УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ»

УДК 512.542

**Зубей**
**Екатерина Владимировна**

# КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С УСЛОВИЕМ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Гомель, 2019

Работа выполнена в учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Научный руководитель: **Монахов Виктор Степанович**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Официальные оппоненты: **Сафонов Василий Григорьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, проректор по научной работе Белорусского государственного университета;

**Воробьев Николай Николаевич**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры и методики преподавания математики учреждения образования «Витебский государственный университет имени П. М. Машерова».

Оппонирующая организация — учреждение образования «Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова».

Защита состоится 29 ноября 2019 года в 15.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.12.01 при учреждении образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» по адресу: 246019, г. Гомель, ул. Кирова, 119, ауд. 3–1. Телефон ученого секретаря: (+375 232) 51-03-01. E-mail: SovetD021201@tut.by.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале № 1 библиотеки учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Автореферат разослан 28 октября 2019 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д. А. Ходанович

# ВВЕДЕНИЕ

Все рассматриваемые в диссертации группы предполагаются конечными.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучению таких групп положила известная работа О. Ю. Шмидта 1924 года. Определяющие соотношения и универсальные накрывающие групп Шмидта найдены Ю. А. Гольфандом в 1948 году. Группам Шмидта посвящены отдельные параграфы монографий Б. Хупперта, Л. А. Шеметкова. В работе В. С. Монахова[1] приведен обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп по состоянию на 2001 год.

Группы с ограничениями на подгруппы Шмидта исследовались во многих работах. В. С. Монахов[2] указал строение групп, в которых все подгруппы Шмидта сверхразрешимы, а также групп с несверхразрешимыми подгруппами Шмидта. В работах В. Н. Семенчука[3], В. Н. Князиной и В. С. Монахова[4], В. А. Ведерникова[5], Х. А. Аль-Шаро и А. Н. Скибы[6] изучались группы с субнормальными подгруппами Шмидта. Разрешимость группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта установил В. Н. Тютянов[7]. В работе В. Н. Князиной и В. С. Монахова[8] получены признаки частичной разрешимости группы с полунормальными подгруппами Шмидта четного порядка. Простые группы, в которых нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, перечислили В. Н. Тютянов и П. В. Бычков[9].

Говорят, что подгруппы $A$ и $B$ перестановочны, если $AB = BA$, т. е. множество всех элементов $ab$, где $a \in A,\ b \in B$, образуют подгруппу. Часто встречается ситуация, когда подгруппы $A$ и $B$ группы $G$ не являются

---

[1]Монахов, В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В. С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса 2001. Киев. — 2002, секция № 1. — С. 81–90.

[2]Монахов, В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В. С. Монахов // Матем. заметки. — 1995. — Т. 58, № 5. — С. 717–722.

[3]Семенчук, В. Н. Конечные группы с системой минимальных не $\mathfrak{F}$-подгрупп / В. Н. Семенчук // в кн. «Подгрупповое строение конечных групп». Минск : Наука и техника, 1981. — С. 138–149.

[4]Князина, В. Н. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Князина, В. С. Монахов // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45, № 6. — С. 1316–1322.

[5]Ведерников, В. А. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта / В. А. Ведерников // Алгебра и логика. — 2007. — Т. 46, № 6. — С. 669–687.

[6]Al-Sharo, Kh. A. On finite groups with $\sigma$-subnormal Schmidt subgroups / Kh. A. Al-Sharo, A. N. Skiba // Commun. Algebra. — 2017. — Vol. 45, № 10. — P. 4158–4165.

[7]Тютянов, В. Н. Конечные группы с $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. — 2015. — № 1 (22). — С. 88–91.

[8]Князина, В. Н. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В. Н. Князина, В. С. Монахов // Алгебра и логика. — 2007. — Т. 46, № 4. — С. 448–458.

[9]Тютянов, В. Н. Конечные группы с нильпотентными подгруппами нечетного порядка / В. Н. Тютянов, П. В. Бычков // Проблемы физики, математики и техники. — 2018. — № 3 (36). — С. 84–86.

перестановочными, но в $G$ существует подгруппа $X$ такая, что $AB^x = B^xA$ для всех $x \in X$. Такие подгруппы А. Н. Скиба предложил называть $X$-перестановочными. В работах[10,11] установлены свойства $X$-перестановочных подгрупп, а также признаки разрешимости групп, в которых некоторые подгруппы $X$-перестановочны.

Одной из первых работ, посвященной перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта, можно считать работу Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика[12]. В этой работе, наряду с другими результатами, установлена разрешимость групп при условии, что некоторые силовские подгруппы перестановочны с подгруппами Шмидта четного порядка, а также при условии, что некоторые максимальные подгруппы перестановочны с подгруппами Шмидта. Эти результаты нашли развитие в работах В. Н. Княгиной и В. С. Монахова[13,14,15]. Так в работе[13] получена частичная разрешимость групп с условием $S_r(G)$-перестановочности некоторой силовской подгруппы с подгруппами Шмидта. Здесь $S_r(G)$ — наибольшая нормальная в $G$ $r$-разрешимая подгруппа. Локальные аналоги результатов работы[12] получены в статье[14]. В. Н. Княгина[16] установила разрешимость групп, в которых некоторые подгруппы Шмидта четного порядка перестановочны между собой.

Строение группы, которая является произведением силовской подгруппы и подгруппы Шмидта, а также группы, совпадающей с произведением двух подгрупп Шмидта, исследовал В. С. Монахов[17,18,19,20].

