^3-1)$, $q \nmid (p-1)$, $q | (p^2-1)$, $q \nmid (p^3-1)$;

(3.2) *p-нильпотентна в случае, когда $p \nmid (q^3-1)$, $q \nmid (p^2-1)$, $q | (p^3-1)$;*

(3.3) *q-нильпотентна в каждом из следующих случаев:*

(3.3.1) $p | (q^3-1)$, $q | (p-1)$;

(3.3.2) $p | (q^3-1)$, $q \nmid (p-1)$, $q | (p^2-1)$;

(3.3.3) $p | (q^3-1)$, $q \nmid (p^2-1)$, $q \nmid (p^3-1)$;

(3.3.4) $p | (q^3-1)$, $q \nmid (p-1)$, $q | (p^2-1)$, $q \nmid (p^3-1)$.

В работе продолжено исследование строения групп с подгруппами Шмидта ранга 4.

Лемма 1.2.5. *Для любого простого числа p существует $S_{<p,q>}$-группа для некоторого простого числа q ранга 4.*

Доказательство. По теореме 1.1.10 для любого натурального числа m и любого простого числа p, за исключением $m = 2$, $p = 2^b - 1$ и $m = 6$, $p = 2$, существует простое число q, для которого m является показателем числа p по модулю q. По лемме 1.2.2 существует $S_{<p,q>}$-подгруппа, ранг которой будет равен m по лемме 1.2.1. При $m = 4$ получаем искомое утверждение. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathbf{Sch}(4)$ класс, состоящий из всех нильпотентных групп и всех групп, в которых каждая подгруппа Шмидта имеет ранг 4. Через $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$ обозначается класс всех $\{p,q\}$-групп из $\mathbf{Sch}(4)$. $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ — формационное произведение классов $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_q$. Ясно, что класс $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ состоит из всех p-замкнутых $\{p,q\}$-групп. Классы всех $\{p,q\}$-групп и всех нильпотентных $\{p,q\}$-групп обозначаются через $\mathfrak{S}_{\{p,q\}}$ и $\mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ соответственно.

Лемма 1.2.6. *Группа Шмидта четного порядка ранга* 4 *является* $S_{<2,5>}$*-группой.*

Доказательство. Пусть G — $\{2,p\}$-группа Шмидта ранга 4. Если G p-замкнута, то ее ранг по лемме 1.2.1 равен 1. Это противоречит условию. Поэтому группа G будет $S_{<2,p>}$-группой. Так как ранг G равен 4, то из леммы 1.2.1 следует, что показатель числа 2 по модулю p равен 4, т. е. $p = 5$. Значит, группа G является $S_{<2,5>}$-группой. Лемма доказана.

Лемма 1.2.7. *Пусть p и q — нечетные простые числа. Тогда и только тогда показатель числа q по модулю p равен* 4, *когда p делит $q^2 + 1$.*

Доказательство. Пусть показатель числа q по модулю p равен 4. Тогда p делит $q^4-1 = (q^2-1)(q^2+1)$ и не делит q^2-1, поэтому p делит q^2+1. Обратно, пусть p делит $q^2 + 1$. Если p делит $(q^2 - 1)$, то p делит $(q^2 + 1) - (q^2 - 1) = 2$, противоречие. Поэтому p не делит $q-1$ и не делит q^2-1. Если p делит q^3-1, то p делит $(q^3-1)+(q^2+1) = q^3+q^2 = q^2(q+1)$, т. е. p делит $q+1$. Но теперь p делит $(q-1)(q+1) = q^2-1$, противоречие. Значит, показатель числа q по модулю p равен 4. Лемма доказана.

Лемма 1.2.8. *Пусть p и q — нечетные простые числа. Тогда и только тогда существует $S_{<p,q>}$-группа ранга* 4, *когда q делит $p^2 + 1$.*

Доказательство. Пусть q делит $p^2 + 1$. Тогда по лемме 1.2.7 показатель числа p по модулю q равен 4, и по лемме 1.2.1 любая $S_{<p,q>}$-группа имеет ранг равный 4.

Если любая $S_{<p,q>}$-группа имеет ранг равный 4, то показатель числа p по модулю q равен 4, и по лемме 1.2.7 q делит $p^2 + 1$. Лемма доказана.

Теорема 1.2.5 [1–A]. (1) *Пусть p — нечетное простое число. Тогда:*

(1.1) $\mathbf{Sch}(4)_{\{2,p\}} = \mathfrak{N}_{\{2,p\}}$ *при* $p \neq 5$;

(1.2) $\mathbf{Sch}(4)_{\{2,5\}} = \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_5$.

(2) *Пусть p и q — нечетные простые числа, $p > q$. Тогда:*

(2.1) $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ *в случае, когда* $p \nmid (q^2 + 1), q \nmid (p^2 + 1)$;

(2.2) $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ *в случае, когда* $p \nmid (q^2 + 1), q | (p^2 + 1)$;

(2.3) $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$ *в случае, когда* $p|(q^2+1), q \not| (p^2+1)$;

(2.4) $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{S}_{\{p,q\}}$ *в случае, когда* $p|(q^2+1), q|(p^2+1)$.

Доказательство. (1) Все нильпотентные $\{2,p\}$-группы принадлежат классу $\mathbf{Sch}(4)_{\{2,p\}}$. Пусть ненильпотентная группа $G \in \mathbf{Sch}(4)_{\{2,p\}}$. Тогда в группе G существует подгруппа Шмидта, и по условию она имеет ранг 4. По лемме 1.2.6 все подгруппы Шмидта в группе G будут $S_{<2,5>}$-подгруппами. Значит, при $p \neq 5$ класс $\mathbf{Sch}(4)_{\{2,p\}}$ состоит из нильпотентных групп. При $p = 5$ в ненильпотентных группах из класса $\mathbf{Sch}(4)_{\{2,5\}}$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп. Следовательно, $\mathbf{Sch}(4)_{\{2,5\}} = \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_5$.

(2) Пусть $G \in \mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$, т. е. G является $\{p,q\}$-группой, и любая ее подгруппа Шмидта имеет ранг 4.

Предположим, что p не делит (q^2+1). По лемме 1.2.7 показатель числа q по модулю p не равен 4. Поэтому в G нет $S_{<q,p>}$-подгрупп и $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ по следствию 1.1.3. Аналогично, если q не делит (p^2+1), то $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$. Отсюда следует, что $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ в случае, когда p не делит (q^2+1), и q не делит (p^2+1). Поскольку $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$, то утверждение (2.1) доказано.

Пусть теперь p не делит (q^2+1), а q делит (p^2+1). По доказанному $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$. Если X — произвольная группа из $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ и S — ее подгруппа Шмидта, то S будет $S_{<p,q>}$-подгруппой по следствию 1.1.3 и ранг S равен 4 по лемме 1.2.7. Значит, $X \in \mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$ и $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$.

Аналогично проверяется утверждение (2.3).

Рассмотрим случай (2.4). Пусть Y — произвольная $\{p,q\}$-группа. Поскольку p делит (q^2+1), а q делит (p^2+1), то по лемме 1.2.7 ранги $S_{<p,q>}$-подгрупп и $S_{<q,p>}$-подгрупп из группы Y равны 4. Значит, $Y \in \mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$ и $\mathfrak{S}_{\{p,q\}} \subseteq \mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$. Обратное включение выполняется по определению класса $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$, поэтому имеем равенство $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{S}_{\{p,q\}}$. Теорема доказана.

Пример 1.2.1. Для простых чисел 13 и 5 число 4 является показателем 13 по модулю 5 и показателем 5 по модулю 13. Пусть E_{p^n} — элементарная абелева группа порядка p^n, а Z_m — циклическая группа порядка m. По лемме 1.2.2 существуют $S_{<5,13>}$-группа $E_{5^4} \leftthreetimes Z_{13}$ и $S_{<13,5>}$-группа $E_{13^4} \leftthreetimes Z_5$. Их прямое произведение $(E_{5^4} \leftthreetimes Z_{13}) \times (E_{13^4} \leftthreetimes Z_5)$ является недисперсивной $\{5,13\}$-группой, у которой все подгруппы Шмидта имеют ранг 4. Поэтому ситуация, рассмотренная в теореме 1.2.5 (2.4), имеет место для $\{p,q\} = \{5,13\}$. В частности, существуют недисперсивные группы, в которых каждая подгруппа Шмидта имеет ранг 4.

Следствие 1.2.1. *Пусть* $G \in \mathbf{Sch}(4)$. *Тогда*

(1) G — 2-*замктута;*

(2) $5'$-*холлова подгруппа* 2-*разложима и* 3-*нильпотентна;*

(3) $61'$-*холлова подгруппа* 11-*нильпотентна.*

Доказательство. (1) Если группа не 2-замкнута, то по теореме 1.1.7 в ней существует $S_{<p,2>}$-подгруппа для некоторого p. Но ее ранг равен 1, противоречие. Значит, G — 2-замкнута.

(2) Пусть $G_{5'} = H$ — $5'$-холлова подгруппа. Тогда H — 2-замкнута по пункту (1). Если H не является 2-нильпотентной, то по следствию 1.1.3 в ней существует $S_{<2,p>}$-подгруппа для некоторого $p \in \pi(H)$. Так как ее ранг равен 4, то имеем противоречие с леммой 1.2.6. Значит, H — 2-нильпотентна, поэтому она 2-разложима. Если H не является 3-нильпотентной, то существует $S_{<3,p>}$-подгруппа S для некоторого $p \in \pi(H)$. Так как ранг S равен 4, то p делит $3^2 + 1 = 10$, т. е. $p = 5$, но $5 \notin \pi(H)$. Значит, H — 3-нильпотентна.

(3) Пусть $G_{61'} = K$ — $61'$-холлова подгруппа. Если K не является 11-нильпотентной, то существует $S_{<11,p>}$-подгруппа S для некоторого $p \in \pi(K)$. Так как ранг S равен 4, то p делит $11^2 + 1 = 122$, т. е. $p = 61$, но $61 \notin \pi(K)$. Значит, K — 11-нильпотентна. Следствие доказано.

1.3 Группы с полунормальными подгруппами Шмидта

Поскольку группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в каждой ненильпотентной группе, то они являются универсальными подгруппами групп. Естественно поэтому, свойства заключенных в группе подгрупп Шмидта оказывают существенное влияние на строение самой группы. Исследованиям строения групп по свойствам подгрупп Шмидта посвящены, например, работы Я. Г. Берковича [3–5,61], В. А. Ведерникова [9,10], В. Д. Мазурова [28], В. С. Монахова [35–37,41–43], С. А. Сыскина [28], см. также [26,27,49].

В данном разделе рассмотрены результаты, связанные с полунормальными подгруппами Шмидта.

Понятие полунормальной подгруппы было предложено в работе [84].

Определение 1.3.1. Подгруппа A называется полунормальной в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AB_1 — собственная в G подгруппа для всех собственных подгрупп B_1 из B.

В. В. Подгорная предложила подгруппу B называть супердобавлением к подгруппе A в группе G.

В работе [84] были установлены некоторые элементарные свойства полунормальных подгрупп, и получены четыре достаточные условия для сверхразрешимости группы.

Лемма 1.3.1 [84]. *Группа G сверхразрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *все 2-максимальные подгруппы в группе G полунормальны;*

(2) *подгруппы простых порядков и порядка 4 полунормальны;*

(3) *существует нормальная подгруппа N нечетного порядка в группе G такая, что G/N сверхразрешима и каждая минимальная подгруппа из N полунормальна в G;*

(4) *максимальные подгруппы из силовских подгрупп группы G полунормальны в G.*

Так же в работе [84] приведены примеры, показывающие, что условия (1), (2) и (4) леммы 1.3.1 не являются необходимыми для сверхразрешимости группы.

В дальнейшем понятие полунормальной подгруппы рассматривал П. Ван [87]. Он установил некоторые достаточные условия для нильпотентности группы G с отдельными полунормальными подгруппами.

В частности, П. Ван [87] доказал следующую теорему

Теорема 1.3.1 [87, теорема 2]. *Если в группе G все циклические примарные подгруппы полунормальны, и любая минимальная подгруппа группы G содержится в центре G, то G нильпотентна.*

Т. Фогуэль в своей работе [66] перечислил простые группы с полунормальной нетривиальной подгруппой. Дело в том, что нетривиальная полунормальная подгруппа в простой группе имеет простой индекс и применима теорема Р. М. Гуральника [70], которая использует классификацию конечных простых групп.

Теорема 1.3.2 [70, теорема 3]. *Простая группа G содержит собственную нетривиальную полунормальную подгруппу H тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений:*

(a) *$G \simeq A_p$ и $H \simeq A_{p-1}$, p — простое число;*

(b) *$G \simeq PSL(n, q)$, q — простое число и H — стабилизатор прямой или гиперплоскости, $|G : H| = (q^n - 1)(q - 1) = p$, p — простое число, $p \geq 2$;*

(c) *$G \simeq PSL(2, 11)$, $H \simeq A_5$ и $|G : H| = 11$;*

(d) *$G \simeq M_{23}$ и $H \simeq M_{22}$ или $G \simeq M_{11}$ и $H \simeq M_{10}$.*

В работе [66] установлена справедливость следующего утверждения

Теорема 1.3.3 [66, теорема 4]. *В группе G с полунормальной π-холловой подгруппой A существует π'-холлова подгруппа B и подгруппа A перестановочна с каждой q-подгруппой из G для всех $q \in \pi'$.*

Используя классификацию конечных простых групп, А. Карокка и Х. Матос [62] доказали разрешимость подгруппы H^G в случае, когда H — 2-нильпотентная полунормальная подгруппа группы G.

Теорема 1.3.4 [62, теорема B]. *Пусть H — полунормальная подгруппа группы G. Тогда:*

(1) *если H 2-нильпотентна, то H^G разрешима;*

(2) *если порядок H нечетен, то порядок H^G нечетен.*

Без использования классификации конечных простых групп эти утверждения доказаны в [17, лемма 10].

В. С. Монахов [32] изучил группы с полунормальной холловой подгруппой и доказал частичную разрешимость таких групп в различных случаях.

Теорема 1.3.5 [32, теорема 1]. *Пусть в группе G существует полунормальная π-холлова подгруппа H. Тогда группа G π-разрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *H 2-нильпотентна;*

(2) *H разрешима и $3 \notin \pi$.*

Также В. С. Монаховым была дана оценка π-длины, нильпотентной π-длины и производной π-длины π-разрешимой группы G с полунормальной холловой подгруппой.

Теорема 1.3.6 [32, теорема 2]. *Пусть G — π-разрешимая группа с полунормальной π-холловой подгруппой H. Тогда*

(1) *$H' \subseteq O_\pi(G)$;*

(2) *$l_\pi(G) \leq 2$, $l_{\pi'}(G) \leq 2$;*

(3) *$l_\pi^n(G) \leq 1 + n(H)$, $l_\pi^a(G) \leq 1 + d(H)$;*

(4) *Если $G_{\pi'}$ q-сверхразрешима для некоторого $q \subseteq \pi'$, то группа G q-сверхразрешима.*

В этой же статье [32] В. С. Монахов получил ряд следствий, в которых доказана разрешимость и частичная разрешимость групп при условии, что некоторые холловы подгруппы полунормальны.

В. В. Подгорная [44] исследовала строение групп с полунормальной максимальной подгруппой и свойства групп с полунормальной силовской подгруппой. Она доказала ряд теорем.

Теорема 1.3.7 [44]. *Пусть H — максимальная подгруппа группы G. Подгруппа H полунормальна в группе G тогда и только тогда, когда индекс H в G есть простое число.*

Теорема 1.3.8 [44]. *Пусть p — наибольший простой делитель порядка группы G и P — ее силовская p-подгруппа. Если P полунормальна в G, то P — нормальная подгруппа группы G.*

В работе [44] было доказано, что если все силовские подгруппы полунормальны в группе, то группа сверхразрешима.

В. С. Монахов и В. Н. Князина [17] исследовали группы, в которых имеются полунормальные подгруппы Шмидта четного порядка. Доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1.3.9 [17, теорема 1]. *Если A — полунормальная подгруппа Шмидта группы G и подгруппа A^G неразрешима, то A является 2-замкнутой $\{2,3\}$-подгруппой.*

Теорема 1.3.10 [17, теорема 2]. *Если в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта полунормальны, то группа G разрешима.*

Следствие 1.3.1 [17, следствие]. *Если в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта полунормальны, то группа G разрешима.*

Также авторами работы [17] был получен ряд свойств полунормальных подгрупп. Перечислим некоторые из них, необходимые для доказательств в главах диссертации.

Лемма 1.3.2 [17, лемма 2]. (1) *Если H — полунормальная подгруппа группы G и $H \leq X \leq G$, то H полунормальна в X.*

(2) *Если H — полунормальная подгруппа группы G и $N \lhd G$, то HN/N полунормальна в G/N.*

(3) *Если H — полунормальная подгруппа группы G и K — её супердобавление, то H перестановочна с подгруппой L^g для всех $L \leq K$ и всех $g \in G$. В частности, подгруппа K^g будет супердобавлением к подгруппе H для каждого $g \in G$.*

Лемма 1.3.3 [17, лемма 3]. *Если A — полунормальная подгруппа группы G и B — ее супердобавление, то для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g полунормальна в G и подгруппа B является супердобавлением к подгруппе A^g.*

Лемма 1.3.4 [17, лемма 5]. *Если A — полунормальная подгруппа группы G и X — непустое множество элементов из G, то подгруппа*

$$A^X = \langle A^x \mid x \in X \rangle$$

полунормальна в G.

Лемма 1.3.5 [17, лемма 10]. *Если A — полунормальная подгруппа группы G, то подгруппа A^G разрешима в каждом из следующих случаев:*

(1) *подгруппа A 2-нильпотентна;*

(2) *подгруппа A разрешима и 3 не делит порядок A.*

Лемма 1.3.6 [17, лемма 11]. *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G. Если A — полунормальная в G подгруппа и p не делит порядок A, то p не делит порядок подгруппы A^G.*

Лемма 1.3.7 [17, лемма 6]. *Пусть в группе G все $S_{<p,q>}$-подгруппы полунормальны. Тогда:*

(1) *если H — подгруппа группы G, то в H все $S_{<p,q>}$-подгруппы полунормальны;*

(2) *если N — нормальная подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N все $S_{<p,q>}$-подгруппы полунормальны.*

В 1962 году О. Кегель [76] ввел понятие S-квазинормальной подгруппы.

Определение 1.3.2. Подгруппа H группы G называется S-квазинормальной в G, если H перестановочна с каждой силовской подгруппой группы G.

Группы с S-квазинормальной подгруппой изучали многие авторы, например, М. Асаад [56], М. Асаад и А. А. Гелиель [57], А. Баллестер-Болинше (1989), А. Баллестер-Болинше и П. Агилера (1996, 1998) и другие. С. Сринивасан [83] доказал, что если максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G нормальны или S-квазинормальны в G, то G сверхразрешима. Позже А. Шаалан [82] доказал, что если каждая циклическая подгруппа простого порядка или порядка 4 S-квазинормальна в группе G, то G является сверхразрешимой.

Имеются различные обобщения понятия полунормальной подгруппы, см. [58].

Определение 1.3.3. Подгруппа A называется S-полунормальной (или SS-перестановочной) в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна с каждой силовской подгруппой из B. В этом случае подгруппу B будем называть S-добавлением к A в G.

Группы с некоторыми S-полунормальными подгруппами исследовались во многих работах, из которых выделим [11, 57, 69, 74, 77, 78].

Говорят, что подгруппы A и B перестановочны, если $AB = BA$, т. е. множество всех элементов ab, где $a \in A$, $b \in B$ образует подгруппу. Подгруппа группы G называется перестановочной или квазинормальной, если она перестановочна со всеми подгруппами из G.

Одной из первых работ, посвященной перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта, является работа Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [2]. В этой работе наряду с другими результатами получены следующие утверждения.

Теорема 1.3.11.(1) *Пусть каждая не лежащая в $S(G)$ 2-нильпотентная подгруппа Шмидта H четного порядка перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G, порядки которых взаимно просты с H. Тогда группа G разрешима,* [2, теорема 2].

(2) *Пусть все силовские p-подгруппы группы G перестановочны со всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта. Тогда группа G p-разрешима,* [2, теорема 6].

(3) *Пусть каждая силовская 2-подгруппа группы G перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка. Тогда группа G разрешима,* [2, теорема 7].

(4) *Если каждая p-замкнутая pd-подгруппа Шмидта порядка $p^\alpha q^\beta$ перестановочна со всеми силовскими q-подгруппами группы G, то G p-разрешима,* [2, теорема 8].

(5) *Если каждая максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из G, то G разрешима,* [2, следствие 3].

В связи с теоремой Берковича – Пальчика вполне естественно возникает следующий вопрос: *будет ли группа G r-разрешимой, если в ней некоторая силовская r-подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта?*

В общем случае существуют простые группы, в которых для некоторого простого r каждая силовская r-подгруппа перестановочна с r'-подгруппами Шмидта. Например, в группе $PSL(2,7)$ каждая силовская 2-подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка. В группе $SL(2,8)$ каждая силовская 3-подгруппа перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка. В группе $SL(2,4)$ каждая силовская 5-подгруппа перестановочна с каждой 2-замкнутой подгруппой Шмидта четного порядка. В следующих группах вообще нет подгрупп Шмидта нечетного порядка: $PSL(2,p)$, p — простое число Ферма, $PSL(2,9)$, $SL(2,2^n)$, $n > 2$, $Sz(2^{2k+1})$, $k \geq 1$, $PSU(5,4)$, $PSU(4,2)$, $PSp(4,2^n)$. Поэтому в этих группах любая силовская подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта нечетного порядка.

Тем не менее при некотором выборе подгрупп Шмидта для каждого простого r можно получить r-разрешимость группы G.

