Краткие сообщения

УДК 515.124.62

З.Н. СИЛАЕВА

ЭКСТЕНЗОРНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ ОТОБРАЖЕНИЙ

We prove that function spaces with filtration belong to the class of filtered absolute extensors.

Изучение экстензорных свойств профильтрованных функциональных пространств относится к теории экстензоров метрических пространств с фильтрациями, основы которой изложены в [1–6]. Одной из основных задач этой теории является нахождение профильтрованных пространств, которые обладают свойством продолжимости непрерывных отображений, сохраняющих фильтрации (так называемых профильтрованных абсолютных экстензоров, или $\mathcal{N}$-АЕ-пространств). Установлено, что к этому классу принадлежат линейные нормированные профильтрованные пространства [3], пространства, порожденные некоторыми функторами [6] и др. Не изученным в отношении принадлежности классу $\mathcal{N}$-АЕ-пространств оставался до сих пор класс функциональных профильтрованных пространств. Для тривиальных фильтраций этот вопрос положительно решен в [7]. Однако в общем профильтрованном случае он до сих пор оставался открытым, хотя и представлял значительный интерес. Сложности возникали уже при самом определении функционального профильтрованного пространства.

Мы определяем функциональное профильтрованное пространство следующим образом. Пусть Z и Y – профильтрованные метрические пространства. Рассмотрим пространство $C(Z,Y)$ всех непрерывных отображений $\varphi: Z \to Y$ с метрикой равномерной сходимости и его подпространства $C_k(Z,Y) = \{\psi \in C(Z,Y) \mid \ \deg \psi(z) \le \deg z + k,\, z \in Z\}$, где $k \in \mathbf{N}$. Оказалось, что эти подпространства можно рассматривать в качестве элементов фильтрации пространства $C_\infty(Z,Y) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k(Z,Y)$. Более того, справедлива

Теорема 1. *Если Y является $\mathcal{N}$-*АЕ*-пространством, то профильтрованное пространство отображений $C_\infty(Z,Y)$ является $\mathcal{N}$-*АЕ*-пространством.*

Доказательство теоремы 1 составляет основную цель настоящей статьи и излагается в последней ее части.

Основные понятия и факты

Пространством с фильтрацией (профильтрованным пространством, или *$\mathcal{N}$-пространством)* назовем топологическое пространство X, в котором выделена последовательность замкнутых подмножеств $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ *(фильтрация)* такая, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$. Непрерывное *отображение* $f: X \to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств X и Y будем называть *профильтрованным,* или *$\mathcal{N}$-отображением*, если $f(X_i) \subseteq Y_i$ для любого $i \in \mathbf{N}$ (*f сохраняет фильтрацию* пространства X). Поскольку композиция двух $\mathcal{N}$-отображений снова является $\mathcal{N}$-отображением, то профильтрованные пространства образуют категорию, в которой в качестве морфизмов выступают $\mathcal{N}$-отображения. Далее мы будем рассматривать категорию метрических профильтрованных пространств. Гомеоморфизм $f: X \to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств X и Y называется *профильтрованным гомеоморфизмом* (*$\mathcal{N}$-гомеоморфизмом*), если f и f^{-1} суть $\mathcal{N}$-отображения.

Если X – метрическое пространство с фильтрацией $\{X_i\}_{i\in\mathbf{N}}$, то его подпространство A с фильтрацией, образованной множествами $A_i = A\cap X_i$ для $i\in\mathbf{N}$, будем называть *$\mathcal{N}$-подпространством* $\mathcal{N}$-пространства X.

Пусть L – линейное топологическое пространство, одновременно являющееся профильтрованным пространством $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} L_i$. Если каждое L_i есть линейное подпространство L, то будем называть L *линейным топологическим $\mathcal{N}$-пространством*.

Степенью точки $x\in X$ назовем число, определяемое по формуле $\deg x = \min\{i\in\mathbf{N} \mid x\in X_i\}$. Ясно, что непрерывное отображение $f: X\to Y$ двух $\mathcal{N}$-пространств является $\mathcal{N}$-отображением тогда и только тогда, когда $\deg f(x)\le \deg x$ для любой точки $x\in X$.

Рассмотрим понятия, связанные с продолжением $\mathcal{N}$-отображений. Профильтрованное отображение $f: A\to Y$, заданное на замкнутом $\mathcal{N}$-подпространстве A $\mathcal{N}$-пространства X, называется *частичным $\mathcal{N}$-отображением*. Если для f существует такое $\mathcal{N}$-отображение $\bar{f}: X\to Y$, что $\bar{f}|_A = f$, будем говорить, что *$\mathcal{N}$-отображение f допускает $\mathcal{N}$-продолжение* на X, а $\mathcal{N}$-отображение $\bar{f}$ будем называть *$\mathcal{N}$-продолжением f*. Будем говорить, что $\mathcal{N}$-пространство Y является *абсолютным (окрестностным) $\mathcal{N}$-экстензором* или *принадлежит классу* $\mathcal{N}$-A(N)E, если для любого $\mathcal{N}$-пространства X и любого его замкнутого $\mathcal{N}$-подпространства A любое частичное $\mathcal{N}$-отображение $f: A\to Y$ допускает $\mathcal{N}$-продолжение $\bar{f}: X\to Y$ (допускает $\mathcal{N}$-продолжение $\bar{f}: U\to Y$ на некоторую окрестность U множества A в X). Известно, что образ $\mathcal{N}$-AE-пространства при $\mathcal{N}$-ретракции также является $\mathcal{N}$-AE-пространством.

В [3] были получены следующие важные результаты, на которые мы будем опираться в дальнейшем.