Представленный краткий обзор свидетельствует о том, что задача изучения строения конечных групп с условием перестановочности некоторых подгрупп с некоторыми подгруппами Шмидта, является актуальной и зна-

---

[10] Го, В. $X$-перестановочные максимальные подгруппы силовских подгрупп конечных групп / В. Го, К. П. Шам, А. Н. Скиба // Укр. матем. журн. — 2006. — Т. 58, № 10. — С. 1299–1309.

[11] Guo, W. $X$-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // J. Algebra. — 2007. — Vol. 315, № 1. — P. 31–41.

[12] Беркович, Я. Г. О перестановочности подгрупп конечной группы / Я. Г. Беркович, Э. М. Пальчик // Сиб. матем. журн. — 1967. — Т. 8, № 4. — С. 741–753.

[13] Княгина, В. Н. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 130–139.

[14] Княгина, В. Н. О перестановочности максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2011 — Т. 17, № 4. — С. 126–133.

[15] Княгина, В. Н. О перестановочности $n$-максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта / В. Н. Княгина, В. С. Монахов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 3. — С. 125–130.

[16] Княгина, В. Н. О разрешимости конечных групп с перестановочными подгруппами Шмидта четного порядка / В. Н. Княгина // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўн-та імя П. М. Машэрава. — 2004. — № 4 (34). — С. 94–96.

[17] Монахов, В. С. О произведении 2-разложимой группы и группы Шмидта / В. С. Монахов // ДАН БССР. — 1974. — Т. 18, № 10. — С. 871–874.

[18] Монахов, В. С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В. С. Монахов // Конечные группы : сб. науч. ст. — Минск : Наука и техника, 1975. — С. 70–100.

[19] Монахов, В. С. Произведение двух групп Шмидта / В. С. Монахов // ДАН БССР. — 1975. — Т. 19, № 1. — С. 8–11.

[20] Монахов, В. С. Произведение бипримарной и 2-разложимой групп / В. С. Монахов // Матем. заметки. — 1978. — Т. 23, № 5. — С. 641–649.

чимой в современной теории групп. В данной диссертационной работе это направление получило дальнейшее развитие.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» в период с 2016 по 2019 год в соответствии со следующей научной темой: «Инварианты частично разрешимых конечных групп и их приложения», номер гос. регистрации — 20161494. Тема входит в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016–2020 годы «Конвергенция-2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».

### Цель и задачи исследования

Цель диссертации — исследование строения конечных групп, в которых некоторая силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта.

Достижение поставленной цели предполагает решение следующих задач:

— установление $r$-разрешимости групп с условием перестановочности силовской $r$-подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта;

— перечисление композиционных факторов групп, силовская подгруппа которых перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка;

— получение признаков разрешимости групп, в которых силовская подгруппа перестановочна с коммутантами $B$-подгрупп;

— установление признаков разрешимости групп с полусубнормальными подгруппами Шмидта;

— исследование групп с ограничениями на две максимальные подгруппы.

Объектом исследования являются подгруппы Шмидта с условием перестановочности. Предметом исследования являются композиционные факторы и частичная разрешимость групп.

### Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми и впервые получены соискателем. В диссертационной работе проведено исследование строения групп с условием перестановочности силовской подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта. Получены новые признаки частичной разрешимости и перечислены композиционные факторы исследуемых групп.

**Положения, выносимые на защиту**

1. Перечислены неабелевы композиционные факторы группы с условием перестановочности некоторых силовских подгрупп и подгрупп Шмидта, теоремы 2.1.2 [3], 2.2.1 [6], 3.1.2 и 3.1.4 [4]. Отсюда выводятся новые признаки частичной разрешимости таких групп.

2. Получены признаки разрешимости группы, в которой перестановочны коммутанты $B$-подгрупп четного порядка, теорема 2.3.3 [7].

3. Найдены признаки разрешимости группы с полусубнормальными подгруппами Шмидта четного порядка из некоторой максимальной подгруппы, теоремы 3.2.4 и 3.2.5 [5].

4. Установлена сверхразрешимость группы при условии, что силовские подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе, теорема 3.3.1 [8], а также доказана нильпотентность второго коммутанта группы, в которой все максимальные подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе, теорема 3.3.2 [8].

**Личный вклад соискателя ученой степени**

Диссертационная работа выполнена соискателем лично под руководством доктора физико-математических наук, профессора Виктора Степановича Монахова. Научным руководителем были поставлены задачи и цель исследования. В работах [2, 3], опубликованных совместно с научным руководителем, идеи и методы принадлежат научному руководителю, а их реализация проводилась соискателем. Работы [4, 6, 8] выполнены и опубликованы совместно с научным руководителем и кандидатами физико-математических наук, доцентами В. Н. Князиной и А. А. Трофимуком, результаты принадлежат авторам на паритетных условиях. Без соавторства выполнены работы [1, 5, 7].

**Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Результаты диссертации апробированы на

— Гомельском алгебраическом семинаре (учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»);

— XX–XXII Республиканских научных конференциях студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 20–22 марта 2017 г.; 19–21 марта 2018 г.; 25–27 марта 2019 г.);

— V Международной научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» (Брест, 19 октября 2018 г.);

— Международной конференции, посвященной 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ (Москва, 28–31 мая 2019 г.).

Отдельные положения диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» при чтении спецкурсов «Теория групп» и «Элементы современной и прикладной алгебры» для студентов математических специальностей, при написании курсовых и дипломных работ (акты внедрения от 03.09.2018, 21.01.2019).

**Опубликование результатов диссертации**

По теме диссертационного исследования опубликовано 8 статей в научных журналах, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (объемом 4,08 авторского листа), 12 материалов и тезисов докладов конференций (объемом 0,67 авторского листа).

**Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из перечня сокращений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка в алфавитном порядке в количестве 87 наименований использованных источников и 20 наименований публикаций соискателя. Полный объем диссертации — 88 страниц, из них 8 страниц занимает библиографический список.