Так В. Н. Княгина и В. С. Монахов в работе [20] установили признаки r-разрешимости групп с условием перестановочности силовской r-подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта. Получены также признаки разрешимости групп, в которых некоторые подгруппы Шмидта перестановочны.

Одним из основных результатов работы [20] является следующая теорема.

Теорема 1.3.12 [20]. (1) *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка, то группа G r-разрешима.*

(2) *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка и $r \notin \{3, 5\}$, то G r-разрешима.*

(3) *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми не содержащимися в $S_r(G)$ r-замкнутыми rd-подгруппами Шмидта, то G r-разрешима.*

(4) *Если каждая не содержащаяся в $S_r(G)$ r-замкнутая rd-подгруппа Шмидта порядка $r^\alpha q^\beta$ перестановочна с некоторой силовской q-подгруппой группы G, то G r-разрешима.*

В этой теореме ограничение $r \notin \{3, 5\}$ отбросить нельзя. Примерами служат группы $SL(2, 8)$ и $SL(2, 4)$. В простой группе $PSL(2, 7)$ нет 7-нильпотентных $7d$-подгрупп Шмидта. Поэтому группа, в которой силовская r-подгруппа перестановочна со всеми r-нильпотентными rd-подгруппами Шмидта, не обязана быть r-разрешимой.

В работе [19] были получены локальные аналоги результатов работы Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [2, следствия 2–4], а в [21] рассматривались группы, в которых n-максимальные подгруппы перестановочны с подгруппами Шмидта.

В. Н. Княгина в работе [23] установила разрешимость групп с перестановочными подгруппами Шмидта четного порядка.

Теорема 1.3.13 [23]. *Пусть в группе G каждая 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка перестановочна с каждой 2-нильпотентной подгруппой Шмидта четного порядка. Тогда группа G разрешима.*

Теорема 1.3.14 [23]. *Если в группе G все 2-нильпотентные подгруппы Шмидта четного порядка полунормальны, то G разрешима.*

Замечание 1.3.1 [23]. В теореме 1.3.14 условие 2-нильпотентности нельзя заменить условием 2-замкнутости. Так, в группе $PSL(2, 5)$ все 2-замкнутые подгруппы Шмидта четного порядка изоморфны знакопеременной группе A_4. Они имеют индекс 5, поэтому полунормальны в $PSL(2, 5)$. Но группа $PSL(2, 5)$ не является разрешимой.

В теории конечных групп часто встречается ситуация, когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G имеется такой элемент x, для которого имеет место $AB^x = B^x A$.

А. Н. Скиба [69] предложил теорию X-перестановочных подгрупп.

Определение 1.3.4 [69]. Пусть X — непустое множество из группы G.

(1) Подгруппа A называется X-перестановочной с подгруппой B, если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^x A$.

(2) Подгруппа A называется X-перестановочной в G, если A X-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Он в соавторстве с коллегами (В. Го, К. П. Шам) опубликовали цикл работ [11,67,69], в которых устанавливались признаки разрешимости, сверхразрешимости групп при условии, что некоторые подгруппы X-перестановочны, где X — некоторая фиксированная подгруппа из группы.

В частности, в работе [11] получены критерии сверхразрешимости групп на основе понятия X-перестановочных подгрупп.

Теорема 1.3.15 [11]. *Пусть G — группа и $X = F(G)$ — ее подгруппа Фиттинга. Тогда G является сверхразрешимой в том и только в том случае, когда $G = AB$, где A и B — такие субнормальные в G подгруппы (по крайней мере, одна из которых нильпотентна), что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из A и B X-перестановочны со всеми максимальными подгруппами из G.*

Отметим следующий частный случай теоремы 1.3.15.

Теорема 1.3.16 [11]. *Пусть G — группа и $X = F(G)$ — ее подгруппа Фиттинга. Тогда G является сверхразрешимой в том и только в том случае, когда все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G X-перестановочны со всеми максимальными подгруппами из G.*

В работе [69] этими же авторами введено еще одно обобщение перестановочных подгрупп.

Определение 1.3.5. Подгруппа A называется X-полуперестановочной в G, если A X-перестановочна со всеми подгруппами из некоторого добавления T к A в G.

А. Н. Скиба, В. Го и К. П. Шам получили еще один признак сверхразрешимости групп, но уже на основе понятия X-полуперестановочной подгруппы.

Теорема 1.3.17 [69]. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа группы G $F(G)$-полуперестановочна в G.*

1.4 Группы с субнормальными подгруппами Шмидта

В 1981 году В. Н. Семенчук [46] исследовал группы, в которых все подгруппы Шмидта субнормальны. Он доказал следующую теорему

Теорема 1.4.1 [46]. *Если все подгруппы Шмидта группы субнормальны, то группа метанильпотентна.*

Случай, когда некоторые подгруппы Шмидта группы субнормальны, рассмотрен в работе [18] В. С. Монаховым и В. Н. Князиной. Ими была доказана следующая теорема

Теорема 1.4.2 [18]. (1) *Пусть в группе G все p-нильпотентные pd-подгруппы Шмидта субнормальны. При $p > 2$ дополнительно предположим, что группа G p-разрешима. Тогда $G/O_{p'}(F(G))$ p-замкнута. В частности, $l_p(G) \leq 1$.*

(2) *Если в группе G все p-замкнутые pd-подгруппы Шмидта субнормальны, то $G/O_p(G)$ p-нильпотентна. В частности, группа G p-разрешима и $l_p(G) \leq 2$.*

(3) *Если в группе G все p-сверхразрешимые pd-подгруппы Шмидта субнормальны, то группа G p-разрешима, $l_p(G) \leq 1$ и фактор-группа $G/O_{p'}(F(G))$ p-замкнута.*

(4) *Если в группе G все pd-подгруппы Шмидта субнормальны, то фактор-группа $G/F(G)$ p-разложима.*

(5) *Если в группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то фактор-группа $G/F(G)$ абелева.*

В частности, теорема 1.4.2 (5) усиливает результат В. Н. Семенчука.

В. А. Ведерников [8] более детально изучил группы, все подгруппы Шмидта которых субнормальны.

Теорема 1.4.3 [8, теорема 1]. *В ненильпотентной группе G все подгруппы Шмидта субнормальны тогда и только тогда, когда*

$$G/H(G) = G_1 \times \ldots \times G_n,$$

где G_i — $F_{<p_i,d_i>}$-группа, причем $(d_i, d_j) = 1$ для любых $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Здесь $F_{<p,d>}$-группа — группа Фробениуса, ядром которой является элементарная абелева группа порядка p^m, с циклическим дополнением порядка d, где m — показатель числа p по модулю q для любого $q \in \pi(d)$, а $H(G)$ — гиперцентр группы G.

Следствие 1.4.1 [8, следствие 1]. *Если в ненильпотентной группе G все подгруппы Шмидта субнормальны, то $G/F(G)$ является циклической группой.*

Данное следствие дополняет результат В. С. Монахова и В. Н. Князиной (теорема 1.4.2 (5)).

Теорема 1.4.4 [8, теорема 2]. *Пусть S является $S_{<p,q>}$-подгруппой группы G и все p-замкнутые pd-подгуппы Шмидта группы G субнормальны в G. Тогда*

(1) $\Phi(S_p) \leq H(G)$;

(2) *если R является $S_{<p,r>}$-подгруппой группы G, $q \neq r$, $F = S^G R^G$ и $S_p \leq R$, то $S_p = R_p$, $\Phi(S_p) \leq Z(F)$, $F/H(F)$ является $F_{<p,qr>}$-группой и $\Phi(S_p)$ является силовской p-подгруппой группы $H(F)$;*

(3) *если R является $S_{<p,r>}$-подгруппой группы G, $q \neq r$, $F = S^G R^G$ и $S_p \nleq R$, то $D = S^G \cap R^G = \Phi(S_p) \cap \Phi(R_p) \leq Z(F)$, $F/D = S^G/D \times R^G/D$, $H(F) \cap S^G = H(S^G)$, $H(F) \cap R^G = H(R^G)$ и*

$$F/H(F) \simeq S^G/H(S^G) \times R^G/H(R^G)$$

является прямым произведением, соответственно, $F_{<p,q>}$- и $F_{<p,r>}$-групп.

Данная теорема дополняет результат В. С. Монахова и В. Н. Княгиной (теорема 1.4.2 (3)).

В работе Х. А. Аль-Шаро и А. Н. Скибы [54] рассматривались группы с σ-субнормальными подгруппами Шмидта.

Теорема 1.4.5 [54, теорема 1.2]. *Если каждая подгруппа Шмидта в G σ-субнормальна в G, то $G/F_\sigma(G)$ абелева.*

Данная теорема является обобщением результата В. Н. Княгиной и В. С. Монахова (теорема 1.4.2 (5)).

ГЛАВА 2

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

В разделе 2.1 главы устанавливаются признаки частичной разрешимости и перечисляются композиционные факторы групп, в которых силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта четного порядка из добавления к этой силовской подгруппе.

В разделе 2.2 исследуются группы, некоторая силовская подгруппа которых перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка.

В разделе 2.3 устанавливается частичная разрешимость групп, в которых силовская подгруппа перестановочна с коммутантами B-подгрупп четного порядка.

В разделе 2.4 приводятся краткие выводы по главе.

2.1 О перестановочности силовской подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта четного порядка

Перестановочностью силовских подгрупп с подгруппами Шмидта занимались многие авторы. Одними из первых были Я. Г. Беркович и Э. М. Пальчик [2]. Они доказали разрешимость группы при условии, что каждая силовская 2-подгруппа перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка; частичную разрешимость группы, если все силовские p-подгруппы перестановочны со всеми p-замкнутыми pd-подгруппами Шмидта. Эти результаты получили развитие в работе В. С. Монахова и В. Н. Княгиной [20]. Они установили новые признаки p-разрешимости групп с условием перестановочности силовской p-подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта четного порядка. В частности, из [20, теорема 1] вытекает

Теорема 2.1.1. *Если некоторая силовская p-подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта, то группа G p-разрешима.*

По аналогии с полунормальной подгруппой, см. определение 1.3.1, можно исследовать группы, в которых некоторая силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта из добавления к этой силовской подгруппе. В. С. Монахов предложил следующее понятие.

Определение 2.1.1. Подгруппа A группы G называется OS-полунормальной в G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B. В этой ситуации подгруппу B будем называть OS-добавлением к подгруппе A в группе G.

Обозначение OS связано с Отто Юльевичем Шмидтом.

Понятие OS-полунормальной подгруппы является обобщением понятия полунормальной подгруппы.

Пример 2.1.1. Если A — подгруппа группы G и существует нильпотентная подгруппа B такая, что $G = AB$, то A будет OS-полунормальной подгруппой группы G. В частности, любая подгруппа примарного индекса является OS-полунормальной подгруппой.

Пример 2.1.2. В группе $PSL(2,7)$ силовская 2-подгруппа Q будет OS-полунормальной, поскольку существует нециклическая подгруппа B порядка 21, которая является группой Шмидта, и $G = QB$.

Пример 2.1.3. В группе $SL(2,8)$ силовская 3-подгруппа R будет OS-полунормальной, поскольку существует подгруппа Шмидта $B = E_{2^3} \leftthreetimes Z_7$ такая, что $G = RB$.

Пример 2.1.4. В группе $PSL(2,5)$ силовская 5-подгруппа P будет OS-полунормальной, поскольку существует подгруппа $B \simeq A_4$ такая, что $PSL(2,5) = PB$. Здесь A_4 — знакопеременная группа, она является группой Шмидта.

Отметим, что в примерах 2.1.2 – 2.1.4 силовская r-подгруппа, $r \in \{2, 3, 5\}$ соответственно, OS-полунормальна, но не полунормальна.

Далее нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 2.1.1 [71, VI.4.10]. *Пусть A и B — подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^gA$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.*

Лемма 2.1.2 [20, лемма 11]. *Если простая группа G является произведением p-подгруппы P и подгруппы Шмидта S, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *$p = 2$, $G \simeq PSL(2,7)$, $P \simeq D_8$, $S \simeq Z_7 \leftthreetimes Z_3$;*

(2) *$p = 3$, $G \simeq SL(2,8)$, $P \simeq Z_9$, $S \simeq E_8 \leftthreetimes Z_7$;*

(3) *$p = 5$, $G \simeq PSL(2,5)$, $P \simeq Z_5$, $S \simeq A_4 \simeq E_4 \leftthreetimes Z_3$.*

Лемма 2.1.3. (1) *Если группа G является произведением двух подгрупп A и B взаимно простых порядков и K — субнормальная в G подгруппа, то $K = (K \cap A)(K \cap B)$,* [37, лемма 1].

(2) *Пусть H, K и N — попарно перестановочные подгруппы группы G. Если H холлова, то $N \cap HK = (N \cap H)(N \cap K)$,* [24, лемма 5].

Лемма 2.1.4. *Пусть A — OS-полунормальная подгруппа группы G и B — ее OS-добавление.*

(1) *Для любого элемента $g \in G$ подгруппа B^g будет OS-добавлением к подгруппе A в группе G.*

(2) *Для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g будет OS-полунормальной в группе G, а подгруппы B и B^g — ее OS-добавлениями.*

(3) *Если X — непустое множество элементов из группы G, то подгруппа $A^X = \langle A^x \mid x \in X \rangle$ будет OS-полунормальной в группе G, а подгруппы B и B^g, $g \in G$, будут OS-добавлениями к A^X в G.*

Доказательство. (1) Пусть $g = ba$ — произвольный элемент из группы G, где $b \in B, a \in A$. Ввиду изоморфизма $B \simeq B^g$ можно считать, что $S^g = S^a$ — произвольная подгруппа Шмидта из B^g, где S — подгруппа Шмидта в B. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$AS^b = S^bA,\ AS^g = AS^{ba} = (AS^b)^a = (S^bA)^a = S^{ba}A = S^gA.$$

Это означает, что B^g — OS-добавление к A в группе G.

(2) Если T — подгруппа Шмидта в B^g, то $T = S^g$ для некоторой подгруппы Шмидта S из B. По условию $AS = SA$, поэтому $A^gS^g = S^gA^g$. Так как $A^gB^g = (AB)^g = G$, то A^g — OS-полунормальная подгруппа в G и B^g — ее OS-добавление. Из утверждения (1) следует, что $(B^g)^{g^{-1}} = B$ будет OS-добавлением к A^g в группе G.

(3) Хорошо известно, что подгруппа, перестановочная с несколькими подгруппами, перестановочна с их порождением. Пусть S — подгруппа Шмидта из B. Тогда S перестановочна с A по определению OS-полунормальной подгруппы, и S перестановочна с A^x по утверждению (2). Поэтому S перестановочна с A^X. Следовательно, A^X — OS-полунормальная подгруппа группы G и B — ее OS-добавление. По утверждению (2) подгруппа B^g, $g \in G$, будет OS-добавлением к A^X. Лемма доказана.

Лемма 2.1.5. *Пусть A — OS-полунормальная подгруппа группы G и B — ее OS-добавление.*

(1) *Если $N \lhd G$, то AN OS-полунормальна в G и B является OS-добавлением к AN в G.*

(2) *Если $N \lhd G$, $N \leq B$, то AN/N OS-полунормальна в G/N и B/N является OS-добавлением к AN/N в G/N.*

(3) *Если $N \lhd G$, $(|N|, |B|) = 1$, то A/N OS-полунормальна в G/N и BN/N является OS-добавлением к A/N в G/N.*

Доказательство. (1) Нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой. Поскольку $G = (AN)B$ и AN перестановочна с любой подгруппой Шмидта из B, то AN — OS-полунормальная подгруппа группы G и B — ее OS-добавление.

(2) Ясно, что $G/N = (AN/N)(B/N)$. Пусть D/N — подгруппа Шмидта из B/N и L — минимальное добавление к N в D. По лемме 1.1.5 подгруппа L содержит подгруппу Шмидта S такую, что $S^L = L$. Так как $S \leq L \leq D \leq B$, то A перестановочна с S. Из леммы 2.1.4 (1) следует, что A перстановочна с S^x для любого $x \in G$. Поэтому A перестановочна с $S^L = L$ и с $LN = D$. Следовательно, AN/N перестановочна с D/N, т. е. AN/N OS-полунормальна в G/N и B/N будет OS-добавлением к AN/N в G/N.

(3) Так как $G = AB$ и $(|N|, |B|) = 1$, то $N \leq A$ и $G/N = (A/N)(BN/N)$. Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B \rightthreetimes N$. Пусть D/N — подгруппа Шмидта из BN/N. Тогда $D = (B \cap D) \rightthreetimes N$, т. е. $B \cap D$ будет минимальным дополнением

к N в D. По лемме 1.1.5 существует подгруппа Шмидта S в $B \cap D$ такая, что $S^{B\cap D} = B \cap D$. Так как $SN/N \simeq S \leq D/N$, то $S = B \cap D$. Теперь A перестановочна с $B \cap D$ по условию, поэтому A/N перестановочна с $(B \cap D)N/N$, т. е. A/N OS-полунормальна в G/N и BN/N ее OS-добавление. Лемма доказана.

Определение 2.1.2. Минимальным OS-добавлением к подгруппе A в группе G называется такая подгруппа B, что $G = AB$, подгруппа A перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B и $AB_1 \neq G$ для всех собственных подгрупп B_1 из B.

Лемма 2.1.6. *Пусть A — неединичная OS-полунормальная подгруппа простой группы G и B — ее минимальное OS-добавление. Тогда все собственные подгруппы в B нильпотентны, т. е. либо B нильпотентна, либо B есть группа Шмидта.*

Доказательство. Предположим, что в B имеется собственная ненильпотентная подгруппа. Тогда существует подгруппа Шмидта $S < B$ и $AS < G$. Из леммы 2.1.4 (1) следует, что $AS^g = S^g A$ для любого $g \in G$. По лемме 2.1.1 либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$, что противоречит условию доказываемого предложения. Поэтому предположение неверно и B либо нильпотентная подгруппа, либо группа Шмидта. Лемма доказана.

Лемма 2.1.7. *Пусть R — неединичная OS-полунормальная r-подгруппа простой группы G и B — ее минимальное OS-добавление. Тогда для R, B, и G возможны только следующие изоморфизмы:*

(1) *$R \simeq Z_5$, $B \simeq A_4$, $G \simeq PSL(2, 5)$;*

(2) *$R \simeq D_8$, $B \simeq Z_7 \rtimes Z_3$, $G \simeq PSL(2, 7)$;*

(3) *$R \simeq Z_9$, $B \simeq E_8 \rtimes Z_7$, $G \simeq SL(2, 8)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2.1.6 и теореме Виланда–Кегеля подгруппа B является группой Шмидта $B = P \rtimes Q$. По лемме 2.1.2

$$G \in \{PSL(2, 7),\ PSL(2, 5),\ SL(2, 8)\}.$$

Факторизации этих групп известны [42], искомые факторизации указаны в пунктах (1)–(3). Лемма доказана.

Лемма 2.1.8. *Пусть U и N — подгруппы группы G и N нормальна в G. Если все подгруппы Шмидта из U содержатся в N, то UN/N нильпотентна.*

Доказательство. В силу изоморфизма $UN/N \simeq U/U \cap N$ достаточно доказать, что $U/U \cap N$ нильпотентна. Предположим противное и пусть $D = U \cap N$, K/D — подгруппа Шмидта из U/D. По лемме 1.1.5 существуют подгруппы

$$S \leq L \leq K \leq U$$

такие, что $K = LD$, S — подгруппа Шмидта и $S^L = L$. По условию

$$S \leq N \cap U = D.$$

Поэтому

$$K = LD = S^L D \leq D,$$

противоречие с тем, что $K/D \neq 1$. Лемма доказана.

Лемма 2.1.9. *Предположим, что в группе G силовская p-подгруппа OS-полунормальна. Если H — субнормальная подгруппа группы G, то силовская p-подгруппа из H OS-полунормальна в H.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы. Пусть P_1 — силовская p-подгруппа из H и P — силовская p-подгруппа в G такая, что $P_1 \leq P$. По лемме 2.1.4 подгруппа P OS-полунормальна в G. Поэтому существует подгруппа B такая, что $G = PB$ и P перестановочна со всеми подгруппа Шмидта из B.

Предположим, что H нормальна в G. Тогда H перестановочна с подгруппами P и B. По лемме 2.1.3 $H = (P \cap H)(B \cap H)$. Пусть S — подгруппа Шмидта из $B \cap H$. По условию $SP = PS$. Так как $S \leq B \cap H$, то по тождеству Дедекинда

$$H \cap SP = S(H \cap P) = SP_1 = H \cap PS = (H \cap P)S = P_1 S.$$

Следовательно, силовская p-подгруппа P_1 из H будет OS-полунормальной в H, и $B \cap H$ является OS-добавлением к P_1 в H.

Пусть теперь H — ненормальная в G подгруппа. Так как H — субнормальная в G подгруппа, то H субнормальна в H^G и $H^G < G$. По доказанному силовская p-подгруппа из H^G OS-полунормальна в H^G. Теперь по индукции лемма справедлива.

Теорема 2.1.2 [3–А]. *Пусть в группе G силовская p-подгруппа OS-полунормальна.*

(1) *Если $p = 2$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2, 7)$. В частности, группа G $\{2, 3, 7\}'$-разрешима.*

(2) *Если $p = 3$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2, 8)$ или являются $3'$-группами.*

(3) *Если $p = 5$, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2, 4)$ или являются $5'$-группами.*

(4) *Если $p \geq 7$, то группа G p-разрешима.*

Доказательство. Заметим, что p-разрешимость группы G равносильна тому, что порядки всех неабелевых композиционных факторов не делятся на p. Поэтому утверждение (4) равносильно утверждению

(4′) Если $p \geq 7$, то все неабелевы композиционные факторы группы G являются p'-группами.