Теорема 2. *Пусть Y – профильтрованное локально выпуклое линейное топологическое пространство. Тогда $Y\in\mathcal{N}$-*AE.

Теорема 3. *Для любого метрического профильтрованного пространства X существует линейное нормированное профильтрованное пространство Z и профильтрованный гомеоморфизм $h: X\to Y$ пространства X на некоторое замкнутое профильтрованное подмножество Y в Z, являющийся изометрией.*

Профильтрованное пространство отображений

Докажем, что семейство пространств $\{C_k(Z,Y)\}_{k\in\mathbf{N}}$, определенных в начале статьи, действительно можно рассматривать в качестве фильтрации функционального пространства $C_\infty(Z,Y)$.

Лемма. *Для любого $k\in\mathbf{N}$ пространство $C_k(Z,Y)$ замкнуто в $C_\infty(Z,Y)$.*

Доказательство. Покажем, что для любого отображения $\varphi\in C_\infty(Z,Y)\setminus C_k(Z,Y)$ существует такое число $\delta>0$, что для любого $\psi\in C_k(Z,Y)$ выполняется условие $\mathrm{dist}(\varphi,\psi)>\delta$. Условие $\varphi\in C_\infty(Z,Y)\setminus C_k(Z,Y)$ означает, что существует точка $z_0\in Z$, для которой $\deg\varphi(z_0) > \deg z_0 + k$, откуда следует $\varphi(z_0)\notin Y_{\deg z_0 + k}$. Поскольку множество $Y_{\deg z_0+k}$ замкнуто в Y, то расстояние $\rho(\varphi(z_0), Y_{\deg z_0+k}) = \delta > 0$. Условие $\psi\in C_k(Z,Y)$ означает, что $\deg\psi(z)\le \deg z + k$ для любого $z\in Z$ (в частности, для z_0), откуда следует, что $\psi(z_0)\in Y_{\deg z_0+k}$. Очевидно, $\rho(\varphi(z_0),\psi(z_0))\ge\delta$. Тогда расстояние $\mathrm{dist}(\varphi,\psi) = \sup\{\rho(\varphi(z),\psi(z)) \mid z\in Z\} > \rho(\varphi(z_0),\psi(z_0))$, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $\mathrm{diam}\, Y<\infty$. Согласно теореме 3 для метрического $\mathcal{N}$-пространства Y существует линейное нормированное $\mathcal{N}$-пространство L и $\mathcal{N}$-гомеоморфизм h на некоторое замкнутое $\mathcal{N}$-подмножество $h(Y)$ в L. Так как пространство Y ограничено, а отображение h является изометрией, то можно считать, что $h(Y)$ лежит в некотором шаре Q пространства L.

Рассмотрим линейное пространство $C^*(Z,L)$ всех непрерывных ограниченных отображений $\varphi: Z\to L$ с нормой $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(z)| \mid z\in Z\}$. Для любого $k\in\mathbf{N}$ множество $C_k^*(Z,L)$ всех непрерывных ограниченных отображений $\psi : Z \to L$, удовлетворяющих условию $\deg \psi(z) \le \deg z + k$, $z \in Z$, образует линейное подпространство пространства $C^*(Z, L)$. Действительно, пусть φ, ψ – любые элементы из $C_k^*(Z, L)$, а λ_1, λ_2 – любые действительные числа. Для любого $z \in Z$ $\deg(\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi)(z) = \deg(\lambda_1\varphi(z) + \lambda_2\psi(z)) \le \max\{\deg \varphi(z), \deg \psi(z)\} \le \deg z + k$ (предпоследнее неравенство справедливо, так как $\varphi(z), \psi(z)$ принадлежат линейному $\mathcal{N}$-пространству L, все элементы фильтрации которого являются линейными пространствами). Поэтому линейная комбинация $\lambda_1\varphi + \lambda_2\psi \in C_k^*(Z, L)$, что и требовалось доказать. Итак, $C_\infty^*(Z, L) = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^*(Z, L)$ есть линейное нормированное $\mathcal{N}$-пространство.

Так как по условию $Y \in \mathcal{N}$-AE, то существует $\mathcal{N}$-ретракция $r : L \to Y$. Ретракция $R : C_\infty^*(Z, L) \to C_\infty(Z, Y)$, сопоставляющая каждому отображению $\varphi : Z \to Q$ отображение $r \circ \varphi : Z \to Y$, сохраняет фильтрацию: если $\varphi \in C_k^*(Z, L)$, то $\deg \varphi(z) \le \deg z + k$ для любого $z \in Z$; но r есть $\mathcal{N}$-ретракция, поэтому $\deg r(\varphi(z)) \le \deg \varphi(z)$, откуда получаем, что $r \circ \varphi \in C_k(Z, Y)$.

Поскольку $C_\infty^*(Z, L)$ – линейное нормированное $\mathcal{N}$-пространство, то по теореме 2 $C_\infty^*(Z, L) \in \mathcal{N}$-AE. Тогда $C_\infty(Z, Y) \in \mathcal{N}$-AE как образ $\mathcal{N}$-AE-пространства при $\mathcal{N}$-ретракции R.

1. Ageev S., Jimenez R., Rubin L.R. // Topology and its Applications. 2004. Vol. 140. P. 5.
2. Силаева З.Н. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 3. С. 89.
3. Силаева З.Н. // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009. № 2. С. 76.
4. Силаева З.Н. // Matematychni Studii. 2009. Т. 31. № 2. С. 180.
5. Силаева З.Н. // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 1. С. 162.
6. Агеев С.М., Силаева З.Н. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 58.
7. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971.

Поступила в редакцию 12.11.10.

Зоя Николаевна Силаева – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры алгебры и геометрии БрГУ им. А.С. Пушкина.