Соискатель выражает глубокую признательность и искреннюю благодарность своему научному руководителю — доктору физико-математических наук, профессору Виктору Степановичу Монахову за оказанные им внимание и помощь при написании данной диссертации.

## ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Глава 1 содержит аналитический обзор литературы по теме диссертации. В этой главе также сформулирован ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основных результатов диссертации. Кроме того, в данной главе получены новые результаты. Так в разделе 1.1 перечислены группы Шмидта порядка, не превышающего 500. В разделе 1.2 описано строение групп с подгруппами Шмидта ранга 4. Отметим, что строение групп с подгруппами Шмидта ранга $\leq 3$ ранее изучено в работах[2,21].

[21] Максимов, С. Л. О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 2 / С. Л. Максимов // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. — 2002. — № 2. — С. 38–41.

Основное содержание диссертации представлено в главах 2 и 3.

В главе 2 устанавливаются признаки частичной разрешимости и перечисляются неабелевы композиционные факторы групп, в которых силовская подгруппа перестановочна либо с подгруппами Шмидта четного порядка, либо с подгруппами Шмидта нечетного порядка.

В разделе 2.1 рассматриваются группы, силовская подгруппа которых перестановочна с подгруппами Шмидта четного порядка из добавления к силовской подгруппе.

В. С. Монахов предложил следующее понятие.

**Определение 2.1.1.** Подгруппа $A$ группы $G$ называется $OS$-полунормальной в $G$, если существует подгруппа $B$ такая, что $G = AB$ и $A$ перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из $B$. В этой ситуации подгруппу $B$ будем называть $OS$-добавлением к подгруппе $A$ в группе $G$.

Обозначение $OS$ связано с Отто Юльевичем Шмидтом.

Если подгруппа $A$ перестановочна со всеми подгруппами из $B$, то она будет называться полунормальной подгруппой. Полунормальная подгруппа всегда $OS$-полунормальна.

Если $A$ — подгруппа группы $G$ и существует нильпотентная подгруппа $B$ такая, что $G = AB$, то $A$ будет $OS$-полунормальной подгруппой группы $G$. В частности, любая подгруппа примарного индекса является $OS$-полунормальной подгруппой. В группе $PSL(2,7)$ силовская 2-подгруппа $Q$ будет $OS$-полунормальной, поскольку существует нециклическая подгруппа $B$ порядка 21, которая является группой Шмидта, и $G = QB$. В группе $SL(2,8)$ силовская 3-подгруппа $R$ будет $OS$-полунормальной, поскольку существует подгруппа Шмидта $B = E_{2^3} \rtimes Z_7$ такая, что $G = RB$. Здесь и далее запись $G = A \rtimes B$ означает полупрямое произведение нормальной в $G$ подгруппы $A$ и подгруппы $B$. В группе $PSL(2,5)$ силовская 5-подгруппа $P$ будет $OS$-полунормальной, поскольку существует подгруппа $B \simeq A_4$ такая, что $PSL(2,5) = PB$. Здесь $A_4$ — знакопеременная группа, она является группой Шмидта. В этих примерах силовская $r$-подгруппа, $r \in \{2,\ 3,\ 5\}$ соответственно, $OS$-полунормальна, но не полунормальна.

Композиционные факторы неразрешимой группы с $OS$-полунормальной силовской подгруппой перечислены в следующей

**Теорема 2.1.2** [3]. *Пусть в группе $G$ силовская $p$-подгруппа $OS$-полунормальна.*

(1) *Если $p = 2$, то неабелевы композиционные факторы группы $G$ изоморфны $PSL(2,7)$. В частности, группа $G$ $\{2,3,7\}'$-разрешима.*

(2) *Если $p = 3$, то неабелевы композиционные факторы группы $G$ изоморфны $SL(2,8)$ или являются $3'$-группами.*

(3) *Если $p = 5$, то неабелевы композиционные факторы группы $G$ изоморфны $SL(2,4)$ или являются $5'$-группами.*

(4) *Если $p \geq 7$, то группа $G$ $p$-разрешима.*

**Следствие 2.1.1.** *Если в группе $G$ силовские 2- и 3-подгруппы $OS$-полунормальны, то группа $G$ разрешима.*

**Следствие 2.1.2.** *Если в группе $G$ силовские 2- и 7-подгруппы $OS$-полунормальны, то группа $G$ разрешима.*

Далее в этом разделе показано, что признаки частичной разрешимости группы, подобные теореме 2.1.2 (4), сохранятся, если требовать перестановочность не со всеми подгруппами Шмидта четного порядка, а только с 2-нильпотентными или 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка. Доказана

**Теорема 2.1.3** [2]. *Пусть $R$ — силовская $r$-подгруппа группы $G$, $r > 2$ и $r$ не является простым числом Ферма. Если существует в группе $G$ подгруппа $B$ такая, что $G = RB$ и $R$ перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из $B$, то $G$ $r$-разрешима.*

Заметим, что в формулировке теоремы 2.1.3 требования «$r > 2$ и $r$ не является простым числом Ферма» убрать нельзя. Для $r = 2$ примером служит группа $PSL(2,7) = D_8(Z_7 \leftthreetimes Z_3)$, для $r = 3$ — группа $SL(2,8) = Z_9(E_8 \leftthreetimes Z_7)$, для $r = 2^n + 1 > 3$ — группа $SL(2,2^n) = Z_r(E_{2^n} \leftthreetimes Z_{2^n-1})$.

Результаты раздела 2.1 обобщают результаты работ Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика[12], В. Н. Князиной и В. С. Монахова[13].

В разделе 2.2 исследуются группы, в которых силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка.