Будем доказывать все утверждения одновременно. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть H/K — произвольный неабелевый композиционный фактор группы G. Тогда H — субнормальная подгруппа группы G, подгруппа K нормальна в H и фактор-группа H/K простая. Если $H \neq G$, то к H применима индукция. Так как H/K является неабелевым композиционным pd-фактором группы H, то по индукции H/K — группа из пунктов (1) – (3), (4′). В этом случае теорема доказана. Поэтому следует считать, что $H = G$ и $p \in \pi(G/K)$.

Теперь $G/K = (PK/K)(BK/K)$ — простая неабелева pd-группа. По теореме Виланда – Кегеля подгруппа BK/K ненильпотентна, а по лемме 2.1.8 в подгруппе B существует подгруппа Шмидта S такая, что S не содержится в K. По условию $PS = SP$, а из леммы 2.1.4 следует, что $PS^x = S^xP$ для всех $x \in G$. Поэтому

$$(PK/K)(SK/K)^{xK} = (SK/K)^{xK}(PK/K).$$

Так как G/K — простая группа, то из леммы 2.1.1 заключаем, что

$$G/K = (PK/K)(SK/K).$$

У группы Шмидта фактор-группы либо циклические, либо являются вновь группами Шмидта. По теореме Виландта – Кегеля подгруппа $SK/K \simeq S/S \cap K$ не циклическая, поэтому SK/K — группа Шмидта и применима лемма 2.1.7. Из этой леммы следует, что $p \leq 5$ и $G/K \simeq PSL(2,7)$ при $p = 2$, $SL(2,8)$ при $p = 3$ или $SL(2,4)$ при $p = 5$. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает разрешимость группы с OS-полунормальными силовскими 2- и 3-подгруппами.

Следствие 2.1.1. *Если в группе G силовские 2- и 3-подгруппы OS-полунормальны, то группа G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима и H/K — неабелев композиционный фактор группы G.

По теореме 2.1.2 (1) $H/K \simeq PSL(2,7)$, поэтому $3 \in \pi(H/K)$. По условию силовская 3-подгруппа группы G OS-полунормальна. По теореме 2.1.2 (2) $H/K \simeq SL(2,8)$. Так как $PSL(2,7) \not\simeq SL(2,8)$, то имеем противоречие. Поэтому предположение неверно и G разрешима. Следствие доказано.

Следствие 2.1.2. *Если в группе G силовские 2- и 7-подгруппы OS-полунормальны, то группа G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима и H/K — неабелев композиционный фактор группы G.

По теореме 2.1.2 (1) $H/K \simeq PSL(2,7)$, поэтому $7 \in \pi(H/K)$. По условию силовская 7-подгруппа группы G OS-полунормальна. По теореме 2.1.2 (4) группа G 7-разрешима, поэтому H/K 7-разрешима. Противоречие. Следствие доказано.

Определение 2.1.3. Подгруппа A группы G называется $OS_{<p,q>}$-полунормальной в G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна со всеми $S_{<p,q>}$-подгруппами из B. В этой ситуации подгруппу B будем называть $OS_{<p,q>}$-добавлением к подгруппе A в группе G.

Пример 2.1.5. Силовская p-подгруппа P разрешимой группы G будет $OS_{<p,q>}$-полунормальной подгруппой группы G для любого $q \neq p$. Это следует из того, что $G = PG_{p'}$ и в подгруппе $G_{p'}$ нет $S_{<p,q>}$-подгрупп. Ясно, что существуют разрешимые группы, в которых силовская p-подгруппа $OS_{<p,q>}$-полунормальна, но не OS-полунормальна.

Пример 2.1.6. Если A — подгруппа группы G и существует p-нильпотентная подгруппа B такая, что $G = AB$, то A будет $OS_{<p,q>}$-полунормальной подгруппой группы G для любого q. Это следует из того, что в подгруппе B нет $S_{<p,q>}$-подгрупп.

Пример 2.1.7. В группе $PSL(2,7)$ силовская 2-подгруппа Q будет $OS_{<7,3>}$-полунормальной, поскольку существует нециклическая подгруппа B порядка 21 и $G = QB$. В группе $SL(2,8)$ силовская 3-подгруппа R будет $OS_{<2,7>}$-полунормальной, поскольку существует подгруппа Шмидта $B = E_{2^3} \leftthreetimes Z_7$ такая, что $G = RB$. В группе $PSL(2,5)$ силовская 5-подгруппа P будет $OS_{<2,3>}$-полунормальной, поскольку существует подгруппа $B \simeq A_4$ такая, что $PSL(2,5) = PB$.

Лемма 2.1.10. *Пусть A — $OS_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа группы G и B — ее $OS_{<p,q>}$-добавление.*

(1) *Для любого элемента $g \in G$ подгруппа B^g будет $OS_{<p,q>}$-добавлением к подгруппе A в группе G.*

(2) *Для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g будет $OS_{<p,q>}$-полунормальной в группе G, а подгруппы B и B^g — ее $OS_{<p,q>}$-добавлениями.*

(3) *Если X — непустое множество элементов из группы G, то подгруппа $A^X = \langle A^x \mid x \in X\rangle$ будет $OS_{<p,q>}$-полунормальной в группе G, а подгруппы B и B^g, $g \in G$, будут $OS_{<p,q>}$-добавлениями к A^X в G.*

Доказательство. (1) Пусть $g = ba$ — произвольный элемент из группы G, где $b \in B, a \in A$. Ввиду изоморфизма $B \simeq B^g$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная $S_{<p,q>}$-подгруппа из B^g, где S — $S_{<p,q>}$-подгруппа в B. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$AS^b = S^bA,\ AS^g = AS^{ba} = (AS^b)^a = (S^bA)^a = S^{ba}A = S^gA.$$

Это означает, что B^g — $OS_{<p,q>}$-добавление к A в группе G.

(2) Если T — $S_{<p,q>}$-подгруппа в B^g, то $T = S^g$ для некоторой $S_{<p,q>}$-подгруппы S из B. По условию $AS = SA$, поэтому

$$A^gT = A^gS^g = (AS)^g = (SA)^g = S^gA^g = TA^g.$$

Так как $A^g B^g = (AB)^g = G$, то A^g — $OS_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа в G и B^g — ее $OS_{<p,q>}$-добавление. Из утверждения (1) следует, что $(B^g)^{g^{-1}} = B$ будет $OS_{<p,q>}$-добавлением к A^g в группе G.

(3) Хорошо известно, что подгруппа, перестановочная с несколькими подгруппами, перестановочна с их порождением. Пусть S — $S_{<p,q>}$-подгруппа из B. Подгруппа S перестановочна с A по определению $OS_{<p,q>}$-полунормальной подгруппы и S перестановочна с A^x по утверждению (2) для любого $x \in X$. Поэтому S перестановочна с A^X. Следовательно, A^X — $OS_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа группы G и B — ее $OS_{<p,q>}$-добавление. По утверждению (2) подгруппа B^g, $g \in G$, будет $OS_{<p,q>}$-добавлением к A^X. Лемма доказана.

Лемма 2.1.11. *Пусть A — $OS_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа группы G и B — ее $OS_{<p,q>}$-добавление.*

(1) *Если $A \le U \le G$, то A $OS_{<p,q>}$-полунормальна в U и $U \cap B$ — $OS_{<p,q>}$-добавление к A в группе U.*

(2) *Если $N \lhd G$, то AN $OS_{<p,q>}$-полунормальна в G и B является $OS_{<p,q>}$-добавлением к AN в G.*

(3) *Если $N \lhd G$, $N \le B$, то AN/N $OS_{<p,q>}$-полунормальна в G/N и B/N является $OS_{<p,q>}$-добавлением к AN/N в G/N.*

(4) *Если $N \lhd G$, $(|N|, |B|) = 1$, то A/N $OS_{<p,q>}$-полунормальна в G/N и BN/N является $OS_{<p,q>}$-добавлением к A/N в G/N.*

Доказательство. (1) Поскольку A — $OS_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа группы G и B — ее $OS_{<p,q>}$-добавление, то $G = AB$ и A перестановочна со всеми $S_{<p,q>}$-подгруппами из B. По тождеству Дедекинда $U = A(B \cap U)$. Поскольку A перестановочна со всеми $S_{<p,q>}$-подгруппами из $B \cap U \le B$, то A — $OS_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа в U и $B \cap U$ — ее $OS_{<p,q>}$-добавление.

(2) Нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой. Поскольку $G = (AN)B$ и AN перестановочна с любой $S_{<p,q>}$-подгруппой из B, то AN — $OS_{<p,q>}$-полунормальная подгруппа группы G и B — ее $OS_{<p,q>}$-добавление.

(3) Ясно, что $G/N = (AN/N)(B/N)$. Пусть D/N — $S_{<p,q>}$-подгруппа из B/N и L — минимальное добавление к N в D. По лемме 1.1.5 подгруппа L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу S такую, что $S^L = L$. Так как $S \le L \le D \le B$, то A перестановочна с S. Из леммы 2.1.10 (1) следует, что A перестановочна с S^x для любого $x \in G$. Поэтому A перестановочна с $S^L = L$ и с $LN = D$. Следовательно, AN/N перестановочна с D/N, т. е. AN/N $OS_{<p,q>}$-полунормальна в G/N и B/N будет $OS_{<p,q>}$-добавлением к AN/N в G/N.

(4) Так как $G = AB$ и $(|N|, |B|) = 1$, то $N \le A$ и $G/N = (A/N)(BN/N)$. Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B \leftthreetimes N$. Пусть D/N — $S_{<p,q>}$-подгруппа из BN/N. Тогда $D = (B \cap D) \leftthreetimes N$. По лемме 1.1.5 существует $S_{<p,q>}$-подгруппа S в $B \cap D$ такая, что $S^{B \cap D} = B \cap D$. Так как $S \simeq SN/N \le D/N$, то

$S = B \cap D$. Теперь A перестановочна с $B \cap D$ по условию, поэтому A/N перестановочна с $(B \cap D)N/N$, т. е. A/N $OS_{<p,q>}$-полунормальна в G/N и BN/N — ее $OS_{<p,q>}$-добавление. Лемма доказана.

Далее рассмотрим группы с разрешимой r'-холловой подгруппой. Нам понадобятся факторизации групп $PSL(2, q)$. Они получены в [75], а также выписаны в [42, теорема 0.8]. Приведем формулировку этого результата. Будут использоваться следующие обозначения: S_4 и $S_4^\star$ — несопряженные в $PSL(2, p^n)$ симметрические группы степени 4; A_4, $A_4^\star$, A_5 и $A_5^\star$ — несопряженные в $PSL(2, p^n)$ знакопеременные группы степени 4 и 5 соответственно.

Лемма 2.1.12. (1) $PSL(2, 2^n) = (E_{2^n} \leftthreetimes Z_{2^n-1})D_{2(2^n+1)} = (E_{2^n} \leftthreetimes Z_{2^n-1})Z_{2^n+1}$, $n \geq 2$.

(2) *Если* $p > 2$ *и* $\frac{p^n-1}{2}$ *— нечетное число, то*

$$PSL(2, p^n) = (E_{p^n} \leftthreetimes Z_{\frac{p^n-1}{2}})D_{p^n+1}.$$

(3) $PSL(2, 7) = (Z_7 \leftthreetimes Z_3)D_8 = (Z_7 \leftthreetimes Z_3)S_4 = (Z_7 \leftthreetimes Z_3)S_4^\star = Z_7 S_4 = Z_7 S_4^\star$.

(4) $PSL(2, 9) = (E_9 \leftthreetimes Z_4)A_5 = (E_9 \leftthreetimes Z_4)A_5^\star = A_4 A_5^\star = A_4^\star A_5 = S_4 A_5 = S_4^\star A_5^\star = A_5 A_5^\star$.

(5) $PSL(2, 11) = (E_{11} \leftthreetimes Z_5)D_{12} = (E_{11} \leftthreetimes Z_5)A_4 = (E_{11} \leftthreetimes Z_5)A_5 = (E_{11} \leftthreetimes Z_5)A_5^\star = Z_{11} A_5 = Z_{11} A_5^\star$.

(6) $PSL(2, 19) = (E_{19} \leftthreetimes Z_9)D_{20} = (E_{19} \leftthreetimes Z_9)A_5 = (E_{19} \leftthreetimes Z_9)A_5^\star$.

(7) $PSL(2, 29) = (E_{29} \leftthreetimes Z_{14})A_5 = (E_{29} \leftthreetimes Z_{14})A_5^\star = (E_{29} \leftthreetimes Z_7)A_5 = (E_{29} \leftthreetimes Z_7)A_5^\star$.

(8) $PSL(2, 59) = (E_{59} \leftthreetimes Z_{29})D_{60} = (E_{59} \leftthreetimes Z_{29})A_5 = (E_{59} \leftthreetimes Z_{29})A_5^\star$.

Других факторизаций с точностью до сопряженных подгрупп-сомножителей группа $PSL(2, p^n)$ *не имеет.*

Лемма 2.1.13 [65, теорема 1.1]. *Пусть A и B — разрешимые подгруппы группы G и $(|A|, |B|) = 1$. Если $G = AB$, то композиционные факторы группы G являются группами одного из следующих видов:*

(1) *группа простого порядка;*

(2) $PSL(2, 2^n)$, *где* $n \geq 2$;

(3) $PSL(2, q)$, *где* $q \equiv -1 \pmod 4$;

(4) $PSL(3, 3)$;

(5) M_{11}.

Отметим, что без требования $(|A|, |B|) = 1$ композиционные факторы группы $G = AB$ с разрешимыми подгруппами A и B перечислил Л. С. Казарин [16].

Лемма 2.1.14 [55, следствие 5.6]. *Пусть неабелева простая группа G содержит p'-холлову подгруппу, $p \in \pi(G)$.*

(1) *Если* $p = 2$, *то* $G \simeq PSL(2, r)$ *и* r *— простое число Мерсенна.*

(2) *Если* $p = 3$, *то* $G \simeq PSL(2, 2^3)$.

(3) *Если* $p = 5$, *то* $G \simeq A_5 \simeq PSL(2, 4) \simeq PSL(2, 5)$.

Лемма 2.1.15. *Если p — простое число и $2^n + 1 = p^m$ для некоторых натуральных чисел n и m, то $p^m = 9$ или $m = 1$.*

Доказательство. Если $m = 2t$ — четное, то

$$2^n = p^m - 1 = (p^t - 1)(p^t + 1),\ p^t - 1 = 2,\ p^t = 3,\ m = 2,\ p^m = 9.$$

Если $m = 2t + 1$ — нечетное, то

$$2^n = p^m - 1 = (p - 1)(p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1),\ p - 1 = 2^{n_1},$$

$p = 1 + 2^{n_1}$ — простое число Ферма. Поскольку

$$2^{n-n_1} = p^{m-1} + p^{m-2} + \ldots + p + 1\ \text{ — нечетное число,}$$

то $m = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2.1.16. *Пусть в простой группе G существует разрешимая p'-холлова подгруппа, $p \in \pi(G)$.*

(1) *Если $p = 2$, то $G \simeq PSL(2, r) = (Z_r \leftthreetimes Z_{\frac{r-1}{2}})D_{2^n}$, где $r = 2^n - 1 \geq 7$.*

(2) *Если $p = 3$, то $G \simeq PSL(2, 2^3) = (E_8 \leftthreetimes Z_7)Z_9$.*

(3) *Если $p = 5$, то $G \simeq A_5 = A_4Z_5$.*

(4) *Если $p = 7$, то $G \simeq PSL(2, 7) = S_4Z_7$.*

(5) *Если $p = 17$, то $G \simeq PSL(2, 2^4) = (E_{2^4} \leftthreetimes Z_{15})Z_{17}$ или $G \simeq PSL(3, 3) = AZ_{17}$, $|A| = 2^43^3$.*

(6) *Если $p > 7$, $p \neq 17$, то $p = 2^n + 1$ — простое число Ферма и $G \simeq PSL(2, 2^n) = (E_{2^n} \leftthreetimes Z_{2^n-1})Z_p$.*

Доказательство. Пусть A — p'-холлова подгруппа группы G, B — ее силовская p-подгруппа. Согласно лемме 2.1.13 простая группа $G = AB$ с разрешимыми подгруппами A и B взаимно простых порядков изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2, 2^n)$, $n \geq 2$; $PSL(2, q)$, $q \equiv -1 \pmod 4$; $PSL(3, 3)$; M_{11}. Из лемм 2.1.12 и 2.1.14 получаем утверждения (1)–(3). Пусть теперь $p \geq 7$.

Группа $PSL(2, 2^n)$, $n \geq 2$, согласно лемме 2.1.12 допускает единственную факторизацию с сомножителями взаимно простых порядков

$$PSL(2, 2^n) = (E_{2^n} \leftthreetimes Z_{2^n-1})Z_{2^n+1},$$

поэтому $2^n + 1 = p^m$, где p^m — порядок силовской p-подгруппы группы G. Поскольку $p \geq 7$, то согласно лемме 2.1.15 $m = 1$ и p — простое число Ферма. При $p \neq 17$ соответствующие факторизации выписаны в (6). Для $p = 17$ группа $PSL(2, 2^4) = (E_{2^4} \leftthreetimes Z_{15})Z_{17}$ записана в (5).

Группа $PSL(2, q)$, $q \equiv -1 \pmod 4$ при $q \geq 61$ допускает согласно лемме 2.1.12 единственную факторизацию с сомножителями взаимно простых порядков:

$$PSL(2, q) = (E_q \leftthreetimes Z_{\frac{q-1}{2}})Z_{q+1},$$

поэтому $q+1=2^s$, $p=2$ и этот случай записан в (1). При $q<61$ только $PSL(2,7)=S_4Z_7$ удовлетворяет условиям, что записано в (4).

Известно [40, теорема 2], что $PSL(3,3)=AZ_{17}$ и $|A|=2^43^3$, поэтому $p=17$, это записано в (5).

Если $G=M_{11}$, то $A\simeq M_{10}$ [70, теорема 1 (d)]. Но $(M_{10})'\simeq A_6$, поэтому A неразрешима и группа M_{11} исключается. Лемма доказана.

Лемма 2.1.17. *Пусть p — нечетное простое число и p не является числом Ферма. Если в группе G существует 2-замкнутая p'-холлова подгруппа, то G разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Пусть P — силовская p-подгруппа, H — p'-холлова подгруппа группы G. Тогда $G=PH$ и по условию $H=Q\rtimes K$ 2-замкнута, где Q — силовская 2-подгруппа, K — $\{2,p\}'$-холлова подгруппа группы G. Пусть N — минимальная нормальная в G подгруппа. Так как $(|P|,|H|)=1$, то по лемме 2.1.3 (2) $N=(N\cap P)(N\cap H)$, подгруппа N удовлетворяет условиям доказываемой леммы. Если $N<G$, то по индукции N разрешима. Так как фактор-группа G/N тоже удовлетворяет условиям доказываемой леммы, то G/N разрешима по индукции. Значит, G разрешима. Теперь считаем, что $G=N$ — простая группа. Поскольку p'-холлова подгруппа H разрешима, то применима лемма 2.1.16, по которой p — простое число Ферма. Противоречие. Лемма доказана.

Далее в этом разделе показано, что признаки частичной разрешимости группы, подобные теореме 2.1.2 (4), сохранятся, если требовать перестановочность не со всеми подгруппами Шмидта четного порядка, а только с 2-нильпотентными или 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка. Доказана

Теорема 2.1.3 [2–A]. *Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, $r>2$ и r не является простым числом Ферма. Если существует в группе G подгруппа B такая, что $G=RB$ и R перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из B, то G r-разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по $|G|+|B|$. Проверим, что

(1) B — собственная подгруппа группы G.

По условию R перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из B. Если $B=G$, то G r-разрешима по теореме 1.3.12 (1). Поэтому считаем, что $B<G$.

(2) Порядок B не делится на r.

Рассмотрим силовскую r-подгруппу B_r из B. По лемме 2.1.10 (1) можно считать, что $B_r\le R$. Пусть S — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из B. По условию $RS=SR$. По тождеству Дедекинда

$$B\cap RS=(B\cap R)S=B_rS=S(B\cap R)=SB_r.$$

По теореме 1.3.12 (1) B r-разрешима. Теперь $G = RB_{r'}$ и B — r'-холлова подгруппа группы G.

(3) Подгруппа B не 2-замкнута по лемме 2.1.17.

(4) Группа G непростая.

Предположим, что G — простая группа. Так как B — не 2-замкнутая группа, то по теореме 1.1.7 в ней существует 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта четного порядка $S = Q \rtimes T$, T — силовская 2-подгруппа в S. Если $S = B$, то $T = G_2$ циклическая и G разрешима. Значит $S < B$. Рассмотрим произвольный элемент $g = ba$ из G, где $b \in B$, $a \in R$. Ввиду изоморфизма $B^g \simeq B$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из B^g. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$RS^b = S^bR,\ RS^g = RS^{ba} = (RS^b)^a = (S^bR)^a = S^{ba}R = S^gR$$

для любого $g \in G$. Так как G — простая группа, то $R^G = S^G = G$ и $B = S$ по лемме 2.1.1. Противоречие.

(5) Если $N \cdot\!\lhd G$, то либо $N \leq R$, либо $N \leq B$.

Согласно (2) и лемме 2.1.3 (2) $N = (N \cap R)(N \cap B)$. Пусть S — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из $N \cap B$. Тогда $S \leq B$ и $RS = SR$ по условию. По тождеству Дедекинда

$$N \cap RS = (N \cap R)S = S(N \cap R).$$

Так как $N \cap R$ — силовская r-подгруппа в N и она удовлетворяет условию теоремы, то по индукции N — r-разрешима. Теперь N либо r-подгруппа, либо r'-подгруппа. Если N — r-подгруппа, то $N \leq R$. Если N — r'-подгруппа, то $N \leq B$.