**Теорема 2.2.1** [6]. *Если некоторая силовская $p$-подгруппа группы $G$ перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка из $G$, то неабелевы композиционные факторы группы $G$ изоморфны $PSL(2,7)$ или группам из множества $\Omega$.*

Здесь $\Omega = \{PSL(2,2^n),\ n \geq 2;\ PSL(2,q),\ q = 2^k + 1;\ PSU(4,2) \simeq PSp(4,3);\ PSp(4,2^n),\ n \geq 2;\ Sz(2^{2n+1}),\ n \geq 1\}$ — класс всех простых групп, в которых нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, полученный В. Н. Тютяновым и П. В. Бычковым[9].

Результаты раздела 2.2 развивают исследования, проведенные Я. Г. Берковичем и Э. М. Пальчиком[12], В. Н. Князиной и В. С. Монаховым[13].

В разделе 2.3 устанавливается частичная разрешимость групп, в которых силовская подгруппа перестановочна с коммутантами некоторых $B$-подгрупп четного порядка. Напомним, что $B$-группой называют группу, в которой фактор-группа по подгруппе Фраттини является группой Шмидта.

Это понятие предложено Я. Г. Берковичем[22]. Начальные свойства $B$-групп установлены в[23]. Понятно, что любая группа Шмидта является $B$-группой, но не наоборот. Например, диэдральная группа порядка 18 является $B$-группой и не является группой Шмидта.

**Теорема 2.3.1** [7]. *Если некоторая силовская $r$-подгруппа группы $G$ $S_r(G)$-перестановочна со всеми коммутантами 2-нильпотентных $B$-подгрупп четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа $G$ $r$-разрешима.*

**Теорема 2.3.2** [7]. *Если некоторая силовская $r$-подгруппа группы $G$ $S_r(G)$-перестановочна со всеми коммутантами 2-замкнутых $B$-подгрупп четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа $G$ $r$-разрешима.*

**Теорема 2.3.3** [7]. *Если в группе $G$ коммутант каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-замкнутой $B$-подгруппы четного порядка $S(G)$-перестановочен с коммутантом каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-нильпотентной $B$-подгруппы четного порядка, то группа $G$ разрешима.*

Согласно теореме В. П. Буриченко[24] для любой группы $X$ существует группа $G$ и ее абелева нормальная подгруппа $N$ такая, что $G/N \simeq X$ и все подгруппы простых порядков и порядка 4 из $G$ содержатся в подгруппе $N$. Так как в коммутанте каждой подгруппы Шмидта все неединичные элементы имеют простые порядки или порядок 4, то в группе $G$ из теоремы В. П. Буриченко коммутанты всех подгрупп Шмидта содержатся в подгруппе $N$. В частности, в $G$ коммутанты 2-нильпотентных и 2-замкнутых подгрупп Шмидта четного порядка перестановочны. Поэтому в теоремах 2.3.1 – 2.3.3 заменить $B$-подгруппу на подгруппу Шмидта нельзя.

В главе 3 исследуются группы с обобщенно полунормальными некоторыми подгруппами Шмидта.

В разделе 3.1 устанавливается частичная разрешимость групп, в которых некоторые подгруппы Шмидта $S$-полунормальны.

О. Кегель[25] предложил понятие $S$-квазинормальной подгруппы, т. е. подгруппы, которая перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы. Обобщением $S$-квазинормальности и полунормальности является следующее понятие.

**Определение 3.1.1.** Подгруппа $A$ называется $S$-полунормальной (или

[22]Berkovich, Y. G. Groups of Prime Power Order : in 6 vol. / Y. G. Berkovich, Z. Janko. — Walter de Gruyter, 2011. — Vol. 3. — 639 p.

[23]Княгина, В. Н. О произведении $B$-группы и примарной группы / В. Н. Княгина // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — № 3 (32). — С. 52–57.

[24]Буриченко, В. П. О группах, элементы малых порядков которых порождают малую подгруппу / В. П. Буриченко // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 3. — С. 361–367.

[25]Kegel, O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Z. — 1962. — Vol. 78, № 1. — P. 205–221.

$SS$-перестановочной) в группе $G$, если существует подгруппа $B$ такая, что $G = AB$ и $A$ перестановочна с каждой силовской подгруппой из $B$. В этом случае подгруппу $B$ будем называть $S$-добавлением к $A$ в $G$.

В любой группе каждая подгруппа, индекс которой есть степень некоторого простого числа $p$, будет $S$-полунормальной, а силовская $p$-подгруппа группы $G$ будет ее $S$-добавлением. Полунормальная и $S$-квазинормальная подгруппы будут также $S$-полунормальными. В симметрической группе $S_4$ степени 4 подгруппа $S_3$ $S$-полунормальна, но не полунормальна и не $S$-квазинормальна.

**Теорема 3.1.1** [4]. *Если в группе $G$ все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка $S$-полунормальны в $G$, то $G$ разрешима.*

Так как полунормальные подгруппы $S$-полунормальны, то справедливо

**Следствие 3.1.1.** *Если в группе $G$ все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полунормальны в $G$, то $G$ разрешима.*

Следствие 3.1.1. ранее было получено в кандидатской диссертации В. Н. Княгиной[26].

**Теорема 3.1.2** [4]. *Если в группе $G$ все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка $S$-полунормальны, то неабелевы композиционные факторы группы $G$ изоморфны $SL(2,4)$ или $SL(2,8)$. В частности, группа $G$ $\{2,3,5,7\}'$-разрешима.*

**Следствие 3.1.2.** *Если в группе $G$ все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка полунормальны, то неабелевы композиционные факторы группы $G$ изоморфны $SL(2,4)$. В частности, группа $G$ $\{2,3,5\}'$-разрешима.*

**Теорема 3.1.3** [4]. *Если в группе $G$ все $\{2,3\}$-подгруппы Шмидта $S$-полунормальны, то $G$ будет $3$-разрешимой.*

Теорема 3.1.3 обобщает теорему 2 из работы В. Н. Княгиной и В. С. Монахова[8].

Группа Шмидта четного порядка либо сверхразрешима (когда она 2-нильпотентна), либо несверхразрешима (когда она 2-замкнута). Для групп Шмидта нечетного порядка альтернативность не выполняется, например, любая $\{3,5\}$-группа Шмидта (как 3-замкнутая, так и 3-нильпотентная) несверхразрешима.

Поэтому при нечетном $p$ будем $pd$-подгруппы Шмидта разделять на $p$-замкнутые и $p$-нильпотентные.

**Теорема 3.1.4** [4]. *Пусть $p$ — нечетное простое число и в группе $G$*

[26] Княгина, В. Н. Подгруппы Шмидта конечных групп: их существование и перестановочность : дис. ... канд. физ.-матем. наук : 01.01.06 / В. Н. Княгина. — Гомель, 2005. — 73 л.

*все $p$-замкнутые $pd$-подгруппы Шмидта $S$-полунормальны. Если $G$ не $p$-разрешима, то $p = 7$ и не $p$-разрешимый композиционный фактор группы $G$ изоморфен $PSL(2,7)$.*

**Следствие 3.1.4.** *Если $p$ — нечетное простое число и в группе $G$ все $p$-замкнутые $pd$-подгруппы Шмидта полунормальны, то $G$ $p$-разрешима.*

Следствие 3.1.4. дополняет исследование, проведенное в работе В. Н. Княгиной и В. С. Монахова[8].

Разработанная ранее методика исследования групп с $S$-полунормальными подгруппами позволила получить в разделах 3.2 и 3.3 новые признаки разрешимости групп. В разделе 3.2 это демонстрируется для обобщения результатов Д. Томпсона, В. А. Белоногова и В. С. Монахова.

Группа $G$ с нильпотентной максимальной подгруппой $M$, как известно, является разрешимой, если коммутант силовской 2-подгруппы $P$ из $M$ содержится в центре подгруппы $P$ (теорема В. Е. Дескинса, З. Янко, Д. Томпсона). В частности, в 1959 году Д. Томпсон[27] получил разрешимость группы с нильпотентной максимальной подгруппой нечетного порядка. В случае, когда нильпотентная максимальная подгруппа имеет четный порядок, группа может быть неразрешимой.

Нам потребуется следующее

**Определение 3.2.1.** Если подгруппа $A$ либо субнормальна в $G$, либо полунормальна в $G$, то $A$ называется полусубнормальной в группе $G$.

**Теорема 3.2.4** [5]. *Пусть $M$ — максимальная подгруппа группы $G$ и $P$ — силовская 2-подгруппа из $M$. Предположим, что $P' \leq Z(P)$ и $M$ $A_4$-свободна. Если каждая подгруппа Шмидта из $M$ полусубнормальна в $G$, то группа $G$ разрешима.*

Условие «максимальная подгруппа $A_4$-свободна» в теореме 3.2.4 не является лишним. Примером служит группа $G = PSL(2,5)$. В этой группе подгруппа Шмидта $S$, изоморфная группе $A_4$, имеет индекс 5. Поэтому она является максимальной и полунормальной. В подгруппе $S$ силовская 2-подгруппа $P$ абелева, поэтому $P' \leq Z(P)$. Условие «$P' \leq Z(P)$» также не является лишним. Примером служит группа $G = PSL(2,17)$. В этой группе силовская 2-подгруппа $P$, изоморфная диэдральной подгруппе порядка 16, является максимальной и $A_4$-свободной. Но $P' \leq Z(P)$.

Теорема 3.2.4 обобщает теоремы В. Е. Дескинса, З. Янко, Д. Томпсона и В. А. Белоногова[28].

[27]Thompson, J. Finite groups with fixed point-free automorphisms of prime order / J. Thompson // Proc. Nat. Sci., U.S.A. — 1959. — Vol. 45, № 4. — P. 578–581.

[28]Белоногов, В. А. Один признак разрешимости групп четного порядка / В. А. Белоногов // Сиб. матем. журн. — 1966. — Т. 7, № 2. — С. 458–459.

**Теорема 3.2.5** [5]. *Пусть $M$ — максимальная подгруппа нечетного индекса группы $G$ и $P$ — силовская 2-подгруппа из $M$. Предположим, что подгруппа $M$ $A_4$-свободна и каждая подгруппа Шмидта четного порядка из $M$ полусубнормальна в $G$. Если $P' \leq Z(P)$ или $N_G(V) \leq M$ для каждой 2-подгруппы $V$ из $M$, ненормальной в $G$, то $G$ разрешима.*

Теорема 3.2.5 обобщает результат В. С. Монахова[29].

В разделе 3.3 разработанная методика исследования групп с $S$-полунормальными подгруппами применяется к изучению структуры групп, в которых некоторые подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны.

Из результатов работ[30,31] следует сверхразрешимость группы с полунормальными силовскими подгруппами. В работе[32] доказана сверхразрешимость группы, в которой все вторые максимальные подгруппы полунормальны. Признаки сверхразрешимости группы $G$ при условии, что все силовские подгруппы или все максимальные подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полунормальны в группе $G$, получены в[33].

**Теорема 3.3.1** [8]. *Если в группе $G$ существуют две несопряженные максимальные подгруппы $H$ и $K$ и все силовские подгруппы из $H$ и из $K$ полусубнормальны в $G$, то $G$ сверхразрешима.*

Следствием из теоремы 3.3.1 является результат[33].