(6) Окончание доказательства.

Если $N \leq R$, то

$$G/N = R/N(BN/N),\ (|N|, |B|) = 1.$$

Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B \ltimes N$. Пусть S/N — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из BN/N. Тогда $S = (B \cap S) \ltimes N$, т. е. $B \cap S$ будет минимальным дополнением к N в S. По лемме 1.1.5 существует подгруппа Шмидта L в $B \cap S$ такая, что $L^{B \cap S} = B \cap S$. Так как $LN/N \leq S/N$, то $L = B \cap S$. Теперь R перестановочна с $B \cap S$ по условию, следовательно, R/N перестановочна с $(B \cap S)N/N = S/N$ и по индукции G/N r-разрешима.

Если $N \leq B$, то $G/N = (RN/N)B/N$. Пусть S/N — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из B/N и L — минимальное добавление к N в S. По лемме 1.1.5 подгруппа L содержит 2-нильпотентную подгруппу Шмидта четного порядка D такую, что $D^L = L$. Так как $D \leq L \leq S \leq B$, то R перестановочна с D. Из леммы 2.1.10 (2) следует, что R перестановочна с D^x для любого $x \in G$. Поэтому R перестановочна с $D^L = L$ и с $LN = S$. Следовательно, RN/N перестановочна с S/N. По индукции G/N r-разрешима.

Получаем, что в любом случае G/N r-разрешима. Из (5) следует, что G r-разрешима. Теорема доказана.

Замечание 2.1.1. Заметим, что в формулировке теоремы 2.1.3 требования «$r > 2$ и r не является простым числом Ферма» убрать нельзя. Для $r = 2$ примером служит группа

$$PSL(2,7) = D_8(Z_7 \leftthreetimes Z_3),$$

для $r = 3$ — группа

$$SL(2,8) = Z_9(E_8 \leftthreetimes Z_7),$$

для $r = 2^n + 1 > 3$ — группа

$$SL(2,2^n) = Z_r(E_{2^n} \leftthreetimes Z_{2^n-1}).$$

Теорема 2.1.4 [2–A]. *Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, $r > 5$. Если существует подгруппа B такая, что $G = RB$ и R перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка из B, то G r-разрешима.*

Доказательство. Если $B = G$, то G r-разрешима по теореме 1.3.12 (2). Поэтому считаем, что $B < G$ и используем индукцию по $|G|+|B|$. Используя теорему 1.3.12 (2) и повторяя доказательство утверждения (2) теоремы 2.1.3, получаем, что

(1) B — r'-подгруппа.

(2) B не 2-нильпотентна по [62, теорема A].

(3) Группа G непростая.

Предположим, что G — простая группа. Так как B — не 2-нильпотентная группа, то по следствию 1.1.2 в ней существует 2-замкнутая $2d$-подгруппа Шмидта S четного порядка. Рассмотрим произвольный элемент $g = ba$ из G, где $b \in B$, $a \in R$. Ввиду изоморфизма $B^g \simeq B$ можно считать, что $S^g = S^{ba}$ — произвольная 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из B^g. Поскольку $S^b \leq B$, то

$$RS^b = S^bR,\ RS^g = RS^{ba} = (RS^b)^a = (S^bR)^a = S^{ba}R = S^gR$$

для любого $g \in G$. Так как G — простая группа, то $R^G = S^G = G$ и $B = S$ по лемме 2.1.1. По [20, лемма 11] $G \simeq PSL(2,5)$ или $SL(2,8)$, где $3 \leq r \leq 5$, противоречие. Следовательно, G — непростая группа.

(4) Если $N \cdot\!\lhd G$, то либо $N \leq R$, либо $N \leq B$.

Согласно лемме 2.1.3 (2) $N = (N \cap R)(N \cap B)$. Пусть S — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из $N \cap B$. Тогда $S \le B$ и $RS = SR$ по условию. По тождеству Дедекинда

$$N \cap RS = (N \cap R)S = S(N \cap R).$$

Так как $N \cap R$ — силовская r-подгруппа в N и она удовлетворяет условию теоремы, то по индукции N r-разрешима. Теперь N либо r-подгруппа, либо r'-подгруппа. Если N — r-подгруппа, то $N \le R$. Если N — r'-подгруппа, то $N \le B$.

(5) Окончание доказательства.

Если $N \le R$, то $G/N = R/N(BN/N)$ и $(|N|, |B|) = 1$. Поскольку $N \cap B = 1$, то $BN = B \leftthreetimes N$. Пусть S/N — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из BN/N. Тогда $S = (B \cap S) \leftthreetimes N$, т. е. $B \cap S$ будет минимальным дополнением к N в S. По лемме 1.1.5 существует подгруппа Шмидта L в $B \cap S$ такая, что $L^{B \cap S} = B \cap S$. Так как $LN/N \le S/N$, то $L = B \cap S$. Теперь R перестановочна с $B \cap S$ по условию, следовательно, R/N перестановочна с $(B \cap S)N/N = S/N$ и по индукции G/N r-разрешима.

Если $N \le B$, то $G/N = (RN/N)B/N$. Пусть S/N — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из B/N и L — минимальное добавление к N в S. По лемме 1.1.5 подгруппа L содержит 2-замкнутую подгруппу Шмидта D такую, что $D^L = L$. Так как $D \le L \le S \le B$, то R перестановочна с D. Из леммы 2.1.10 (1) следует, что R перестановочна с D^x для любого $x \in G$. Поэтому R перестановочна с $D^L = L$ и с $LN = S$. Следовательно, RN/N перестановочна с S/N. По индукции G/N r-разрешима.

Получаем, что в любом случае G/N r-разрешима. Из (4) следует, что G r-разрешима. Теорема доказана.

Следствие 2.1.3. *Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, $r > 5$. Если существует подгруппа B такая, что $G = RB$ и R перестановочна со всеми подгруппами Шмидта четного порядка из B, то G r-разрешима.*

Замечание 2.1.2. Заметим, что в формулировке теоремы 2.1.4 требование «$r > 5$» убрать нельзя. Для $r = 2$ примером служит группа $PSL(2, 7)$, для $r = 3$ — группа $SL(2, 8)$, для $r = 5$ — группа $SL(2, 4)$.

Результаты раздела 2.1 обобщают результаты работ Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [2], В. Н. Княгиной и В. С. Монахова [20].

2.2 О перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта нечетного порядка

Хорошо известно [35], что 2-нильпотентная группа Шмидта четного порядка сверхразрешима, а 2-замкнутая — несверхразрешима. Если в группе нет подгрупп Шмидта четного порядка, то группа 2-разложима, см. [39, теоремы 2.1, 2.4], поэтому разрешима.

Для групп Шмидта нечетного порядка аналогичные утверждения не выполняются. Например, любая $\{3,5\}$-группа Шмидта, как 3-нильпотентная, так и 3-замкнутая, несверхразрешима. Если в группе отсутствуют подгруппы Шмидта нечетного порядка, то группа может быть неразрешимой. В. Н. Тютянов и П. В. Бычков [47] установили, что неабелевы композиционные факторы группы, в которой нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, принадлежат множеству

$$\Omega = \{PSL(2,2^n),\ n \geq 2;\ PSL(2,q),\ q = 2^k+1;\ PSU(4,2) \simeq PSp(4,3);$$

$$PSp(4,2^n),\ n \geq 2;\ Sz(2^{2n+1}),\ n \geq 1\}.$$

Для дальнейших доказательств нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 2.2.1 [47, следствие 2.1]. *Пусть G — группа без подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат множеству Ω.*

Лемма 2.2.2 [17, лемма 4]. *Пусть подгруппа A группы G перестановочна с подгруппами $B_1, B_2, \dots, B_n$. Тогда A перестановочна с подгруппой $\langle B_1, B_2, \dots, B_n\rangle$, порожденной ими.*

Лемма 2.2.3. *Если некоторая силовская p-подгруппа P группы G перестановочна с каждой подгруппой Шмидта S из некоторого добавления B к P в G. Тогда P перестановочна с подгруппой S^g для любого $g \in G$.*

Доказательство. По условию леммы $G = PB$ и $S \leq B$. Пусть $g = ba$ — произвольный элемент из группы G, где $b \in B, a \in P$. Так как $S^b \leq B$, то $PS^b = S^bP$ и

$$PS^g = PS^{ba} = (PS^b)^a = (S^bP)^a = S^{ba}P = S^gP.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.2.1 [6–А]. *Если некоторая силовская p-подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка из G, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2,7)$ или группам из множества Ω.*

Доказательство. Обозначим силовскую p-подгруппу группы G из условия теоремы через P. Предположим, что теорема неверна и группа G —

контрпример минимального порядка. Пусть в G нет подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда группа G удовлетворяет условию теоремы и по лемме 2.2.1 ее неабелевы композиционные факторы принадлежат множеству Ω. Противоречие.

Значит, в группе G существует хотя бы одна подгруппа Шмидта нечетного порядка. Пусть N — собственная неединичная нормальная подгруппа группы G. Тогда PN/N — силовская p-подгруппа группы G/N. Если в G/N нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, то G/N удовлетворяет условию теоремы. Пусть K/N — произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка из G/N и L — минимальное добавление к подгруппе N в K. По лемме 1.1.5 L содержит подгруппу Шмидта S нечетного порядка и $L = S^L$. По условию P перестановочна с подгруппой S и подгруппой Шмидта нечетного порядка S^l для любого $l \in L$. Значит, P перестановочна с $S^L = L$ по лемме 2.2.2 и поэтому PN/N перестановочна с $LN/N = K/N$. Таким образом, все условия теоремы наследуют фактор-группы G/N. По индукции неабелевы композиционные факторы группы G/N принадлежат списку простых групп из заключения теоремы.

Предположим, что в N нет подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда по лемме 2.2.1 неабелевы композиционные факторы группы N принадлежат множеству Ω, противоречие с выбором группы G. Поэтому пусть S_1 — произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка из N. Тогда по условию $PS_1 = S_1P$. Так как $N \cap PS_1 = (N \cap P)S_1 = P_1S_1$, где P_1 — силовская p-подгруппа из N, то по индукции неабелевы композиционные факторы группы N изоморфны $PSL(2,7)$ или группам из множества Ω. Опять противоречие с выбором группы G.

В дальнейшем считаем, что G — простая группа. Пусть T — произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка. Предположим, что $PT < G$. Тогда P перестановочна с подгруппой T^g для любого $g \in G$ и $P^G \neq G$, либо $T^G \neq G$ по лемме 2.1.1. Противоречие. Поэтому $PT = G$. По лемме 2.1.2 возможны только следующие варианты:

(1) $p = 2$, $G \simeq PSL(2,7), P \simeq D_8, S \simeq Z_7 \leftthreetimes Z_3$;

(2) $p = 3$, $G \simeq SL(2,8), P \simeq Z_9, S \simeq E_{2^3} \leftthreetimes Z_7$;

(3) $p = 5$, $G \simeq PSL(2,5), P \simeq Z_5, S \simeq A_4 \simeq E_{2^2} \leftthreetimes Z_3$.

Как видно из факторизаций, только группа $PSL(2,7)$ представима в виде произведения силовской подгруппы и подгруппы Шмидта нечетного порядка. Поэтому $G \simeq PSL(2,7)$. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие 2.2.1 [6–A]. *Пусть G — группа, в которой нет композиционных факторов из множества Ω. Если $p > 2$ и силовская p-подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка, то G разрешима.*

Доказательство. Обозначим силовскую p-подгруппу группы G из условия следствия через P. Применим индукцию по порядку группы G. Из теоремы 2.2.1 и леммы 2.2.1 следует, что в группе G существует хотя бы одна подгруппа Шмидта нечетного порядка, и в G все неабелевы композиционные факторы изоморфны $PSL(2,7)$. Пусть N — собственная неединичная нормальная в G подгруппа. Из доказательства теоремы 2.2.1 видно, что условия следствия наследуют все фактор-группы и собственные нормальные подгруппы. Тогда по индукции фактор-группа G/N и подгруппа N разрешимы. Значит, G разрешима.

Таким образом, в группе G нет собственных нормальных подгрупп и G — простая группа, изоморфная $PSL(2,7)$. Группа G является произведением p-подгруппы P и подгруппы Шмидта нечетного порядка по лемме 2.1.1. Однако, из леммы 2.1.2 следует, что $p = 2$. Противоречие с условием. Следствие доказано.

Следствие 2.2.2 [6–A]. *Пусть в группе G существует $2'$-холлова подгруппа B. Если некоторая силовская 2-подгруппа P группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B, то G либо разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2,7)$.*

Доказательство. Если в группе B нет подгрупп Шмидта, то B нильпотентна. Тогда по теореме Виландта–Кегеля группа $G = PB$ разрешима. Поэтому в дальнейшем считаем, что подгруппа B ненильпотентна.

Применим индукцию по порядку группы G. Пусть N — собственная неединичная нормальная подгруппа группы G. Тогда PN/N — силовская 2-подгруппа группы G/N, и в группе G/N существует $2'$-холлова подгруппа BN/N. Если в BN/N нет подгрупп Шмидта, то G/N удовлетворяет условиям следствия. Пусть K/N — подгруппа Шмидта из BN/N. По тождеству Дедекинда $K = K \cap BN = (K \cap B)N$ и $K \cap B$ — добавление к подгруппе N в K. Пусть $L \leq K \cap B$ — минимальное добавление к подгруппе N в K. По лемме 1.1.5 L содержит подгруппу Шмидта S нечетного порядка и $L = S^L$. Так как $S \leq L \leq B$, то по условию P перестановочна с подгруппой S. Тогда P перестановочна с подгруппой S^g для любого $g \in G$ по лемме 2.2.3. По лемме 2.2.2 P перестановочна с $S^L = L$. Поэтому PN/N перестановочна с $LN/N = K/N$. Таким образом, все условия следствия наследуют фактор-группы G/N. По индукции G/N либо разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы G/N изоморфны $PSL(2,7)$.

Так как N — нормальная подгруппа группы G, $G = PB$ и $(|P|,|B|) = 1$, то по лемме 2.1.3 $N = (N \cap P)(N \cap B)$, где $P_1 = N \cap P$ — силовская 2-подгруппа подгруппы N, а $B_1 = N \cap B$ — $2'$-холлова подгруппа в N. Если в B_1 нет подгрупп Шмидта, то B_1 нильпотентна и по теореме Виландта–Кегеля группа N разрешима. Будем считать, что в B_1 есть подгруппы Шмидта. Из доказательства теоремы 2.2.1 следует, что силовская 2-подгруппа P_1 группы N перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B_1. По индукции либо N

разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы N изоморфны $PSL(2,7)$. Тогда группа G удовлетворяет заключению следствия.

В дальнейшем считаем, что G — простая группа. Пусть T — произвольная подгруппа Шмидта из B. Предположим, что $PT < G$. Тогда по лемме 2.2.3 P перестановочна с подгруппой T^g для любого $g \in G$ и $P^G \neq G$, либо $T^G \neq G$ по лемме 2.1.1. Противоречие. Поэтому $PT = G$. По лемме 2.1.2 $G \simeq PSL(2,7)$. Следствие доказано.

Результаты раздела 2.2 развивают исследования, проведенные Я. Г. Берковичем и Э. М. Пальчиком [2], В. Н. Княгиной и В. С. Монаховым [20].

2.3 О перестановочности силовской подгруппы с коммутантами некоторых B-подгрупп четного порядка

Понятие B-группы было предложено Я. Г. Берковичем [60, стр. 461].

Определение 2.3.1. B-группой называют группу, в которой фактор-группа по подгруппе Фраттини является группой Шмидта.

Начальные свойства B-групп установлены в [22].

B-группу, в которой $B/\Phi(B)$ является $S_{\langle p,q\rangle}$-группой, будем называть $B_{\langle p,q\rangle}$-группой. Ясно, что любая $S_{\langle p,q\rangle}$-группа будет $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.

Перечислим некоторые свойства B-групп.

Лемма 2.3.1 [22, лемма 2.2]. *Пусть B — $B_{\langle p,q\rangle}$-группа, P и Q — ее силовские p- и q-подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$B = P \rtimes Q$;*

(2) *$P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ и $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы B порядка p^m, где m — показатель числа p по модулю q;*

(3) *$Q = \langle y\rangle$ — циклическая подгруппа и $y^q \in Z(B)$. Кроме того, $\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q\rangle$ и $Z(B) \leq \Phi(B)$;*

(4) *Если H — нормальная в B подгруппа и $H \neq B$, то H нильпотентна;*

(5) *Если M — максимальная в B подгруппа, то либо M нормальна в B и $M = P \times \langle y^q\rangle$, либо $M = \Phi(P) \rtimes Q^x$ для некоторого $x \in B$.*

Из этой леммы видно, что строение групп Шмидта и B-групп схоже. Так B-группа бипримарна, одна из ее силовских подгрупп нормальна, а другая — циклическая. Но есть и отличия, в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, а в B-группе это свойство нарушается.

Пример 2.3.1. Диэдральная группа порядка 18 является B-группой и не является группой Шмидта.

В работе [22] В. Н. Княгина доказала, что фактор-группа B-группы по своей подгруппе Фраттини является группой типа A. Напомним, что группой типа A называют ненильпотентную группу, в которой все собственные подгруппы примарны. Такие группы являются частным случаем групп Шмидта. Таким образом, B-группу можно определить как группу, в которой фактор-группа по подгруппе Фраттини является группой типа A. Ясно, что любая группа Шмидта будет B-группой, но не наоборот. В. Н. Княгина показала [22, предложение 2.3], что B-группа будет являться группой Шмидта в точности тогда, когда $[\Phi(P), Q] = 1$.

Лемма 2.3.2 [22, лемма 2.5]. *Пусть U — нормальная в группе V подгруппа и V/U является $B_{\langle p,q\rangle}$-группой. Если H — наименьшая в V подгруппа такая, что $HU = V$, то H будет $B_{\langle p,q\rangle}$-группой.*

В работе [22] также доказано, что $B_{\langle p,q\rangle}$-группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда ее силовская p-подгруппа циклическая.

Лемма 2.3.3. *Если в группе G нет $B_{\langle p,q\rangle}$-подгрупп для всех $q \in \pi(G)$, то группа G p-нильпотентна.*

Доказательство. Индукцией по порядку группы. Если H — собственная в G подгруппа, то H удовлетворяет условию леммы и по индукции H p-нильпотентна. Теперь по лемме 1.1.6 группа G либо p-нильпотентна, либо является p-замкнутой группой Шмидта, а следовательно, и B-группой. Последнее исключается условием леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.3.4. *Если в группе G нет 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка, то группа G 2-замкнута.*

Доказательство. По условию в группе G нет 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка. Поэтому в ней нет и 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка. Значит группа G 2-замкнута. Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобятся свойства X-перестановочных подгрупп, см. определение 1.3.4.

Лемма 2.3.5 [69, лемма 2.1]. *Пусть A, B и X — подгруппы группы G, а N — нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если A X-перестановочна с B, то B X-перестановочна с A;*

(2) *если A X-перестановочна с B, то AN/N XN/N-перестановочна с BN/N;*

(3) *если A X-перестановочна с B и X — нормальная подгруппа группы G, то AX/X перестановочна с BX/X;*

(4) *если A X-перестановочна с B и $X \leq Y \leq G$, то A Y-перестановочна с B.*

(5) *Если A X-перестановочна с B и $X \leq A$ либо $X \leq B$, то A перестановочна с B.*

Также нам понадобятся следующие свойства коммутантов. Напомним

Определение 2.3.2. Подгруппа, порожденная всеми коммутаторами элементов группы G, называется коммутантом группы G и обозначается G'.

Лемма 2.3.6. (1) *Если $H \leq G$, то $H' \leq G'$,* [31, лемма 4.2].

(2) *Пусть $N \lhd G$. Тогда $(G/N)' = G'N/N$,* [31, лемма 4.6].

(3) *Если $G = HN$ и $N \lhd G$, то $G'N = H'N$,* [31, лемма 5.8].

Лемма 2.3.7. *Если подгруппа U группы G перестановочна с коммутантом каждой $B_{<p,q>}$-подгруппы группы G, то подгруппа U^x, $x \in G$, также перестановочна с коммутантом каждой $B_{<p,q>}$-подгруппы группы G.*

Доказательство. Пусть B — $B_{<p,q>}$-подгруппа группы G. Тогда B^x — тоже $B_{<p,q>}$-подгруппа группы G и $(B^x)' = (B')^x$ для любого $x \in G$. По условию

$$U(B')^{x^{-1}} = (B')^{x^{-1}}U.$$

Тогда
$$(U(B')^{x^{-1}})^x = U^x B' = ((B')^{x^{-1}} U)^x = B' U^x.$$
Лемма доказана.

Лемма 2.3.8. *Предположим, что в группе G силовская r-подгруппа перестановочна с коммутантом каждой $B_{<p,q>}$-подгруппы.*

(1) *Если $U \leq G$, то силовская r-подгруппа из U перестановочна с коммутантом каждой $B_{<p,q>}$-подгруппы из U.*

(2) *Если N — нормальная в G подгруппа, то силовская r-подгруппа из фактор-группы G/N перестановочна с коммутантом каждой $B_{<p,q>}$-подгруппы из G/N.*

(3) *Если $U \leq G$ и N — нормальная в U подгруппа, то в U/N силовская r-подгруппа перестановочна с коммутантом каждой $B_{<p,q>}$-подгруппы из U/N.*

Доказательство. (1) Пусть R_1 — силовская r-подгруппа в U. Тогда существует такая силовская r-подгруппа R в G, что $R_1 \leq R$. Пусть S' — коммутант $B_{<p,q>}$-подгруппы S из U. По условию $RS' = S'R$. По тождеству Дедекинда
$$U \cap RS' = (U \cap R)S' = R_1 S' = S'R \cap U = S'(R \cap U) = S'R_1.$$

(2) Пусть R — силовская r-подгруппа группы G. Тогда RN/N — силовская r-подгруппа в G/N. Пусть B/N — $B_{<p,q>}$-подгруппа из G/N. По лемме 2.3.2 $B = B_1 N$, где B_1 — $B_{<p,q>}$-подгруппа. По условию $B_1' R = R B_1'$, а т. к. нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой, то
$$RB_1'N = B_1'NR.$$
По лемме 2.3.6 (3) $B_1'N = B'N$. Значит
$$R(B'N) = R(B_1'N) = (B_1'N)R = (B'N)R. \tag{2.1}$$
По лемме 2.3.6 (2)
$$(B/N)' = B'N/N. \tag{2.2}$$
Из соотношений (2.1) и (2.2) получаем, что
$$(RN/N)(B/N)' = (RN/N)(B'N/N) = (B'N/N)(RN/N) = (B/N)'(RN/N).$$

Утверждение (3) следует из утверждений (1) и (2). Лемма доказана.