**Теорема 3.3.2** [8]. *Пусть $H$ и $K$ — несопряженные максимальные подгруппы группы $G$. Если все максимальные подгруппы из $H$ и из $K$ полусубнормальны в $G$, то второй коммутант $(G')'$ нильпотентен.*

В теореме 3.3.2 получить сверхразрешимость группы нельзя. Примером служит знакопеременная группа $G = A_4$ степени 4. Она имеет две максимальные несопряженные подгруппы $A = Z_3$ и $B = Z_2 \times Z_2$. Очевидно, что все максимальные подгруппы из $A$ и $B$ полусубнормальны в $G$, но $G$ несверхразрешима.

Исследования, проведенные в разделе 3.3, обобщают результаты работ В. В. Подгорной[32], В. С. Монахова и А. А. Трофимука[33].

---

[29]Монахов, В. С. О влиянии свойств максимальных подгрупп на строение конечной группы / В. С. Монахов // Матем. заметки. — 1972. — Т. 11, № 2. — С. 183–190.

[30]Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, № 4. — С. 573–581.

[31]Guo, W. Finite groups with seminormal Sylow subgroups / W. Guo // Acta Mathematica Sinica. — 2008. — Vol. 24, № 10. — P. 1751–1758.

[32]Подгорная, В. В. Сверхразрешимость конечной группы с полунормальными вторыми максимальными подгруппами / В. В. Подгорная // Изв. Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. — 2008. — № 2 (47). — С. 154–156.

[33]Monakhov, V. S. Finite groups with two supersoluble subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // J. Group Theory. — 2019. — Vol. 22, № 2. — P. 297–312.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

## Основные научные результаты диссертации

В диссертации исследованы группы с условием перестановочности силовской подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта.

Изучена группа, в которой силовская $r$-подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из добавления к ней. Для $r \leq 5$ перечислены неабелевы композиционные факторы такой группы, для $r \geq 7$ доказана $r$-разрешимость, теорема 2.1.2 [3]. Установлена $r$-разрешимость групп, $r > 2$ и $r$ не является простым числом Ферма, в которых силовская $r$-подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта четного порядка из добавления к этой силовской подгруппе, теоремы 2.1.3 и 2.1.4 [2]. Указаны неабелевы композиционные факторы группы, в которой силовская подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка из группы, теорема 2.2.1 [6]. Полученные результаты развивают исследования, проведенные Я. Г. Берковичем и Э. М. Пальчиком (1967), В. Н. Князиной и В. С. Монаховым (2010).

Доказана разрешимость группы, в которой все сверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка $S$-полунормальны в группе, теорема 3.1.1 [4]. Перечислены неабелевы композиционные факторы группы, в которой все несверхразрешимые подгруппы Шмидта четного порядка $S$-полунормальны в группе, теорема 3.1.2 [4]. Получены признаки частичной разрешимости группы, в которой некоторые подгруппы Шмидта $S$-полунормальны в группе, теорема 3.1.3 [4]. Частные случаи этих результатов дополняют теоремы В. Н. Князиной и В. С. Монахова (2007).

Получены признаки $r$-разрешимости групп, в которых силовская $r$-подгруппа перестановочна с коммутантами 2-замкнутых или 2-нильпотентных $B$-подгрупп четного порядка, теоремы 2.3.1 и 2.3.2 [7]. Установлена разрешимость группы, в которой коммутант 2-замкнутой $B$-подгруппы четного порядка перестановочен с коммутантом 2-нильпотентной $B$-подгруппы четного порядка, теорема 2.3.3 [7].

Найдены признаки разрешимости групп с полусубнормальными подгруппами Шмидта четного порядка из некоторой максимальной подгруппы, теоремы 3.2.4 и 3.2.5 [5]. Эти признаки обобщают теоремы В. Дескинса, З. Янко, Д. Томпсона, В. А. Белоногова (1966) и В. С. Монахова (1972).

Установлена сверхразрешимость группы при условии, что силовские подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе, теорема 3.3.1 [8], а также нильпотентность второго коммутанта группы, если все максимальные подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе, теорема 3.3.1 [8]. Данные результаты обобщают соответствующие теоремы В. В. Подгорной (2008), В. С. Монахова и А. А. Трофимука (2019).

Указано строение групп с подгруппами Шмидта ранга 4, теорема 1.2.5 [1].

**Рекомендации по практическому использованию результатов**

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в современной теории конечных групп и их классов при исследовании групп с условием перестановочности некоторых их подгрупп. Материалы диссертации будут также полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, при подготовке курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций. Отдельные положения диссертации внедрены в учебный процесс учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины» при чтении спецкурсов «Теория групп» и «Элементы современной и прикладной алгебры» для студентов математических специальностей, при подготовке курсовых и дипломных работ (акты внедрения от 03.09.2018, 21.01.2019).

# СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

## Статьи

1. Зубей, Е. В. О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 4 / Е. В. Зубей // Проблемы физики, математики и техники. — 2017. — № 3 (32). — С. 48–51.

2. Монахов, В. С. О перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта из некоторого ее добавления / В. С. Монахов, Е. В. Зубей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2018. — Т. 24, № 3. — С. 145–154.

3. Монахов, В. С. О композиционных факторах конечной группы с $OS$-полунормальной силовской подгруппой / В. С. Монахов, Е. В. Зубей // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 88–94.

4. Монахов, В. С. О разрешимости конечной группы с $S$-полунормальными подгруппами Шмидта / В. С. Монахов, В. Н. Княгина, Е. В. Зубей // Укр. матем. журн. — 2018. — Т. 70, № 11. — С. 1511–1518. Английская версия: Monakhov, V. S. On the solvablity of a finite group with $S$-seminormal Schmidt subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Knyagina, E. V. Zubei // Ukrainian Mathematical Journal. — 2018. — Vol. 70, № 11. — P. 1741–1749.

5. Зубей, Е. В. О разрешимости конечной группы с полунормальными или субнормальными подгруппами Шмидта некоторой ее максимальной подгруппы / Е. В. Зубей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25, № 1. — С. 55–61.

6. Трофимук, А. А. О перестановочности силовской подгруппы с подгруппами Шмидта нечетного порядка / А. А. Трофимук, Е. В. Зубей // Проблемы физики, математики и техники. — 2019. — № 1 (38). — С. 69–71.

7. Зубей, Е. В. О перестановочности силовских подгрупп с коммутантами $B$-подгрупп / Е. В. Зубей // Журн. Бел. гос. ун-та. Математика. Информатика. — 2019. — № 1. — С. 12–17.

8. Monakhov, V. S. Finite groups with restrictions on two maximal subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk, E. V. Zubei // Проблемы физики, математики и техники. — 2019. — № 3 (40). — С. 88–92.

## Материалы конференций

9. Зубей, Е. В. О рангах групп Шмидта малых порядков [Электронный ресурс] / Е. В. Зубей, В. С. Монахов // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XX Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 20–22 марта 2017 г. : в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины ; редкол.: О. М. Де-

миденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2017. — Ч. 1. — С. 44–45. — 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

10. Зубей, Е. В. О классе конечных групп с подгруппами Шмидта ранга 4 / Е. В. Зубей // Актуальные проблемы прикладной математики и физики : материалы Междунар. науч. конф., Нальчик – Терскол, 17–21 мая 2017 г. — Нальчик, 2017. — С. 91–92.

11. Зубей, Е. В. О конечных группах с полунормальными минимальными несверхразрешимыми подгруппами / Е. В. Зубей // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XXI Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 19–21 марта 2018 г.: / ГГУ им. Ф. Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2018. — С. 38–39.

12. Зубей, Е. В. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / Е. В. Зубей // Формирование готовности будущего учителя математики к работе с одаренными учащимися : сб. материалов междунар. науч.-практ. конф., Брест, 10–11 апр. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; редкол.: Н. А. Каллаур [и др.] , под общ. ред. Е. П. Гринько. — Брест, 2018. — С. 223–224.

13. Зубей, Е. В. О конечных группах с $S$-полунормальными подгруппами Шмидта четного порядка / Е. В. Зубей // Теория групп и ее приложения : материалы XII школы-конференции по теории групп, посвящ. 65-летию А. А. Махнева, Геленджик, 13–20 мая 2018 г. / Кубанский гос. ун-т ; отв. ред. А. С. Кондратьев. — Краснодар, 2018. — С. 66–67.

14. Зубей, Е. В. Композиционные факторы конечной группы с $OS$-полунормальной силовской подгруппой / Е. В. Зубей // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов V Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 19 окт. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. А. Козинского. — Брест, 2018. — С. 81.

15. Трофимук, А. А. Композиционные факторы группы, в которой силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта / А. А. Трофимук, Е. В. Зубей // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XXII Респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 25–27 марта 2019 г. / ГГУ им. Ф. Скорины ; редкол.: С. П. Жогаль (гл. ред.) [и др.]. — Гомель, 2019. — С. 55–56.

16. Зубей, Е. В. О разрешимости конечной группы с ограничениями на подгруппы Шмидта из максимальной подгруппы / Е. В. Зубей // Алгебра и математическая логика: теория и приложения : материалы конф., Казань, 24–28 июня 2019 г. / Казанский (Приволжский) федеральный

ун-т. — Казань, 2019. — С. 113–114.

**Тезисы докладов**

17. Зубей, Е. В. О разрешимости группы с $S$-полунормальными подгруппами Шмидта / Е. В. Зубей // Международная алгебраическая конференция, посвящ. 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша : тез. докл., Москва, 23–25 мая 2018 г. / МГУ. — Москва, 2018. — С. 88.

18. Зубей, Е. В. О перестановочности силовской подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта четного порядка / Е. В. Зубей // Мальцевские чтения : тез. докл. Междунар. конф., Новосибирск, 19–22 нояб. 2018 г. / Ин-т математики им. С. Л. Соболева, НГУ. — Новосибирск, 2018. — С. 95.

19. Зубей, Е. В. О конечной группе, в которой силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка / Е. В. Зубей // Международная конференция, посвящ. 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ : тез. докл., Москва, 28–31 мая 2019 г. / МГУ. — Москва, 2019. — С. 29–30.

20. Зубей, Е. В. О разрешимости группы с перестановочными коммутантами $B$-подгрупп / Е. В. Зубей // Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем : тез. Междунар. конф., посвященной 70-летию А. Х. Журтова, Нальчик, 29 июня – 3 июля 2019 г. / КБГУ им. Х. М. Бербекова, Ин-т прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Ин-т математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН. — Нальчик, 2019. — С. 46.

# РЭЗЮМЭ

Зубей Кацярына Уладзіміраўна

## Канечныя групы з умовай перастаўляльнасці сілаўскай падгрупы з некаторымі падгрупамі Шміта

**Ключавыя словы:** канечная група, група Шміта, сілаўская падгрупа, вырашальная група, паўнармальная падгрупа, субнармальная падгрупа, $B$-група, максімальная падгрупа.

**Мэта працы:** даследаванне будовы канечных груп, у якіх некаторая сілаўская падгрупа перастаўляльна з некаторымі падгрупамі Шміта.

**Метады даследавання:** метады абстрактнай тэорыі груп и метады тэорыі лікаў, метады класаў груп, у прыватнасці, метады тэорыі фармацый.