Замечание 2.3.1. Если в условии леммы 2.3.8 вместо $B_{<p,q>}$-подгруппы рассмотреть $S_{<p,q>}$-подгруппу, то аналог утверждения (1) будет выполняться, а утверждения (2) и (3) нарушатся.

Теорема 2.3.1 [7–A]. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G $S_r(G)$-перестановочна со всеми коммутантами 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа G r-разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Предположим, что $X = S_r(G) \neq 1$. Если фактор-группа G/X не содержит 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка, то она 2-замкнута по лемме 2.3.4, а значит, разрешима. В этом случае группа G r-разрешима, и утверждение верно. Следовательно, в фактор-группе G/X содержится 2-нильпотентная B-подгруппа четного порядка B/X. Пусть R — силовская r-подгруппа группы G, тогда RX/X — силовская r-подгруппа в G/X. По лемме 2.3.2 минимальное добавление L к X в B является 2-нильпотентной B-подгруппой четного порядка. Если L содержится в X, то $B = XL$ тоже содержится в X и $B/X = 1$, противоречие. Следовательно, L не содержится в X. По условию R X-перестановочна с L'. По лемме 2.3.5 (3) RX/X перестановочна с $L'X/X$. Используя лемму 2.3.6, получаем

$$(RX/X)(B/X)' = (RX/X)(B'X/X) = (RX/X)(L'X/X) =$$
$$= (L'X/X)(RX/X) = (B'X/X)(RX/X) = (B/X)'(RX/X).$$

Следовательно, RX/X перестановочна с коммутантом $(B/X)' = L'X/X$ 2-нильпотентной B-подгруппы четного порядка B/X и условия теоремы наследуются фактор-группой G/X. По индукции фактор-группа G/X r-разрешима, а значит, r-разрешима и группа G.

Теперь считаем, что $S_r(G) = 1$, и надо доказать следующее утвержение: если силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми коммутантами 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка, то группа G r-разрешима. Докажем это утверждение индукцией по порядку группы G. Пусть U — собственная подгруппа группы G. По лемме 2.3.8 (1) в подгруппе U силовская r-подгруппа перестановочна с коммутантом каждой 2-нильпотентной B-подгруппы четного порядка. Значит условия утверждения выполняются для собственной подгруппы U из группы G. Следовательно, по индукции подгруппа U r-разрешима.

Пусть R — силовская r-подгруппа и D — 2-нильпотентная B-подгруппа четного порядка группы G. По лемме 2.3.7 $R^x D' = D' R^x$ для любого $x \in G$. Тогда по лемме 2.1.1 получаем, что либо $R^G \neq G$, либо $(D')^G \neq G$. Значит, группа G непростая. Теперь рассмотрим фактор-группу G/N, $N \neq 1$. Тогда RN/N — силовская r-подгруппа в G/N. Пусть B/N — 2-нильпотентная B-подгруппа четного порядка из G/N. Используя лемму 2.3.8 (2), получим

$$(RN/N)(B/N)' = (B/N)'(RN/N).$$

По индукции G/N r-разрешима, следовательно, G r-разрешима. Теорема доказана.

Теорема 2.3.2 [7–A]. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G $S_r(G)$-перестановочна со всеми коммутантами 2-замкнутых B-подгрупп четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа G r-разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G. Предположим, что $X = S_r(G) \neq 1$. Если в фактор-группе G/X нет 2-замкнутых B-подгрупп четного порядка, то она 2-нильпотентна по лемме 2.3.3, а значит, разрешима. В этом случае группа G r-разрешима, и утверждение верно. Следовательно, в фактор-группе G/X содержится 2-замкнутая B-подгруппа четного порядка B/X. Теперь, повторяя соответствующий раздел доказательства теоремы 2.3.1, заменив в нем только 2-нильпотентность B-подгруппы на 2-замкнутость, получаем, что группа G r-разрешима.

Теперь считаем, что $S_r(G) = 1$. Получаем следующее утверждение, которое надо доказать: если силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми коммутантами 2-замкнутых B-подгрупп четного порядка, то группа G r-разрешима. Докажем это утверждение индукцией по порядку группы G. Пусть U — собственная подгруппа группы G. Тогда по лемме 2.3.8 (1) силовская r-подгруппа из U перестановочна с коммутантами 2-замкнутых B-подгрупп четного порядка из U. По индукции подгруппа U r-разрешима.

Пусть R — силовская r-подгруппа и D — 2-замкнутая B-подгруппа четного порядка группы G. По лемме 2.3.7 $R^xD' = D'R^x$ для любого $x \in G$. Тогда по лемме 2.1.1 получаем, что либо $R^G \neq G$, либо $(D')^G \neq G$. Значит группа G непростая. Рассмотрим фактор-группу G/N, $1 \neq N \lhd G$. По лемме 2.3.8 (2) силовская RN/N r-подгруппа перестановочна с коммутантом 2-замкнутой B-подгруппы четного порядка из G/N. Тогда по индукции подгруппа G/N r-разрешима. Следовательно, группа G r-разрешима. Теорема доказана.

Теорема 2.3.3 [7–А]. *Если в группе G коммутант каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-замкнутой B-подгруппы четного порядка $S(G)$-перестановочен с коммутантом каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-нильпотентной B-подгруппы четного порядка, то группа G разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G. Пусть N — нормальная в G подгруппа, U/N и V/N — 2-замкнутая и 2-нильпотентная B-подгруппы четного порядка из G/N, не содержащиеся в $S(G/N)$. По лемме 2.3.2 $U = U_1N$ и $V = V_1N$, где U_1 и V_1 — 2-замкнутая и 2-нильпотентная B-подгруппы четного порядка соответственно. Если $U_1 \leq S(G)$, то $U/N = U_1N/N \leq S(G/N)$, противоречие. Поэтому $U_1 \not\leq S(G)$, аналогично, $V_1 \not\leq S(G)$. По условию $U_1'V_1' = V_1'U_1'$. Так как нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой, то

$$(U_1'N)(V_1'N) = (V_1'N)(U_1'N).$$

По лемме 2.3.6 $U_1'N = U'N$ и $V_1'N = V'N$, поэтому

$$(U'N)(V'N) = (V'N)(U'N).$$

Также по лемме 2.3.6

$$(U/N)'(V/N)' = (V/N)'(U/N)'.$$

Таким образом, условия теоремы выполняются для фактор-группы G/N. Если $N \neq 1$, то по индукции G/N разрешима. Поэтому надо считать, что $S(G) = 1$.

Докажем, что группа G непростая. Пусть $H = H_2 \rightthreetimes H_{2'}$ — 2-замкнутая B-подгруппа четного порядка и $D = D_{2'} \rightthreetimes D_2$ — 2-нильпотентная B-подгруппа четного порядка группы G. По условию $H_2 D_{2'} = D_{2'} H_2$ и подгруппа $H_2 D_{2'}$ разрешима как бипримарная группа. По лемме 2.3.7 $H_2 D_{2'}^x = D_{2'}^x H_2$ для любого $x \in G$, в частности, $G \neq H_2 D_{2'}$. По лемме 2.1.1 получаем, что либо $H_2^G \neq G$, либо $D_{2'}^G \neq G$. Значит, группа G непростая.

Рассмотрим собственную подгруппу Y группы G. Пусть T и S — 2-замкнутая и 2-нильпотентная B-подгруппы четного порядка из Y. По условию $S'T' = T'S'$. Следовательно, для собственной подгруппы Y условия теоремы выполняются и по индукции Y разрешима.

Так как группа G непростая, то в ней существует отличная от единицы собственная нормальная подгруппа N. Подгруппа N и фактор-группа G/N разрешимы. Следовательно, группа G разрешима. Теорема доказана.

Замечание 2.3.2. Согласно теореме В. П. Буриченко [7] для любой группы X существует группа G и ее абелева нормальная подгруппа N такая, что $G/N \simeq X$ и все подгруппы простых порядков и порядка 4 из G содержатся в подгруппе N. Так как в коммутанте каждой подгруппы Шмидта все неединичные элементы имеют простые порядки или порядок 4, то в группе G из теоремы В. П. Буриченко коммутанты всех подгрупп Шмидта содержатся в подгруппе N. В частности, в G коммутанты 2-нильпотентных и 2-замкнутых подгрупп Шмидта четного порядка перестановочны. Поэтому в теоремах 2.3.1 – 2.3.3 заменить B-подгруппу на подгруппу Шмидта нельзя.

2.4 Краткие выводы

В данной главе изучены группы с условием перестановочности силовской подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта.

В разделе 2.1 перечислены неабелевы композиционные факторы группы, в которой силовская r-подгруппа OS-полунормальна и $r \leq 5$. При $r \geq 7$ доказана r-разрешимость такой группы, теорема 2.1.2 [3–А]. Также установлена r-разрешимость групп, в которых силовская r-подгруппа, $r > 2$ и r не является простым числом Ферма, перестановочна с 2-нильпотентными или 2-замкнутыми подгруппами Шмидта, теоремы 2.1.3 и 2.1.4 [2–А] соответственно. Результаты раздела 2.1 обобщают результаты работ Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [2], В. Н. Княгиной и В. С. Монахова [20].

В разделе 2.2 указаны неабелевы композиционные факторы группы, в которой силовская r-подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка, теорема 2.2.1 [6–А]. Результаты раздела 2.2 развивают исследования, проведенные Я. Г. Берковичем и Э. М. Пальчиком [2], В. Н. Княгиной и В. С. Монаховым [20].

В разделе 2.3 установлена разрешимость группы, в которой коммутанты 2-замкнутых и 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка перестановочны, теорема 2.3.3 [7–А], и частичная разрешимость групп с условием перестановочности некоторой силовской подгруппы с коммутантами 2-нильпотентных или 2-замкнутых B-подгрупп четного порядка, теоремы 2.3.1 и 2.3.2 [7–А] соответственно.

ГЛАВА 3

О РАЗРЕШИМОСТИ ГРУПП С S-ПОЛУНОРМАЛЬНЫМИ ИЛИ ПОЛУСУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

В разделе 3.1 устанавливается разрешимость группы с S-полунормальными сверхразрешимыми подгруппами Шмидта четного порядка; перечисляются неабелевы композиционные факторы группы, в которой несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны; доказываются признаки частичной разрешимости групп, некоторые подгруппы Шмидта которых S-полунормальны.

В разделе 3.2 устанавливается разрешимость групп, в которых подгруппы Шмидта из некоторой максимальной подгруппы полусубнормальны.

В разделе 3.3 исследуются группы с ограничениями на две максимальные подгруппы.

В разделе 3.4 приводятся краткие выводы по главе.

3.1 О разрешимости групп с S-полунормальными подгруппами Шмидта

О. Кегель [76] предложил понятие S-квазинормальной подгруппы, т. е. подгруппы, которая перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы. По аналогии с понятиями S-квазинормальной и полунормальной подгрупп введем следующее определение.

Определение 3.1.1. Подгруппа A называется S-полунормальной (или *SS-перестановочной*) в группе G, если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и A перестановочна с каждой силовской подгруппой из B. В этом случае подгруппу B будем называть S-добавлением к A в G.

Пример 3.1.1. В любой группе каждая подгруппа, индекс которой есть степень некоторого простого числа p, будет S-полунормальной, а силовская p-подгруппа группы G будет ее S-добавлением.

Полунормальная и S-квазинормальная подгруппы будут также S-полунормальными.

Пример 3.1.2. В симметрической группе S_4 степени 4 подгруппа S_3 S-полунормальна, но не полунормальна и не S-квазинормальна.

Приведем некоторые свойства S-полунормальных подгрупп.

Лемма 3.1.1. *Пусть A — S-полунормальная подгруппа группы G и B — ее S-добавление.*

(1) *Если $A \leq H \leq G$, то A — S-полунормальная подгруппа группы H и $B \cap H$ — S-добавление к A в H.*

(2) *Если N — нормальная подгруппа группы G, то AN/N — S-полунормальная в G/N подгруппа и BN/N — S-добавление к AN/N в G/N.*

(3) *Подгруппа A перестановочна с P^g для всех $g \in G$ и всех силовских подгрупп P из B. В частности, подгруппа B^g будет S-добавлением к подгруппе A для каждого $g \in G$.*

Доказательство. (1) По тождеству Дедекинда $H = A(H \cap B)$. Пусть P — силовская подгруппа из $H \cap B$ и P_1 — силовская подгруппа в B такая, что $P \leq P_1$. Тогда

$$P = P_1 \cap H,\ AP_1 = P_1A,$$

$$AP = A(P_1 \cap H) = AP_1 \cap H = P_1A \cap H = (P_1 \cap H)A = PA.$$

Поэтому A — S-полунормальная подгруппа в H и $B \cap H$ — S-добавление к A в H.

(2) Так как $G = AB$, то

$$G/N = (AN/N)(BN/N).$$

Пусть K/N — силовская p-подгруппа в BN/N. Тогда существует силовская подгруппа P в BN такая, что $PN/N = K/N$. По [71, лемма VI.4.6] существуют силовские p-подгруппы P_1 в B и P_2 в N такие, что $P = P_1P_2$. Ясно, что $PN = P_1N$. По условию подгруппа A перестановочна с P_1, поэтому $A(PN) = (PN)A$ и

$$(AN/N)(PN/N) = (AN/N)(K/N) = (PN/N)(AN/N) = (K/N)(AN/N).$$

(3) Пусть $g = ba$, $a \in A$, $b \in B$. Тогда $P^b \leq B$ и

$$AP^g = AP^{ba} = (AP^b)^a = (P^bA)^a = P^{ba}A = P^gA.$$

В силу $G = AB^g$ подгруппа B^g будет S-добавлением к A в G. Лемма доказана.

Лемма 3.1.2. *Если A — S-полунормальная подгруппа группы G, а B — ее S-добавление, то для любого элемента $g \in G$ подгруппа A^g — S-полунормальна в G и подгруппа B является S-добавлением к подгруппе A^g.*

Доказательство. По определению S-полунормальной подгруппы и S-добавления группа $G = AB$ и AP — подгруппа группы G для любой силовской подгруппы P из B. По лемме 3.1.1 (3) подгруппа A перестановочна с $P^{g^{-1}}$ для любого $g \in G$, т. е.

$$AP^{g^{-1}} = P^{g^{-1}}A,\ A^gP = PA^g.$$

Из равенства $G = A^gB$ вытекает, что A^g — S-полунормальная подгруппа в группе G и B — S-добавление к A^g в группе G. Лемма доказана.

Лемма 3.1.3. *Если A — S-полунормальная подгруппа группы G, а X — непустое множество элементов из G, то подгруппа $A^X = \langle A^x \mid x \in X\rangle$ S-полунормальна в G и B — S-добавление к A^X в G.*

Доказательство. Пусть B — S-добавление к подгруппе A. По лемме 3.1.2 подгруппа A^x, $x \in X$, S-полунормальна в G, а подгруппа B является S-добавлением к A^x. По определению 3.1.1 каждая силовская подгруппа P из B перестановочна с A^x. Согласно [17, лемма 4] подгруппа P перестановочна с A^X. Из $G = AB$ и $A \leq A^X$ вытекает, что $G = A^X B$. Теперь A^X — S-полунормальная в G подгруппа и B — S-добавление к A^X в G. Лемма доказана.

Лемма 3.1.4. *Пусть в группе G все $S_{<p,q>}$-подгруппы S-полунормальны. Тогда:*

(1) *если H — подгруппа группы G, то все $S_{<p,q>}$-подгруппы из H S-полунормальны в H;*

(2) *если N — нормальная подгруппа группы G, то в фактор-группе G/N все $S_{<p,q>}$-подгруппы S-полунормальны;*

(3) *если $N \leq H \leq G$, N нормальна в H, то в H/N все $S_{<p,q>}$-подгруппы S-полунормальны.*

Доказательство. (1) Утверждение следует из леммы 3.1.1 (1).

(2) Пусть K/N — $S_{<p,q>}$-подгруппа группы G/N, а L — минимальная подгруппа из K такая, что $K = LN$. По лемме 1.1.5 (3) подгруппа L содержит $S_{<p,q>}$-подгруппу A такую, что $L = A^L$. По условию подгруппа A — S-полунормальна в G, а по лемме 3.1.3 подгруппа L S-полунормальна в G. Теперь по лемме 3.1.1 (2) подгруппа $LN/N = K/N$ S-полунормальна в G/N.

(3) Утверждение следует из утверждений (1) и (2). Лемма доказана.

Лемма 3.1.5. *Пусть A — нетривиальная S-полунормальная подгруппа простой группы G. Тогда существует p-подгруппа P, $p \in \pi(G)$, такая, что $G = AP$.*

Доказательство. Пусть B — S-добавление к A в G, а P — силовская p-подгруппа из B такая, что P не содержится в A. Подгруппа P существует, иначе $G = AB = A$, противоречие с тем, что $A \neq G$. Предположим, что $G \neq AP$. Тогда $G \neq AP^g$ для всех $g \in G$. Так как G — простая группа, то $P^G = G$. По лемме 3.1.1 (3) подгруппа A перестановочна с P^g для каждого $g \in G$, поэтому $A^G \neq G$ по лемме 2.1.1. Но это противоречит простоте группы G. Поэтому допущение $G \neq AP$ неверно и $G = AP$. Лемма доказана.

Лемма 3.1.6. *Если в простой группе G существует S-полунормальная подгруппа Шмидта A, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *$G \simeq A_5$, $A \simeq A_4 \leftthreetimes Z_3$, $B \simeq Z_5$;*

(2) *$G \simeq PSL(2,7)$, $A \simeq Z_7 \leftthreetimes Z_3$, $B \simeq D_8$;*

(3) *$G \simeq SL(2,8)$, $A \simeq E_8 \leftthreetimes Z_7$, $B \simeq Z_9$.*

Здесь B — S-добавление к A в группе G.

Доказательство. В [37, теорема 3] перечислены неразрешимые группы $G = AB$, где A — группа Шмидта, а B — нильпотентная группа. При такой факторизации $G/S(G)$ изоморфна одной из следующих групп: $PSL(2,7)$, $PGL(2,7)$, $SL(2,2^n)$ и (2^n-1) — простое число, $P\Gamma L(2,2^n)$ для некоторого простого n. Так как в нашем случае группа G простая и $|\pi(G)| = 3$ по лемме 3.1.5, то для группы $SL(2,2^n)$ возможны только ситуации, когда $n \in \{2,3\}$. Таким образом,

$$G \in \{PSL(2,7),\ PSL(2,5) = SL(2,4) = A_5,\ SL(2,8)\}.$$

Факторизации этих групп известны, искомые факторизации указаны в пунктах (1) – (3) доказываемого предложения. Лемма доказана.

Теорема 3.1.1 [4–A]. *Если в группе G все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны в G, то G разрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима и пусть H/K — неабелевый композиционный фактор группы G. Тогда H/K — простая группа четного порядка, она не 2-замкнута. По теореме 1.1.7 в H/K существует $S_{<p,2>}$-подгруппа A/K для некоторого $p \in \pi(G)$. По лемме 1.2.3 каждая $S_{<p,2>}$-подгруппа из G сверхразрешима и по условию S-полунормальна. По лемме 3.1.4 (3) подгруппа A/K S-полунормальна в H/K и применима лемма 3.1.6. Но там исключается возможность, при которой A/K является $S_{<p,2>}$-подгруппой. Поэтому предположение, что G — неразрешимая группа неверно и G разрешима. Теорема доказана.

Так как полунормальные подгруппы S-полунормальны, то справедливо

Следствие 3.1.1. *Если в группе G все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полунормальны в G, то G разрешима.*

Следствие 3.1.1 ранее было получено в кандидатской диссертации В. Н. Княгиной [25].

Теорема 3.1.2 [4–A]. *Если в группе G все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2,4)$ или $SL(2,8)$. В частности, группа G $\{2,3,5,7\}'$-разрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G неразрешима и пусть H/K — неабелевый композиционный фактор группы G. Тогда H/K — простая группа четного порядка, поэтому не 2-нильпотентна. Согласно следствию 1.1.2 в H/K существует $S_{<2,q>}$-подгруппа A/K для некоторого $q \in \pi(G)$. По лемме 1.2.3 каждая $S_{<2,q>}$-подгруппа несверхразрешима. По лемме 3.1.4 (3) и условию подгруппа A/K S-полунормальна в H/K и применима лемма 3.1.6.

Если $H/K \simeq SL(2,4)$, то

$$A/K \simeq A_4 = E_4 \leftthreetimes Z_3.$$

В $SL(2,4)$ подгруппы Шмидта исчерпываются с точностью до сопряженности следующими подгруппами:

$$A_4,\ Z_5 \leftthreetimes Z_2 \text{ и } Z_3 \leftthreetimes Z_2.$$

Подгруппы $Z_5 \leftthreetimes Z_2$ и $Z_3 \leftthreetimes Z_2$ сверхразрешимы, подгруппа A_4 несверхразрешима и полунормальна. Поэтому группа $SL(2,4)$ может быть композиционным фактором группы G.

Если $H/K \simeq SL(2,8)$, то

$$A/K \simeq E_8 \leftthreetimes Z_7.$$

В $SL(2,8)$ подгруппы Шмидта исчерпываются с точностью до сопряженности следующими подгруппами:

$$E_8 \leftthreetimes Z_7,\ Z_7 \leftthreetimes Z_2 \text{ и } Z_3 \leftthreetimes Z_2.$$

Из них несверхразрешимой является только подгруппа $E_8 \leftthreetimes Z_7$ и она S-полунормальна в H/K. Поэтому группа $SL(2,8)$ может быть композиционным фактором группы G.

Изоморфизм H/K с группой $PSL(2,7)$ исключается, в $PSL(2,7)$ есть несверхразрешимая подгруппа Шмидта A_4, она не S-полунормальна в $PSL(2,7)$.

Таким образом, неабелевы композиционные факторы группы G исчерпываются группами $SL(2,4)$ и $SL(2,8)$, которые имеют порядки $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ и $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ соответственно. Следовательно, неабелевы композиционные факторы группы G будут $\{2,3,5,7\}$-группами и G — $\{2,3,5,7\}'$-разрешима. Теорема доказана.

Следствие 3.1.2. *Если в группе G все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полунормальны, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2,4)$. В частности, группа G $\{2,3,5\}'$-разрешима.*

Доказательство. Поскольку каждая полунормальная подгруппа S-полунормальна, то применима теорема 3.1.2. В группе $SL(2,8)$ подгруппа Шмидта $E_8 \leftthreetimes Z_7$ S-полунормальна, ее индекс равен 9 и она не полунормальна. Поэтому в $SL(2,8)$ нет полунормальных подгрупп Шмидта четного порядка и эта группа исключается. Следовательно, неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $SL(2,4)$. Следствие доказано.

Теорема 3.1.3 [4–А]. *Если в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта S-полунормальны, то G будет 3-разрешимой.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Пусть N — нормальная подгруппа группы G. По лемме 3.1.4 (1), (2) в подгруппе N и в фактор-группе G/N все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта S-полунормальны. Если

$1 \neq N \neq G$, то по индукции подгруппа N и фактор-группа G/N 3-разрешимы. Отсюда, группа G 3-разрешима. Поэтому будем считать, что группа G простая.

Предположим, что группа G содержит $\{2,3\}$-подгруппу Шмидта A. Из леммы 3.1.6 следует, что $A \simeq A_4$ и $G \simeq SL(2,4)$. Но в группе $SL(2,4)$ имеется подгруппа Шмидта $Z_3 \leftthreetimes Z_2$, которая не S-полунормальна. Противоречие.

Таким образом, в группе G нет $\{2,3\}$-подгрупп Шмидта. Проверим, что в этом случае группа G является S_4-свободной. Допустим противное, т. е. предположим, что существуют подгруппы U и V такие, что U нормальна в V и $V/U \simeq S_4$. Группа S_4 содержит подгруппу S_3, которая является $S_{<3,2>}$-подгруппой. По лемме 1.1.5 подгруппа V содержит $S_{<3,2>}$-подгруппу, противоречие. Следовательно, группа G является S_4-свободной. По [13, теорема 4.174] либо силовская 2-подгруппа в G абелева, либо $G \in \{Sz(2^n), U(3,2^n)\}$, n нечетно. Простые группы с абелевой силовской 2-подгруппой известны, см. [13, теорема 4.126], каждая из них содержит неабелеву подгруппу порядка 6, которая является $S_{<3,2>}$-подгруппой. В группе $U(3,2^n)$, где n нечетно, также содержится $S_{<3,2>}$-подгруппа, [13, теорема 4.168]. Поэтому эти группы исключаются. Группа Судзуки $Sz(2^n)$ имеет порядок, не делящийся на 3, следовательно, она 3-разрешима. Теорема доказана.

Теорема 3.1.3 обобщает теорему 2 из работы В. Н. Князиной и В. С. Монахова [17], см. следствие 1.3.10.

Следствие 3.1.3. *Если в группе G все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта и все 5-замкнутые $\{2,5\}$-подгруппы Шмидта S-полунормальны, то G разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Как и в доказательстве теоремы 3.1.3 получаем, что G — простая группа. По теореме 3.1.3 группа G 3-разрешима, поэтому G — простая $3'$-группа. По теореме Томпсона $G \simeq Sz(2^n)$. Согласно [73, теоремы XI.3.6, XI.3.10] в группе G содержится $S_{<5,2>}$-подгруппа A. Поскольку A — S-полунормальная в G подгруппа, то применима лемма 3.1.6. Теперь порядок группы G делится на 3, противоречие. Следствие доказано.

Аналоги теорем 3.1.1 – 3.1.3 для групп с S-полунормальными подгруппами Шмидта нечетного порядка неверны. Группы из класса Ω — простых групп, в которых нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, могут быть композиционными факторами групп с S-полунормальными подгруппами Шмидта нечетного порядка.

Кроме того, из леммы 1.2.3 следует, что группа Шмидта четного порядка либо сверхразрешима (когда она 2-нильпотентна), либо несверхразрешима (когда она 2-замкнута). Для групп Шмидта нечетного порядка альтернативность не выполняется, например, любая $\{3,5\}$-группа Шмидта (как 3-замкнутая, так и 3-нильпотентная) несверхразрешима.

Поэтому при нечетном p будем pd-подгруппы Шмидта разделять на p-замкнутые и p-нильпотентные.

Теорема 3.1.4 [4–А]. *Пусть p — нечетное простое число и в группе G все p-замкнутые pd-подгруппы Шмидта S-полунормальны. Если G не p-разрешима, то $p = 7$ и не p-разрешимый композиционный фактор группы G изоморфен $PSL(2,7)$.*

Доказательство. Предположим, что группа G не p-разрешима и пусть H/K — не p-разрешимый композиционный фактор группы G. Тогда H/K — простая pd-группа, поэтому не p-нильпотентна. Согласно следствию 1.1.2 в H/K существует $S_{<p,q>}$-подгруппа A/K для некоторого $q \in \pi(G)$. По условию все $S_{<p,q>}$-подгруппы группы G S-полунормальны в G, а по лемме 3.1.4 (3) подгруппа A/K S-полунормальна в H/K. Теперь применима лемма 3.1.6. Поскольку $p > 2$, то $H/K \simeq PSL(2,7)$ и $p = 7$. Теорема доказана.

Следствие 3.1.4. *Если p — нечетное простое число и в группе G все p-замкнутые pd-подгруппы Шмидта полунормальны, то G p-разрешима.*

Доказательство. Предположим, что группа G не p-разрешима и пусть H/K — не p-разрешимый композиционный фактор группы G. По теореме 3.1.4 $H/K \simeq PSL(2,7)$ и $p = 7$. В группе $PSL(2,7)$ 7-замкнутая $7d$-подгруппа Шмидта $A = Z_7 \leftthreetimes Z_3$ имеет индекс 8, подгруппа A S-полунормальна, но не полунормальна. Поэтому группа $PSL(2,7)$ исключается. Значит, допущение неверно и G p-разрешима. Следствие доказано.

Следствие 3.1.4 дополняет исследование, проведенное в работе В. Н. Князиной и В. С. Монахова [17].

Пример 3.1.3. Как отмечалось в примере 1.1.3 в $SL(2,2^n)$ нет 3-нильпотентных $3d$-подгрупп Шмидта при любом нечетном n, а в $PSL(2,p)$ нет p-нильпотентных pd-подгрупп Шмидта при любом $p \geq 5$. Значит, перечисленные группы (и не только они) могут быть композиционными факторами группы с S-полунормальными p-нильпотентными pd-подгруппами Шмидта.

Таким образом, описание композиционных факторов неразрешимых групп с несверхразрешимыми (сверхразрешимыми) S-полунормальными подгруппами Шмидта нечетного порядка зависит от решения следующей задачи.

Проблема 3.1.1. *Перечислить простые группы со сверхразрешимыми подгруппами нечетного порядка.*

3.2 О разрешимости групп с полусубнормальными подгруппами Шмидта

В разделе 3.2 разработанная ранее методика исследования групп с обобщенно полунормальными подгруппами применяется для обобщения результатов Д. Томпсона, В. А. Белоногова и В. С. Монахова.

Группа G с нильпотентной максимальной подгруппой M, как известно, является разрешимой, если коммутант силовской 2-подгруппы P из M содержится в центре подгруппы P [71, IV.7.4]. В частности, группа с нильпотентной максимальной подгруппой нечетного порядка разрешима [86]. Эти теоремы нашли отклик во многих работах, см., например, [1, 33, 34, 59, 85].

Если максимальная подгруппа M группы G ненильпотентна, то в M существует подгруппа Шмидта. От свойств подгрупп Шмидта из M зависит строение группы G, в частности, является ли она разрешимой.

Мы обобщаем некоторые результаты [1, 34], [71, IV.7.4]. Для этого введем следующее

Определение 3.2.1. Если подгруппа A либо субнормальна в G, либо полунормальна в G, то A называется полусубнормальной в группе G.

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты.

Теорема 3.2.1 [71, IV.7.4]. *Пусть H — максимальная подгруппа группы G и P силовская 2-подгруппа из H. Если H нильпотентна и $P' \leq Z(P)$, то группа G разрешима.*

Теорема 3.2.2 [1]. *Пусть P — силовская 2-подгруппа группы G. Если $P' \leq Z(P)$ и подгруппа P является прямым множителем некоторой максимальной подгруппы группы G, то группа G разрешима.*

Теорема 3.2.3 [34, теорема 1]. *Пусть в группе G максимальная подгруппа M имеет нечетный индекс и 2-разложима. Если $N_G(L) \leq M$ для каждой 2-подгруппы L из M, ненормальной в G, то группа G разрешима.*

Напомним, что подгруппа U называется *субнормальной подгруппой* группы G, если существуют подгруппы U_0, U_1, …, U_s такие, что

$$U = U_0 \lhd U_1 \lhd \cdots \lhd U_{s-1} \lhd U_s = G.$$

Лемма 3.2.1. *Пусть U — субнормальная подгруппа группы G. Тогда:*

(1) *если $V \leq G$, то $V \cap U$ субнормальна в V,* [31, лемма 2.41]*;*

(2) *если $N \lhd G$, то подгруппа UN/N субнормальна в G,* [31, лемма 2.41]*;*

(3) *если $\{U_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество субнормальных подгрупп группы G, то подгруппа $U = \langle U_i \mid i \in I\rangle$ субнормальна в G,* [31, теорема 2.43].

Лемма 3.2.2. *Если S — субнормальная $S_{<p,q>}$-подгруппа группы G, то подгруппа S^G является p-замкнутой $\{p, q\}$-подгруппой.*

Доказательство. Пусть $\pi = \{p, q\}$. По [52, следствие 7.7.2(1)] $S \leq O_\pi(G)$. Поэтому S^G является $\{p, q\}$-подгруппой. Так как S — q-нильпотентная подгруппа, то по [52, следствие 7.7.2(3)] $S \leq F_q(G)$. Следовательно, $S^G \leq F_q(G)$. Теперь $S^G \leq O_\pi(G) \cap F_q(G)$. Поэтому S^G является p-замкнутой $\{p, q\}$-подгруппой. Лемма доказана.

Здесь $F_q(G)$ — наибольшая нормальная в G q-нильпотентная подгруппа.

Лемма 3.2.3. *Если в группе G каждая 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка полусубнормальна, то G разрешима.*

Доказательство. Если в группе G нет 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка, то G 2-замкнута по теореме 1.1.7, а значит и разрешима. Пусть A — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта. Если A полунормальна в G, то A^G разрешима по теореме 1.3.9. Если A субнормальна в G, то A^G разрешима по лемме 3.2.2.

Пусть $B = \langle A^G \mid A$ — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта$\rangle$. Тогда B разрешима и нормальна в G. Если в фактор-группе G/B нет 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка, то G/B 2-замкнута по теореме 1.1.7 и группа G разрешима.

Пусть K/B — $S_{<r,2>}$-подгруппа в G/B для некоторого простого r и L — минимальное добавление к подгруппе B в K. По лемме 1.1.5 подгруппа L содержит $S_{<r,2>}$-подгруппу A такую, что $A^L = L$.

Так как $K = LB = A^L B \leq A^G B \leq B$, то получили противоречие. Лемма доказана.

Теорема 3.2.4 [5–A]. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и P — силовская 2-подгруппа из M. Предположим, что $P' \leq Z(P)$ и M A_4-свободна. Если каждая подгруппа Шмидта из M полусубнормальна в G, то группа G разрешима.*

Доказательство. Если в M нет подгрупп Шмидта, то M нильпотентна и G разрешима по теореме 3.2.1. Поэтому M ненильпотентна и в ней есть подгруппы Шмидта. Пусть A — подгруппа Шмидта из M. Предположим, что A^G неразрешима. Тогда по лемме 3.2.2 подгруппа A не субнормальна в G. По условию подгруппа A полунормальна в G. Тогда по теореме 1.3.9 подгруппа A является 2-замкнутой $\{2, 3\}$-подгруппой Шмидта. По свойствам групп Шмидта $A/Z(A) \simeq A_4$ [36, теорема 1.22] и подгруппа M не A_4-свободна, противоречие. Поэтому предположение неверно и A^G разрешима. Так как A — произвольная подгруппа Шмидта из M, то подгруппа $B = \langle A^G \mid A$ — подгруппа Шмидта из $M\rangle$ нормальна в G и разрешима.

Предположим, что MB/B ненильпотентна. Так как

$$MB/B \simeq M/M \cap B,$$

то $M/M \cap B$ ненильпотентна. Пусть $S/M \cap B$ — подгруппа Шмидта из $M/M \cap B$ и L — минимальное добавление к подгруппе $M \cap B$ в S. По лемме 1.1.5 подгруппа L содержит подгруппу Шмидта $R \leftthreetimes Q$ такую, что Q не содержится в $M \cap B$. Так как

$$R \leftthreetimes Q \leq L \leq S \leq M,$$

то $R \leftthreetimes Q \leq B$ по построению подгруппы B. Следовательно,

$$R \leftthreetimes Q \leq M \cap B,\ Q \leq B,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно и MB/B нильпотентна.

Поскольку M — максимальная в G подгруппа, то либо $MB/B = G/B$, либо $B \leq M$ и M/B — максимальная подгруппа группы G/B. Если $MB/B = G/B$, то G/B нильпотентна, а поскольку B разрешима, то G разрешима.

Пусть $B \leq M$ и M/B — максимальная подгруппа группы G/B. Так как PB/B — силовская 2-подгруппа в M/B и

$$(PB/B)' = P'B/B \leq Z(P)B/B \leq Z(PB/B),$$

то G/B разрешима по теореме 3.2.1. Поэтому G разрешима. Теорема доказана.

Теорема 3.2.4 обобщает теоремы В. Е. Дескинса, З. Янко, Д. Томпсона [71, IV.7.4] и В. А. Белоногова [1].

Следствие 3.2.1. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и порядок M нечетен. Если каждая подгруппа Шмидта из M полусубнормальна в G, то G разрешима.*

Пример 3.2.1. Условие «максимальная подгруппа A_4-свободна» в теореме 3.2.4 не является лишним. Примером служит группа $G = PSL(2,5)$. В этой группе подгруппа Шмидта S, изоморфная группе A_4, имеет индекс 5. Поэтому она является максимальной и полунормальной. В подгруппе S силовская 2-подгруппа P абелева, поэтому $P' \leq Z(P)$.

Пример 3.2.2. Условие «$P' \leq Z(P)$» не является лишним. Примером служит группа $G = PSL(2,17)$. В этой группе силовская 2-подгруппа P, изоморфная диэдральной подгруппе порядка 16, является максимальной и A_4-свободной. Но $P' \leq Z(P)$.

Теорема 3.2.5 [5–А]. *Пусть M — максимальная подгруппа нечетного индекса группы G и P — силовская 2-подгруппа из M. Предположим, что подгруппа M A_4-свободна и каждая подгруппа Шмидта четного порядка из M полусубнормальна в G. Если $P' \leq Z(P)$ или $N_G(V) \leq M$ для каждой 2-подгруппы V из M, ненормальной в G, то G разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Если в M нет подгрупп Шмидта четного порядка, то M 2-разложима по следствию 1.1.2 и теореме 1.1.7. Если $P' \leq Z(P)$, то по теореме 3.2.2 группа G

разрешима; если $N_G(V) \leq M$ для каждой 2-подгруппы V из M, ненормальной в G, то G разрешима по теореме 3.2.3. Следовательно, в M существуют подгруппы Шмидта четного порядка.

Пусть A — подгруппа Шмидта четного порядка из M. Предположим, что A^G неразрешима. Тогда по лемме 3.2.2 подгруппа A не субнормальна в G. По условию подгруппа A полунормальна в G. Тогда по теореме 1.3.9 подгруппа A является 2-замкнутой $\{2,3\}$-подгруппой Шмидта. По свойствам групп Шмидта $A/Z(A) \simeq A_4$ [36, теорема 1.22] и подгруппа M не A_4-свободна, противоречие. Поэтому предположение неверно и A^G разрешима.

Предположим, что $A^G \leq M$ для некоторой подгруппы Шмидта A четного порядка из M. Тогда фактор-группа G/A^G содержит максимальную подгруппу M/A^G, и индекс M/A^G в группе G/A^G нечетен. Ясно, что подгруппа M/A^G A_4-свободна. Пусть T/A^G — подгруппа Шмидта четного порядка из M/A^G и L — минимальное добавление к A^G в T. По лемме 1.1.5 подгруппа L содержит подгруппу Шмидта $R \leftthreetimes Q$ четного порядка такую, что Q не содержится в A^G и $L = (R \leftthreetimes Q)^L = Q^L$. Так как

$$R \leftthreetimes Q \leq L \leq T \leq M,$$

то $R \leftthreetimes Q$ полунормальна или субнормальна в G по условию теоремы. Если подгруппа $R \leftthreetimes Q$ полунормальна в G, то по лемме 1.3.4 подгруппа L полунормальна в G, и по лемме 1.3.2 (2) подгруппа $LA^G/A^G = T/A^G$ полунормальна в G/A^G. Если подгруппа $R \leftthreetimes Q$ субнормальна в G, то по лемме 3.2.1 (3) L субнормальна в G, и по лемме 3.2.1 (2) подгруппа $LA^G/A^G = T/A^G$ субнормальна в G/A^G.

Так как P — силовская 2-подгруппа из M, то подгруппа PA^G/A^G является силовской 2-подгруппой в M/A^G. Если $P' \leq Z(P)$, то

$$(PA^G/A^G)' = P'A^G/A^G \leq Z(P)A^G/A^G \leq Z(PA^G/A^G).$$

Пусть $N_G(V) \leq M$ для каждой 2-подгруппы V из M, ненормальной в G, и U/A^G — 2-подгруппа в M/A^G, ненормальная в G/A^G. Тогда $U = U_2A^G$, где U_2 — силовская 2-подгруппа в U. Рассмотрим элемент $xA^G \in N_{G/A^G}(U/A^G)$. Так как $(U/A^G)^{xA^G} = U/A^G$, то $U = U^x$. По теореме Силова $U_2^x = U_2^u$ для $u \in U$. Получаем, что

$$U^x = U_2^x A^G = U_2^u A^G = U.$$

Итак,

$$N_{G/A^G}(U/A^G) = N_G(U)A^G/A^G \leq M/A^G.$$

Таким образом, для фактор-группы G/A^G и ее максимальной подгруппы M/A^G все условия доказываемой теоремы выполняются. Так как $A^G \neq 1$, то по индукции фактор-группа G/A^G разрешима, поэтому G разрешима.

Наконец, рассмотрим случай, когда $A^G \not\leq M$ для каждой подгруппы Шмидта A четного порядка из M. Ясно, что $MA^G = G$. Из лемм 1.3.2 и 3.2.1 следует, что каждая подгруппа четного порядка из M полунормальна или субнормальна в M. По лемме 3.2.3 подгруппа M разрешима, поэтому группа G разрешима. Теорема доказана.

Теорема 3.2.5 обобщает результат В. С. Монахова [34].

3.3 Конечные группы с ограничениями на две максимальные подгруппы

В разделе 3.3 разработанная методика исследования групп с обобщенно полунормальными подгруппами применяется к изучению структуры групп, в которых некоторые подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций, см. [31,63]. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация групп и G — группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение

$$\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$$

формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$, см. [63, IV.1.7]. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F} \circ \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно. Формация $\mathfrak{N}$ насыщенна, а $\mathfrak{A}$ — нет.

Из результатов работ [32,68] следует сверхразрешимость группы с полунормальными силовскими подгруппами. В [45] доказана сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы полунормальны. Признаки сверхразрешимости группы G при условии, что все силовские подгруппы или все максимальные подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полунормальны в группе G, получены в [80].

Лемма 3.3.1. (1) *Если H — полусубнормальная подгруппа группы G и $H \le X \le G$, то H полусубнормальна в X.*

(2) *Если H — полусубнормальная подгруппа группы G и подгруппа N нормальна в G, то HN полусубнормальна в G и HN/N полусубнормальна в G/N.*

(3) *Если H — полусубнормальная подгруппа группы G, а Y — непустое множество элементов из G, то подгруппа*

$$H^Y = \langle H^y \mid y \in Y \rangle$$

полусубнормальна в G. В частности, H^g полусубнормальна в G для любого $g \in G$.

Доказательство. Если H — полунормальная подгруппа группы G, то по лемме 1.3.2 утверждения (1) – (3) выполняются. Пусть H — субнормальная подгруппа группы G. Из леммы 3.2.1 вытекают утверждения (1) – (3). Лемма доказана.

Лемма 3.3.2. (1) *Пусть p — наибольшее простое число из $\pi(G)$ и P — силовская p-подгруппа группы G. Если P полусубнормальна в G, то P нормальна в G.*

(2) *Если в группе G все силовские подгруппы полусубнормальны, то G сверхразрешима.*

(3) *Пусть H — максимальная подгруппа группы G. Если H полусубнормальна в G, то индекс H в G есть простое число.*

(4) *Если в группе G все максимальные подгруппы полусубнормальны, то G сверхразрешима.*

(5) *Если индекс подгруппы H в группе G есть простое число, то H полусубнормальна в G.*

Доказательство. (1) Очевидно, что если P субнормальна в G, то P нормальна в G. Если P полунормальна в G и p — наибольшее в $\pi(G)$, то по [32, лемма 4] подгруппа P нормальна в G.

(2) Предположим, что в группе G существует хотя бы одна субнормальная силовская подгруппа P. Тогда P нормальна в G, а значит, полунормальна в G. Таким образом в группе G все силовские подгруппы полунормальны. По [32, следствие 6] группа G сверхразрешима.

(3) Пусть H — субнормальная подгруппа группы G. Тогда H нормальна в G и по [31, лемма 3.17 (6)] индекс H в G есть простое число. Пусть H — полунормальная максимальная подгруппа группы G и K — подгруппа из G такая, что $HK = G$ и HK_1 есть собственная подгруппа в G для каждой подгруппы K_1 из K. Пусть простое число r делит индекс $|G : H|$ и R — силовская r-подгруппа из K. Тогда $HR = G$ и $G = H\langle x\rangle$ для $x \in R \setminus H$. Элемент выберем так, чтобы его порядок был наименьшим. Тогда

$$H\langle x^r\rangle = \langle x^r\rangle H = H \text{ и } |G : H| = r.$$

(4) Пусть M — максимальная подгруппа группы G. По утверждению (3) данной леммы индекс подгруппы M в G есть простое число. По [71, VI.9.2 (2)] G сверхразрешима.

(5) Пусть $|G : H| = r$ и R — силовская r-подгруппа группы G. Тогда R не содержится в H и существует элемент $x \in R\backslash H$. Пусть

$$|x| = r^a,\ |\langle x\rangle \cap H| = r^{a_1}.$$

Ясно, что $a > a_1$, поэтому

$$|\langle x\rangle H| = \frac{|\langle x\rangle||H|}{|\langle x\rangle \cap H|} = \frac{r^a \frac{|G|}{r}}{r^{a_1}} = \frac{r^a}{r^{a+1}}|G| \geq |G|,\ \langle x\rangle H = G.$$

Теперь x^r принадлежит H и H полунормальна в G, а значит, полусубнормальна в G. Лемма доказана.

Лемма 3.3.3. (1) *Если A — полусубнормальная 2-нильпотентная подгруппа группы G, то подгруппа A^G разрешима.*

(2) *Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы G. Если A — полусубнормальная в G подгруппа и p не делит порядок A, то p не делит порядок подгруппы A^G.*

Доказательство. (1) Если A субнормальна в G, то по [31, следствие 3, стр. 187] A^G разрешима. Если A — полунормальная подгруппа в G, то A^G разрешима по лемме 1.3.5.

(2) Если A субнормальная p'-подгруппа в G, то по [31, следствие 2, стр. 187] A^G — p'-группа. Если A — полунормальная p'-подгруппа в G, то A^G — p'-группа по лемме 1.3.6. Лемма доказана.

Лемма 3.3.4 [38, лемма 6]. *Предположим, что разрешимая группа G несверхразрешима, но фактор-группа G/K сверхразрешима для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ для некоторого $p \in \pi(G)$;*

(2) *$Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;*

(3) *G — примитивная группа; $G = N \rtimes M$, где M — максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;*

(4) *N — элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$;*

(5) *если V — подгруппа группы G и $G = VN$, то $V = M^x$ для некоторого $x \in G$.*

Лемма 3.3.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Тогда $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{F}$ — насыщенная формация.*

Доказательство. Согласно [52, с. 36], произведение $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация — эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Лемма доказана.

Лемма 3.3.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация и G — группа. Предположим,что $G \notin \mathfrak{F}$, но $G/N \in \mathfrak{F}$ для всех $N \lhd G$, $N \neq 1$. Тогда G — примитивная группа.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то $\Phi(G) = 1$ и G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N. Так как $\Phi(G) = 1$, то $G = NM$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G. Поэтому $M_G = 1$. Значит, G примитивна. Лемма доказана.

Лемма 3.3.7 [31, теоремы 4.40 – 4.42]. *Пусть G — разрешимая неединичная примитивная группа с примитиватором M. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *$\Phi(G) = 1$;*

(2) *$F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ есть элементарная абелева*

подгруппа порядка p^n для некоторого простого p и натурального n;

(3) *G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, которая совпадает с $F(G)$;*

(4) *$G = F(G) \rtimes M$ и $O_p(M) = 1$.*

Лемма 3.3.8 [64]. *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *G разрешима;*

(2) *G имеет единственную нормальную силовскую подгруппу P и $P = G^{\mathfrak{U}}$;*

(3) *$P/\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi(P)$ такая, что $|P/\Phi(P)| > p$.*

Лемма 3.3.9. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Если все силовские подгруппы из M полусубнормальны в G, то $|G : M|$ — простое число, M и G/M_G сверхразрешимы. В частности, G разрешима.*

Доказательство. В начале докажем, что группа G разрешима. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Пусть R — произвольная силовская подгруппа из M. По лемме 3.3.1 R полусубнормальна в M. Поскольку это верно для любой силовской подгруппы, то по лемме 3.3.2 (2) M является сверхразрешимой группой. В частности, M 2-нильпотентна. Поэтому и каждая подгруппа из M тоже 2-нильпотентна. По лемме 3.3.3 (1) R^G разрешима. Если $MR^G = G$, то G разрешима, т. к. $G/R^G = MR^G/R^G \simeq M/M \cap R^G$ сверхразрешима. Пусть $R^G \leq M$. Фактор-группа G/R^G содержит максимальную подгруппу M/R^G. Пусть S/R^G — силовская t-подгруппа в M/R^G и T — силовская t-подгруппа в S. По [31, теорема 1.65] TR^G/R^G — силовская t-подгруппа в S/R^G. Тогда $S = TR^G$ и T — силовская t-подгруппа в M. По условию T полусубнормальна в G, а по лемме 3.3.1 $TR^G/R^G = S/R^G$ полусубнормальна в G/R^G. Тогда по индукции G/R^G разрешима, следовательно разрешима и G. Итак, разрешимость группы G доказана.

С помощью индукции по порядку группы покажем, что G/M_G сверхразрешима. Если $M_G \neq 1$, то M/M_G — максимальная подгруппа группы G/M_G. И как в предыдущем абзаце проверяется, что фактор-группа G/M_G с максимальной подгруппой M/M_G удовлетворяют условию леммы. По индукции $(G/M_G)/(M/M_G)_{(G/M_G)}$ сверхразрешима, а поскольку $(M/M_G)_{(G/M_G)} = 1$, то G/M_G сверхразрешима и $|G/M_G : M/M_G| = |G : M|$ — простое число.

Значит, следует считать, что $M_G = 1$. Теперь группа G примитивна и $G = N \rtimes M$, где N — r-подгруппа. Так как M сверхразрешима, то $M = P \rtimes T$, где $P = M_p$ — силовская p-подгруппа для наибольшего $p \in \pi(M)$. Пусть $p = r$, тогда подгруппа P нормальна в G, противоречие. Значит $p \neq r$ и P — силовская p-подгруппа из G. Предположим, что подгруппа P субнормальна в группе G, тогда $P \lhd G$, противоречие. Следовательно, P полунормальна в G. Теперь существует подгруппа U в группе G такая, что $G = PU$. Ясно, что

$N \leq U$. Пусть x — элемент простого порядка из N. Тогда $P\langle x\rangle \leq G$. Если $p > r$, то $P \lhd P\langle x\rangle$, поэтому $P \lhd \langle M, x\rangle = G$, противоречие. Если $p < r$, то N — силовская r-подгруппа в G. Это следует из того, что p наибольшее из $\pi(M)$. Теперь все силовские подгруппы в G полусубнормальны. По лемме 3.3.2 (2) G сверхразрешима. Поэтому $|G : M|$ есть простое число. Лемма доказана.

Замечание 3.3.1. Разрешимые группы, содержащие сверхразрешимую подгруппу простого индекса, изучались в [6, 15].

Теорема 3.3.1 [8–A]. *Если в группе G существуют две несопряженные максимальные подгруппы H и K и все силовские подгруппы из H и из K полусубнормальны в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. По лемме 3.3.9 группа G разрешима, подгруппы H и K сверхразрешимы и фактор-группы G/H_G и G/K_G сверхразрешимы. В частности, индексы подгрупп H и K в группе G простые числа, а по лемме 3.3.2 (5) подгруппы H и K полусубнормальны в группе G.

Пусть N — произвольная нормальная неединичная подгруппа в G. Если N не содержится в $H \cap K$, то N не содержится в H, или N не содержится в K. Если N не содержится в H, то $HN = G$ и фактор-группа

$$G/N = HN/N \simeq H/H \cap N$$

сверхразрешима. Аналогично, если N не содержится в K, то $KN = G$ и G/N сверхразрешима. Пусть $N \leq H \cap K$. Тогда $G/N = (H/N)(K/N)$. Пусть $\overline{R}$ — силовская r-подгруппа в H/N. Тогда в H существует силовская r-подгруппа R такая, что $\overline{R} = RN/N$. По условию R — полусубнормальная подгруппа в G. По лемме 3.3.1 (2) $\overline{R} = RN/N$ полусубнормальна в G/N. Аналогично, каждая силовская подгруппа из K/N полусубнормальна в G/N. По индукции G/N сверхразрешима.

Итак, в любом случае фактор-группа G/N сверхразрешима. По лемме 3.3.6 группа G примитивна, и выполняются утверждения (1)–(5) леммы 3.3.4. В частности, $|N| = p^n > p$. Если $N \not\leq H$, то $G = N \rtimes H$. Так как H полусубнормальна в G, то по лемме 3.3.2 (5) $|N| = |G : H|$ — простое число, противоречие. Аналогично, в случае, когда $N \not\leq K$. Поэтому считаем, что $N \leq H \cap K$. Так как H и K сверхразрешимы и $N = C_G(N)$, то p — наибольшее в $\pi(H)$ и в $\pi(K)$, поэтому p — наибольшее в $\pi(G)$. Поскольку $O_p(G/N) = 1$ и G/N сверхразрешима, то p не делит порядок G/N и N — силовская p-подгруппа группы G.

Пусть $N_1 \leq N$, $|N_1| = p$ и R — силовская r-подгруппа из M. Так как $M = G_{p'} = H_{p'}K_{p'}$, то $R = H_rK_r$ для некоторых силовских r-подгрупп H_r и K_r из H и K соответственно. По условию подгруппы H_r и K_r полусубнормальны в G. Если H_r субнормальна в G, то по [52, следствие 7.7.2(1)] $H_r \leq O_r(G) \leq O_{p'}(G) = 1$. Аналогично, если K_r субнормальна в G, то

$K_r \leq O_{p'}(G) = 1$. Следовательно, силовские r-подгруппы H_r и K_r полунормальны в G. Поэтому существует подгруппа U такая, что $G = H_rU$ и H_r перестановочна со всеми подгруппами из U. Поскольку $N \leq U$, то H_r перестановочна с N_1. Аналогично, K_r перестановочна с N_1. Поэтому R перестановочна с N_1. Это верно для любого $r \in \pi(M)$, значит, M перестановочна с N_1. Теперь MN_1 — подгруппа группы G и N_1 нормальна в MN_1. Так как N абелева, то N_1 нормальна в $NM = G$, противоречие с тем, что $|N| > p$. Теорема доказана.

Пример 3.3.1. В группе $G = PSL(2,5)$ есть максимальные подгруппы $H = Z_3 \leftthreetimes Z_2$ и $K = Z_5 \leftthreetimes Z_2$. Максимальные подгруппы из силовских подгрупп из H и K единичные, поэтому полусубнормальны в группе G, но группа G не разрешима. Поэтому полусубнормальность максимальных подгрупп из силовских подгрупп из H и K в условиях теоремы 3.3.1 недостаточно для разрешимости группы.

Следствием из теоремы 3.3.1 является результат В. С. Монахова и А. А. Трофимука.

Следствие 3.3.1 [80, теорема E]. *Предположим, что в группе G существуют две несопряженные максимальные подгруппы H и K. Если все силовские подгруппы из H и из K полунормальны в G, то G сверхразрешима.*

Лемма 3.3.10. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и все максимальные подгруппы из M полусубнормальны в G. Тогда G разрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть K — максимальная подгруппа из M. По условию K полусубнормальна в G, а по лемме 3.3.1 K полусубнормальна в M. По лемме 3.3.2 (4) M — сверхразрешимая подгруппа, а следовательно, 2-нильпотентна. Тогда и K тоже 2-нильпотентна и по лемме 3.3.3 K^G разрешима. Поскольку M — максимальная подгруппа группы G, то либо $MK^G = G$, либо $K^G \leq M$. Если $MK^G = G$, то G разрешима. Пусть $K^G \leq M$. Тогда M/K^G максимальная подгруппа фактор-группы G/K^G. Пусть $\overline{S}$ максимальная подгруппа из M/K^G. Тогда существует максимальная подгруппа S в M такая, что $K^G \leq S$ и $\overline{S} = S/K^G$. По условию подгруппа S полусубнормальна в группе G. По лемме 3.3.1 SK^G/K^G полусубнормальна в G/K^G, а т. к. $K^G \leq S$, то $S = SK^G$ и S/K^G полусубнормальна в G/K^G. По индукции G/K^G разрешима. Тогда и G разрешима. Лемма доказана.

Пример 3.3.2. В условии леммы 3.3.10 индекс $|G : M|$ может быть не простым числом. Примером служит группа $G = A_4 = A \leftthreetimes B$. В ней подгруппа B порядка 3 является максимальной, и все максимальные подгруппы из B полунормальны в G, но $|G : B| = 4$ — не простое число.

Пример 3.3.3. Знакопеременная группа $G = A_4$ степени 4 имеет две максимальные несопряженные подгруппы $A = Z_3$ и $B = Z_2 \times Z_2$. Очевидно, что все максимальные подгруппы из A и B полусубнормальны в G. Однако, G несверхразрешима.

Теорема 3.3.2 [8–A]. *Пусть H и K — несопряженные максимальные подгруппы группы G. Если все максимальные подгруппы из H и из K полусубнормальны в G, то второй коммутант $(G')'$ нильпотентен.*

Доказательство. Заметим, что нильпотентность второго коммутанта $(G')'$ равносильна тому, что $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2$.

Предположим, что теорема неверна и пусть G — контрпример минимального порядка. По лемме 3.3.10 группа G разрешима. По лемме 3.3.1 (1) каждая максимальная подгруппа из H полусубнормальна в H и по лемме 3.3.2 (4) подгруппа H сверхразрешима. Аналогично, K — сверхразрешимая подгруппа.

Пусть N — произвольная неединичная нормальная в G подгруппа. Тогда либо $HN = G$, либо $HN = H$. Если $HN = G$, то

$$G/N = HN/N \simeq H/H \cap N \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2.$$

Если $HN = H$, то $N \leq H$. Аналогично, либо $KN = G$ и $G/N \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2$, либо $N \leq K$. Пусть $N \leq H \cap K$. Тогда фактор-группа G/N содержит несопряженные максимальные подгруппы H/N и K/N. Если $\overline{S}$ — максимальная подгруппа в H/N, то существует в H максимальная подгруппа S такая, что $\overline{S} = S/N$. По условию S — полусубнормальная подгруппа в G, а по лемме 3.3.1 (2) $\overline{S} = S/N$ полусубнормальна в G/N. Аналогично, если $\overline{T}$ — максимальная подгруппа из K/N, то она полусубнормальна в G/N. Следовательно, для фактор-группы G/N с несопряженными максимальными подгруппами H/N и K/N выполняются условия теоремы. По индукции $G/N \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2$.

По леммам 3.3.5 и 3.3.6 G примитивна. Тогда для G справедлива лемма 3.3.7. Поэтому $\Phi(G) = 1$ и в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что $N = C_G(N)$.

Предположим, что хотя бы одна из подгрупп H или K нормальна в группе G. Например, пусть H нормальна в G. Тогда $|G : H| = q$ и по [15, теорема 1] $G = N \leftthreetimes T$, где T имеет абелеву подгруппу индекса q. Так как $T \in \mathfrak{A}^2$, то $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2$, противоречие.

Поэтому в дальнейшем считаем, что подгруппы H и K ненормальны. По [15, теорема 2] $G = N \leftthreetimes T$, где

$$T/C_T(N) \simeq \overline{T} = < y > \leftthreetimes (< t >< z >),$$

где $< z > = Z(\overline{T})$.

Так как $N = C_G(N)$, то

$$C_T(N) = 1 \text{ и } T = (< y > \times < z >) < t >,$$

так как $< z >= Z(T)$.

Поэтому $T \in \mathfrak{A}^2$ и $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}^2$, противоречие. Теорема доказана.

Следствие 3.3.2. *Если в группе G все 2-максимальные подгруппы полусубнормальны, то коммутант G' нильпотентен.*

Доказательство. Заметим, что нильпотентность коммутанта G' равносильно тому, что $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}$.

Предположим, что теорема неверна и пусть G — контрпример минимального порядка. Легко показать, что условие следствия наследуют все фактор-группы G/N, где N — произвольная неединичная нормальная в G подгруппа. По индукции $G/N \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}$. Поэтому по леммам 3.3.5 и 3.3.6 G примитивна.

Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G. Тогда по леммам 3.3.1 (1) и 3.3.2 (4) M сверхразрешима. Поэтому либо G сверхразрешима, либо G — минимальная несверхразрешимая группа.

Если G сверхразрешима, то $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}$ по [31, теорема 4.52], противоречие.

Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. По леммам 3.3.7 и 3.3.8 G — разрешимая группа, P — единственная минимальная нормальная в G подгруппа, $|P| > p$, P — силовская p-подгруппа в G, $G = P \rtimes M$, где M — максимальная подгруппа группы G, она является p'-холловой подгруппой группы G. Пусть P_1 — подгруппа порядка p из P.

Если M абелева, то $G \in \mathfrak{N} \circ \mathfrak{A}$, противоречие. Поэтому будем считать, что M неабелева. В M существуют максимальные подгруппы M_1 и M_2 и $M = \langle M_1, M_2 \rangle$. Если хотя бы одна из подгрупп M_1 или M_2 субнормальна в G, то $O_{p'}(G) \neq 1$, противоречие. Поэтому M_1 и M_2 полунормальны в G. Значит, существуют подгруппы V_1 и V_2 такие, что

$$M_1V_1 = M_2V_2 = G, \ M_1P_1 = P_1M_1, \ M_2P_1 = P_1M_2,$$

поскольку $P \leq V_1 \cap V_2$. Тогда

$$M_1 \leq N_G(P_1), \ M_2 \leq N_G(P_1).$$

Поэтому $P_1 \lhd G = P\langle M_1, \ M_2 \rangle$. Противоречие. Следствие доказано.

Исследования, проведенные в разделе 3.3, обобщают результаты работ В. В. Подгорной [45], В. С. Монахова и А. А. Трофимука [80].

3.4 Краткие выводы

В разделе 3.1 данной главы установлены признаки разрешимости и частичной разрешимости групп при условии, что все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны, теорема 3.1.1 [4–A], и все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта S-полунормальны, теорема 3.1.3 [4–A]. Теорема 3.1.3 обобщает результат В. Н. Княгиной и В. С. Монахова [17, теорема 2]. Перечислены неабелевы композиционные факторы группы, в которой все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны, в частности, доказана частичная разрешимость такой группы, теорема 3.1.2 [4–A]. Указано, что не p-разрешимый композиционный фактор группы G изоморфен $PSL(2, 7)$ и $p = 7$ при условии, что p — нечетное число и все p-замкнутые pd-подгруппы Шмидта S-полунормальны, теорема 3.1.4 [4–A]. Следствия 3.1.1 – 3.1.4 развивают результат В. Н. Княгиной и В. С. Монахова [17].

В разделе 3.2 получены признаки разрешимости групп при условии, что некоторые подгруппы Шмидта из максимальной подгруппы группы полусубнормальны в группе, теоремы 3.2.4 и 3.2.5 [5–A]. Теорема 3.2.4 обобщает теоремы В. Е. Дескинса, З. Янко, Д. Томпсона [71, IV.7.4], В. А. Белоногова [1], теорема 3.2.5 обобщает результат В. С. Монахова [34].

В разделе 3.3 установлена сверхразрешимость группы G при условии, что все силовские подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе G, теорема 3.3.1 [8–A]. Доказана нильпотентность второго коммутанта $(G')'$ группы G при условии, что все максимальные подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе G, теорема 3.3.2 [8–A]. Исследования, проведенные в разделе 3.3, обобщают результаты работ В. В. Подгорной [45], В. С. Монахова и А. А. Трофимука [80].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

В диссертации исследованы группы с условием перестановочности силовской подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта.

Изучена группа, в которой силовская r-подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из добавления к ней. Для $r \leq 5$ перечислены неабелевы композиционные факторы такой группы, для $r \geq 7$ доказана r-разрешимость, теорема 2.1.2 [3–А]. Установлена r-разрешимость групп, $r > 2$ и r не является простым числом Ферма, в которых силовская r-подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта четного порядка из добавления к этой силовской подгруппе, теоремы 2.1.3 и 2.1.4 [2–А]. Указаны неабелевы композиционные факторы группы, в которой силовская подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка из группы, теорема 2.2.1 [6–А]. Полученные результаты развивают исследования, проведенные Я. Г. Берковичем и Э. М. Пальчиком (1967), В. Н. Князиной и В. С. Монаховым (2010).

Доказана разрешимость группы, в которой все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны в группе, теорема 3.1.1 [4–А]. Перечислены неабелевы композиционные факторы группы, в которой все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка S-полунормальны в группе, теорема 3.1.2 [4–А]. Получены признаки частичной разрешимости группы, в которой некоторые подгруппы Шмидта S-полунормальны в группе, теорема 3.1.3 [4–А]. Частные случаи этих результатов дополняют теоремы В. Н. Князиной и В. С. Монахова (2007).

Получены признаки r-разрешимости групп, в которых силовская r-подгруппа перестановочна с коммутантами 2-замкнутых или 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка, теоремы 2.3.1 и 2.3.2 [7–А]. Установлена разрешимость группы, в которой коммутант 2-замкнутой B-подгруппы четного порядка перестановочен с коммутантом 2-нильпотентной B-подгруппы четного порядка, теорема 2.3.3 [7–А].

Найдены признаки разрешимости групп с полусубнормальными подгруппами Шмидта четного порядка из некоторой максимальной подгруппы, теоремы 3.2.4 и 3.2.5 [5–А]. Найденные признаки обобщают теоремы В. Дескинса, З. Янко, Д. Томпсона, В. А. Белоногова (1966) и В. С. Монахова (1972).

Установлена сверхразрешимость группы при условии, что силовские подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе, теорема 3.3.1 [8–А], а также нильпотентность второго коммутанта группы, если все максимальные подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе, теорема 3.3.1 [8–А]. Данные результаты обобщают соответствующие теоремы В. В. Подгорной (2008), В. С. Монахова и А. А. Трофимука (2019).

Указано строение групп с подгруппами Шмидта ранга 4, теорема 1.2.5 [1–А].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в современной теории конечных групп и их классов при исследовании групп с условием перестановочности некоторых их подгрупп. Материалы диссертации будут также полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, при подготовке курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций. Отдельные положения диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» при чтении спецкурсов «Теория групп» и «Элементы современной и прикладной алгебры» для студентов математических специальностей, при подготовке курсовых и дипломных работ (акты внедрения от 03.09.2018, 21.01.2019).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Список использованных источников

1. Белоногов, В. А. Один признак разрешимости групп четного порядка / В. А. Белоногов // Сиб. матем. журн. — 1966. — Т. 7, № 2. — С. 458–459.

2. Беркович, Я. Г. О перестановочности подгрупп конечной группы / Я. Г. Беркович, Э. М. Пальчик // Сиб. матем. журн. — 1967. — Т. 8, № 4. — С. 741–753.

3. Беркович, Я. Г. Строение группы и строение ее подгрупп / Я. Г. Беркович // ДАН СССР. — 1968. — Т. 179, № 1. — С. 13–16.

4. Беркович, Я. Г. Теорема о ненильпотентных разрешимых подгруппах конечной группы / Я. Г. Беркович // Конечные группы : сб. науч. ст. — Минск : Наука и техника, 1966. — С. 24–39.

5. Беркович, Я. Г. Условие, необходимое для совпадения группы с коммутантом / Я. Г. Беркович // Изв. вузов. Матем. — 1968. — № 8 (75). — С. 11–17.

6. Бузланов, А. В. Конечные разрешимые группы с заданными максимальными подгруппами / А. В. Бузланов // Вопросы алгебры : межведомств. сб. / М-во образования РБ, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. — Минск : Университетское, 1993. — Вып. 6. — С. 35–45.

7. Буриченко, В. П. О группах, элементы малых порядков которых порождают малую подгруппу / В. П. Буриченко // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 3. — С. 361–367.

8. Ведерников, В. А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В. А. Ведерников // Алгебра и логика. — 2007. — Т. 46, № 6. — С. 669–687.

9. Ведерников, В. А. О группах с определенными свойствами для подгрупп / В. А. Ведерников // ДАН СССР. — 1971. — Т. 198, № 2. — С. 266–268.

10. Ведерников, В. А. О конечных группах с данными бипримарными подгруппами / В. А. Ведерников // Конечные группы : сб. науч. ст. — Минск : Наука и техника, 1975. — С. 24–29.

11. Го, В. X-перестановочные максимальные подгруппы силовских подгрупп конечных групп / В. Го, К. П. Шам, А. Н. Скиба // Укр. матем. журн. — 2006. — Т. 58, № 10. — С. 1299–1309.

12. Гольфанд, Ю. А. О группах, все подгруппы которых специальные / Ю. А. Гольфанд // ДАН СССР. — 1948. — Т. 60, № 8. — С. 1313–1315.

13. Горенстейн, Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. — М. : Мир. — 1985. — 352 с.

14. Журтов, А. Х. О группах Шмидта / А. Х. Журтов, С. А. Сыскин // Сиб. матем. журн. — 1987. — Т. 26, № 2. — С. 74–78.

15. Казарин, Л. С. Конечные разрешимые группы со сверхразрешимы-

ми максимальными подгруппами / Л. С. Казарин, Ю. А. Корзюков // Изв. вузов. Матем. — 1980. — Т. 24, № 5. — С. 22–27.

16. Казарин, Л. С. О группах, представимых в виде произведения двух разрешимых подгрупп / Л. С. Казарин // Commun. Algebra. — 1986. — Т. 14, № 6. — С. 1001–1066.

17. Княгина, В. Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Алгебра и логика. — 2007. — Т. 46, № 4. — С. 448–458.

18. Княгина, В. Н. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45, № 6. — С. 1316–1322.

19. Княгина, В. Н. О перестановочности максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 4. — С. 126–133.

20. Княгина, В. Н. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 130–139.

21. Княгина, В. Н. О перестановочности n-максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 3. — С. 125–130.

22. Княгина, В. Н. О произведении B-группы и примарной группы / В. Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — № 3 (32). — С. 52–57.

23. Княгина, В. Н. О разрешимости конечных групп с перестановочными подгруппами Шмидта четного порядка / В. Н. Княгина // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўн-та імя П. М. Машэрава. — 2004. — № 4 (34). — С. 94–96.

24. Княгина, В. Н. О π'-свойствах конечной группы, обладающей π-холловой подгруппой / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Сиб. матем. журн. — 2011. — Т. 52, № 2. — С. 297–309.

25. Княгина, В. Н. Подгруппы Шмидта конечных групп: их существование и перестановочность : дис. ... канд. физ.-матем. наук : 01.01.06 / В. Н. Княгина. — Гомель, 2005. — 73 л.

26. Кондратьев, А. С. Конечные группы / А. С. Кондратьев, А. А. Махнев, А. И. Старостин // Итоги науки и техники: Алгебра. Топология. Геометрия : сб. ст. / ВИНИТИ АН СССР. — Москва, 1986. — Т. 24. — С. 3–120.

27. Мазуров, В. Д. Конечные группы / В. Д. Мазуров // Итоги науки и техники: Алгебра. Топология. Геометрия : сб. ст. / ВИНИТИ АН СССР. — Москва, 1976. — Т. 14. — С. 5–56.

28. Мазуров, В. Д. О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами / В. Д. Мазуров, С. А. Сыскин // Матем. заметки. — 1973. — Т. 14, № 2. — С. 217–222.

29. Максимов, С. Л. О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 2 / С. Л. Максимов // Весцi НАН Беларусi. Серыя фiзiка-матэматычных навук. — 2002. — № 2. — С. 38–41.

30. Максимов, С. Л. О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 3 / С. Л. Максимов // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2001, № 3 (6). — С. 186–190.

31. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. — Минск : Вышэйшая школа, 2006. — 207 с.

32. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, № 4. — С. 573–581.

33. Монахов, В. С. Некоторые признаки разрешимости групп / В. С. Монахов // ДАН БССР. — 1970. — Т. 14, № 11. — С. 986–988.

34. Монахов, В. С. О влиянии свойств максимальных подгрупп на строение конечной группы / В. С. Монахов // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11, № 2. — С. 183–190.

35. Монахов, В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В. С. Монахов // Матем. заметки. — 1995. — Т. 58, № 5. — С. 717–722.

36. Монахов, В. С. О подгруппах Шмидта конечных групп / В. С. Монахов // Вопросы алгебры : межведомств. сб. / М-во образования РБ, Гом. гос. ун-т им. Ф. Скорины. — Минск, 1998. — Вып. 13. — С. 153–171.

37. Монахов, В. С. О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта / В. С. Монахов // ДАН БССР. — 1974. — Т. 18, № 10. — С. 871–874.

38. Монахов, В. С. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Сиб. матем. журн. — 2017. — Т. 58, № 2. — С. 353—364.

39. Монахов, В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В. С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса 2001. Киев. — 2002, секция № 1. — С. 81–90.

40. Монахов, В. С. Произведение бипримарной и 2-разложимой групп / В. С. Монахов // Матем. заметки. — 1978. — Т. 23, № 5. — С. 641–649.

41. Монахов, В. С. Произведение двух групп Шмидта / В. С. Монахов // ДАН БССР. — 1975. — Т. 19, № 1. — С. 8–11.

42. Монахов, В. С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В. С. Монахов // Конечные группы : сб. науч. ст. — Минск : Наука и техника, 1975. — С. 70–100.

43. Монахов, В. С. Произведение сверхразрешимых групп Шмидта / В. С. Монахов // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 1999. — № 1 (15). — С. 41–46.

44. Подгорная, В. В. Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость

конечных групп / В. В. Подгорная // Весці НАН Беларусі. Серыя. фізіка-матэматычных навук. — 2000. — № 4. — С. 22–25.

45. Подгорная, В. В. Сверхразрешимость конечной группы с полунормальными вторыми максимальными подгруппами / В. В. Подгорная // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2008. — № 2 (47). — С. 154–156.

46. Семенчук, В. Н. Конечные группы с системой минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп / В. Н. Семенчук // в кн. «Подгрупповое строение конечных групп». Минск : Наука и техника, 1981. — С. 138–149.

47. Тютянов, В. Н. Конечные группы с нильпотентными подгруппами нечетного порядка / В. Н. Тютянов, П. В. Бычков // Проблемы физики, математики и техники. — 2018. — № 3 (36). — С. 84–86.

48. Тютянов, В. Н. Конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. — 2015. — № 1 (22). — С. 88–91.

49. Чунихин, С. А. Конечные группы / С. А. Чунихин, Л. А. Шеметков // Итоги науки и техники: Алгебра. Топология. Геометрия : сб. ст. / ВИНИТИ АН СССР. — Москва, 1971. — С. 7–70.

50. Чунихин, С. А. О специальных группах / С. А. Чунихин // Матем. сб. — 1929. — Т. 4, № 3. — С. 512–530.

51. Чунихин, С. А. Подгруппы конечных групп / С. А. Чунихин. — Минск : Наука и техника, 1964. — 157 с.

52. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. — М. : Наука, 1978. — 271 с.

53. Шмидт, О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О. Ю. Шмидт // Матем. сб. — 1924. — Т. 31. — С. 366–372.

54. Al-Sharo, Kh. A. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups / Kh. A. Al-Sharo, A. N. Skiba // Commun. Algebra. — 2017. — Vol. 45, № 10. — P. 4158–4165.

55. Arad, Z. A. On finite factorizable groups / Z. A. Arad, E. Fisman // J. Algebra. — 1984. — Vol. 86, № 2. — P. 522–548.

56. Asaad, M. On the solvability of finite groups / M. Asaad // Arch. Math. — 1988. — Vol. 51. — P. 289–293.

57. Asaad, M. On S-quasinormally embedded subgroups of finite groups / M. Asaad, A. A. Heliel // J. Pure Appl. Algebra. — 2001. — Vol. 165, № 2. — P. 129–135.

58. Ballester–Bolinches, A. Products of finite groups / A. Ballester–Bolinches, R. Esteban–Romero, M. Assad. — Berlin – New York : Walter de Gruyter, 2010.

59. Baumann, B. Endliche nichtauflösbare gruppen mit einer nilpotenten maximal untergruppen / B. Baumann // J. Algebra. — 1976. — Vol. 38, № 1. — P. 119–135.

60. Berkovich, Y. G. Groups of Prime Power Order : in 6 vol. / Y. G.

Berkovich, Z. Janko. — Walter de Gruyter, 2011. — Vol. 3. — 639 p.

61. Berkovich, Y. G. Some corollaries of Frobenius normal p-complement theorem / Y. G Berkovich // Proc. Amer. math. soc. — 1999. — Vol. 127, № 9. — P. 2505–2509.

62. Carocca, A. Some solvability criteria for finite groups / A. Carocca, H. Matos // Hokkaido Math. J. — 1997. — Vol. 26, № 1. — P. 157–161.

63. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. — Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992. — 892 p.

64. Doerk, K. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen / K. Doerk // Math. Zeitschr. — 1966. — Vol. 91. — P. 198–205.

65. Fisman, E. On the product of two finite solvable groups / E. Fisman // J. Algebra. — 1983. — Vol. 80, № 2. — P. 517–536.

66. Foguel, T. On seminormal subgroups / T. Foguel // J. Algebra. — 1994. — Vol. 165, № 3. — P. 633–635.

67. Guo, W. Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // SEAMS Bull. Math. — 2005. — Vol. 29, № 2. — P. 240–255.

68. Guo, W. Finite groups with seminormal Sylow subgroups / W. Guo // Acta Mathematica Sinica. — 2008. — Vol. 24, № 10. — P. 1751–1758.

69. Guo, W. X-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // J. Algebra. — 2007. — Vol. 315, № 1. — P. 31–41.

70. Guralnick, R. M. Subgroups of prime power index in a simple group / R. M. Guralnick // J. Algebra. — 1983. — Vol. 81, № 2. — P. 304–311.

71. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967. — 793 p.

72. Huppert, B. Finite groups II / B. Huppert, N. Blackburn. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1982. — 532 p.

73. Huppert, B. Finite groups III / B. Huppert, N. Blackburn. — Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer-Verlag, 1982. — 468 p.

74. Isaacs, I. M. Semipermutable π-subgroups / I. M. Isaacs // Arch. Math. — 2014. — Vol. 102, № 1. — P. 1–6.

75. Ito, N. On the faktorisations of the linear fractional group $LF(2, p^n)$ / N. Ito // Acta scient. math. — 1953. — Vol. 15. — P. 79–84.

76. Kegel, O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. — 1962. — Vol. 78, № 1. — P. 205–221.

77. Li, S. R. On SS-quasinormal subgroups of finite groups / S. R. Li, Z. C. Shen, X. H. Kong // Comm. Algebra. — 2008. — Vol. 36, № 12. — P. 4436–4447.

78. Li, S. R. The influence of SS-quasinormality of some subgroups on the structure of finite groups / S. R. Li, Z. C. Shen, J. J. Liu, X. C. Liu // J. Algebra. — 2008. — Vol. 319, № 10. — P. 4275–4287.

79. Miller, G. Nonabelian groups in which every subgroups is abelian / G. Miller, H. Moreno // Trans. Amer. Math. Soc. — 1903. – Vol. 4. — P. 398–404.

80. Monakhov, V. S. Finite groups with two supersoluble subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. — 2019. — Vol. 22, № 2. — P. 297–312.

81. Rédei, L. Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen / L. Rédei // Publ. Math. Debrecen. — 1956. — Vol. 4. — P. 303–324.

82. Shaalan, A. The influence of S-permutability of some subgroups / A. Shaalan // Acta. Math. Hungar. — 1990. — Vol. 56. — P. 87–93.

83. Srinivasan, S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups / S. Srinivasan // Israel J. Math. — 1980. — Vol. 35, № 3. — P. 210–214.

84. Su, X. On seminormal subgroups of finite group / X. Su // J. Math. (Wuhan). — 1988. — Vol. 8, № 1. — P. 7–9.

85. Thompson, J. A special class of non-solvable groups / J. Thompson // Math. Z. — 1960. — Vol. 72. — P. 458–462.

86. Thompson, J. Finite groups with fixed point-free automorphisms of prime order / J. Thompson // Proc. Nat. Sci., U.S.A. — 1959. — Vol. 45, № 4. — P. 578–581.

87. Wang, P. Some Sufficient Conditions of a Nilpotent Group / P. Wang // J. Algebra. — 1992. — Vol. 148, № 2. — P. 289–295.

Список публикаций соискателя

Статьи

1–А. Зубей, Е. В. О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 4 / Е. В. Зубей // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — № 3 (32). — С. 48–51.

2–А. Монахов, В. С. О перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта из некоторого ее добавления / В. С. Монахов, Е. В. Зубей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 3. — С. 145–154.

3–А. Монахов, В. С. О композиционных факторах конечной группы с OS-полунормальной силовской подгруппой / В. С. Монахов, Е. В. Зубей // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 88–94.

4–А. Монахов, В. С. О разрешимости конечной группы с S-полунормальными подгруппами Шмидта / В. С. Монахов, В. Н. Княгина, Е. В. Зубей // Укр. матем. журн. — 2018. — Т. 70, № 11. — С. 1511–1518. Английская версия: Monakhov, V. S. On the solvablity of a finite group with S-seminormal Schmidt subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Knyagina, E. V. Zubei // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 70, № 11. — P. 1741–1749.

5–А. Зубей, Е. В. О разрешимости конечной группы с полунормальными или субнормальными подгруппами Шмидта некоторой ее максимальной подгруппы / Е. В. Зубей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 55–61.

6–А. Трофимук, А. А. О перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта нечетного порядка / А. А. Трофимук, Е. В. Зубей // Проблемы физики, математики и техники. — 2019. — № 1 (38). — С. 69–71.

7–А. Зубей, Е. В. О перестановочности силовских подгрупп с коммутантами B-подгрупп / Е. В. Зубей // Журн. Бел. гос. ун-та. Математика. Информатика. — 2019. — № 1. — С. 12–17.

8–А. Monakhov, V. S. Finite groups with restrictions on two maximal subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk, E. V. Zubei // Проблемы физики, математики и техники. — 2019. — № 3 (40). — С. 88–92.

Материалы конференций

9–А. Зубей, Е. В. О рангах групп Шмидта малых порядков [Электронный ресурс] / Е. В. Зубей, В. С. Монахов // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XX Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 20–22 марта 2017 г. : в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2017. — Ч. 1. — С. 44–45. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

10–А. Зубей, Е. В. О классе конечных групп с подгруппами Шмидта ранга 4 / Е. В. Зубей // Актуальные проблемы прикладной математики и физики : материалы Междунар. науч. конф., Нальчик – Терскол, 17–21 мая 2017 г. — Нальчик, 2017. — С. 91–92.

11–А. Зубей, Е. В. О конечных группах с полунормальными минимальными несверхразрешимыми подгруппами / Е. В. Зубей // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XXI Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 19–21 марта 2018 г.: / ГГУ им. Ф. Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2018. — С. 38–39.

12–А. Зубей, Е. В. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / Е. В. Зубей // Формирование готовности будущего учителя математики к работе с одаренными учащимися : сб. материалов междунар. науч.-практ. конф., Брест, 10–11 апр. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; редкол.: Н. А. Каллаур [и др.] , под общ. ред. Е. П. Гринько. — Брест, 2018. — С. 223–224.

13–А. Зубей, Е. В. О конечных группах с S-полунормальными подгруппами Шмидта четного порядка / Е. В. Зубей // Теория групп и ее приложения : материалы XII школы-конференции по теории групп, посвящ. 65-летию А. А. Махнева, Геленджик, 13–20 мая 2018 г. / Кубанский гос. ун-т ; отв. ред.

А. С. Кондратьев. — Краснодар, 2018. — С. 66–67.

14–А. Зубей, Е. В. Композиционные факторы конечной группы с OS-полунормальной силовской подгруппой / Е. В. Зубей // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов V Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 19 окт. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. А. Козинского. — Брест, 2018. — С. 81.

15–А. Трофимук, А. А. Композиционные факторы группы, в которой силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта / А. А. Трофимук, Е. В. Зубей // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XXII Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 25–27 марта 2019 г. / ГГУ им. Ф. Скорины ; редкол.: С. П. Жогаль (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2019. — С. 55–56.

16–А. Зубей, Е. В. О разрешимости конечной группы с ограничениями на подгруппы Шмидта из максимальной подгруппы / Е. В. Зубей // Алгебра и математическая логика: теория и приложения : материалы конф., Казань, 24–28 июня 2019 г. / Казанский (Приволжский) федеральный ун-т. — Казань, 2019. — С. 113–114.

Тезисы докладов

17–А. Зубей, Е. В. О разрешимости группы с S-полунормальными подгруппами Шмидта / Е. В. Зубей // Международная алгебраическая конференция, посвящ. 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша : тез. докл., Москва, 23–25 мая 2018 г. / МГУ. — Москва, 2018. — С. 88.

18–А. Зубей, Е. В. О перестановочности силовской подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта четного порядка / Е. В. Зубей // Мальцевские чтения : тез. докл. Междунар. конф., Новосибирск, 19–22 нояб. 2018 г. / Ин-т математики им. С. Л. Соболева, НГУ. — Новосибирск, 2018. — С. 95.

19–А. Зубей, Е. В. О конечной группе, в которой силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка / Е. В. Зубей // Международная конференция, посвящ. 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ : тез. докл., Москва, 28–31 мая 2019 г. / МГУ. — Москва, 2019. — С. 29–30.

20–А. Зубей, Е. В. О разрешимости группы с перестановочными коммутантами B-подгрупп / Е. В. Зубей // Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем : тез. Междунар. конф., посвященной 70-летию А. Х. Журтова, Нальчик, 29 июня – 3 июля 2019 г. / КБГУ им. Х. М. Бербекова, Ин-т прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Ин-т математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН. — Нальчик, 2019. — С. 46.