**Атрыманыя вынікі і іх навізна.** Пералічаны кампазіцыйныя фактары і ўстаноўлены прыкметы частковай вырашальнасці груп, у якіх некаторая сілаўская падгрупа перастаўляльна з некаторымі падгрупамі Шміта цотнага парадку або з падгрупамі Шміта няцотнага парадку. Атрыманы прыкметы частковай вырашальнасці груп, у якіх сілаўская падгрупа перастаўляльна з камутантамі некаторых $B$-падгруп цотнага парадку. Устаноўлена вырашальнасць груп з умовай перастаўляльнасці камутантаў $B$-падгруп цотнага парадку. Атрыманы прыкметы вырашальнасці груп, у якіх падгрупы Шміта цотнага парадку з максімальнай падгрупы паўсубнармальны ў групе. Устаноўлена звышвырашальнасць групы пры ўмове, што сілаўскія падгрупы з двух неспалучаных максімальных падгруп паўсубнармальны ў групе, а таксама даказана нільпатэнтнасць другога камутанта групы, калі ўсе максімальныя падгрупы з двух неспалучаных максімальных падгруп паўсубнармальны ў групе.

**Рэкамендацыі па выкарыстанні.** Атрыманыя вынікі носяць тэарэтычны характар. Яны могуць быць выкарыстаны ў сучаснай тэорыі канечных груп і іх класаў пры даследаванні груп з умовай перастаўляльнасці некаторых іх падгруп. Матэрыялы дысертацыі будуць таксама карысныя пры чытанні спецкурсаў па тэорыі груп для студэнтаў матэматычных спецыяльнасцяў, пры падрыхтоўцы курсавых і дыпломных прац, магістарскіх і кандыдацкіх дысертацый.

**Галіна прымянення:** сучасная тэорыя груп і тэорыя фармацый.

# РЕЗЮМЕ

Зубей Екатерина Владимировна

**Конечные группы с условием перестановочности силовской подгруппы с некоторыми подгруппами Шмидта**


**Ключевые слова:** конечная группа, группа Шмидта, силовская подгруппа, разрешимая группа, полунормальная подгруппа, субнормальная подгруппа, $B$-группа, максимальная подгруппа.

**Цель работы:** исследование строения конечных групп, в которых некоторая силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта.

**Методы исследования:** методы абстрактной теории групп и методы теории чисел, методы классов групп, в частности, методы теории формаций.

**Полученные результаты и их новизна.** Перечислены композиционные факторы и установлены признаки частичной разрешимости групп, в которых некоторая силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта четного порядка или с подгруппами Шмидта нечетного порядка. Получены признаки частичной разрешимости групп, в которых силовская подгруппа перестановочна с коммутантами некоторых $B$-подгрупп четного порядка. Установлена разрешимость групп с условием перестановочности коммутантов $B$-подгрупп четного порядка. Получены признаки разрешимости групп, в которых подгруппы Шмидта четного порядка из максимальной подгруппы полусубнормальны в группе. Установлена сверхразрешимость группы при условии, что силовские подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе, а также доказана нильпотентность второго коммутанта группы, если все максимальные подгруппы из двух несопряженных максимальных подгрупп полусубнормальны в группе.

**Рекомендации по использованию.** Полученные результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы в современной теории конечных групп и их классов при исследовании групп с условием перестановочности некоторых их подгрупп. Материалы диссертации будут также полезны при чтении спецкурсов по теории групп для студентов математических специальностей, при подготовке курсовых и дипломных работ, магистерских и кандидатских диссертаций.

**Область применения:** современная теория групп и теория формаций.

## SUMMARY

Zubei Ekaterina Vladimirovna

**Finite groups with permutability condition for Sylow subgroup with some Schmidt subgroups**

**Keywords:** finite group, Schmidt subgroup, Sylow subgroup, soluble group, seminormal subgroup, subnormal subgroup, $B$-group, maximal subgroup.

**Research aim:** the investigation of structure of a finite group in which certain Sylow subgroup permutes with some Schmidt subgroups.

**Research methods:** methods of the abstract group theory and methods of the number theory, methods of the class theory, in particular, methods of the formation theory.

**Obtained results and their novelty.** For a groups in which a certain Sylow subgroup permutes with some Schmidt subgroups of even order or with Schmidt subgroups of odd order the compositional factors are listed and the sufficient conditions for partial solubility are established. The sufficient conditions for partial solubility of a groups in which a Sylow subgroup permutes with the derived subgroups of some $B$-subgroups of even order are obtained. The solubility of a groups with permutability condition for the derived subgroups of $B$-subgroups of even order is established. We obtain the sufficient conditions for solubility of a groups in which even order Schmidt subgroups of a maximal subgroup are semisubnormal. We discover the supersolubility of a group in which Sylow subgroups of two non-conjugate maximal subgroups are semisubnormal and prove the nilpotency of the second derived subgroup of a group in which all maximal subgroups of two non-conjugate maximal subgroups are semisubnormal.

**Recommendations for use.** The obtained results are theoretical. They can be used in the modern theory of finite groups and their classes in investigations of groups with permutability conditions for some subgroups. The dissertation materials are also useful in reading special courses on the group theory for students of mathematical specialities, preparing of terms and diploma papers, master of philosophy and doctor of philosophy dissertations.

**Their novelty:** the modern group theory and the formation theory.

Научное издание

**Зубей** Екатерина Владимировна

# КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С УСЛОВИЕМ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ С НЕКОТОРЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 23.10.2019. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,16.
Уч.-изд. л. 1,27. Тираж 60 экз. Заказ 658.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 3/1452 от 17.04.2017.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330/450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель