

ВЕСЦІ

НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2010 № 1

ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2010 № 1

ЗАСНАВАЛЬНИК — НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1965 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

ЗМЕСТ

МАТЭМАТЫКА

Егоров А. Д. О составной формуле для математического ожидания функционалов от решения уравнения Ито	4
Деменчук А. К. Необходимое условие существования нерегулярных колебаний линейной системы с нулевым усреднением матрицы коэффициентов	9
Минченко Л. И., Стаховский С. М. Новые условия регулярности в задачах математического программирования	14
Васьковский М. М. Теорема о зависимости β -мартингальных решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа от начальных условий и правых частей	19
Давьялова Е. В. Задача Маркушевича с тремя произвольно расположенными точками разрыва	27
Гринько А. П. Асимптотические разложения локальных дробных интегралов	34
Мардвилко Т. С. Неравенство для квазинорм рациональной функции относительно линейной и плоской мер и его приложения	41
Рыкова О. В. О количестве целочисленных многочленов с заданным порядком дискриминантов	49
Тихоненко Т. В. Факторизации конечных групп сверхразрешимыми и холловыми подгруппами	53
Агеев С. М., Силаева З. Н. Об одном обобщении проблемы Борсука	58
Кузьменков Д. С. Оптимальное наблюдение за системой параболического типа	63

ФІЗІКА

Бабич А. А., Карпенко Н. В., Панков А. А., Цитринов А. В. Идентификация новых тяжелых Z' -бозонов в процессах e^+e^- -аннигиляции с продольно поляризованными пучками	71
---	----

Тарасенко А. Н., Горбачевич А. К. Метод функции Грина для расчета гравитационного излучения от радиально движущегося источника в метрике Шварцшильда.....	80
Грбчикова С. С., Потужная О. И., Шелег М. У. Влияние режимов импульсного и реверсированного электролиза на фазовый и химический состав пленок сплавов Со–Р и Со–Ni–Р.....	86
Анисимова А. Е., Кулак Г. В. Акустооптическое взаимодействие в плоскопараллельном слое	94
Есман А. К., Кулешов В. К., Зыков Г. Л. Буферизация оптических сигналов в наносекундном диапазоне	99

ІНФАРМАТЫКА

Бенедиктович В. И. Непересекающееся остовное дерево геометрического дополнения остовного дерева....	103
Войткова М. В., Войтович А. П. Идентификация предсердных аритмий при вейвлет-анализе электрокардиограммы.....	110

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

Гончаренко А. М. Распространение оптических солитонов в поглощающем селфоксе.....	119
--	-----

ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

Николай Алексеевич Изобов (К 70-летию со дня рождения)	122
--	-----

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2010, № 1

Серия физико-математических наук
на русском и белорусском языках

Рэдактар І. С. А л е к с а н д р о в і ч
Комп'ютэрная вёрстка В. Л. С м о л ь с к а я

Здадзена ў набор 09.02.2010. Падпісана да друку 10.03.2010. Выхад у свет 17.03.2010. Фармат 60 × 84¹/₈. Папера афсетная. Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 113 экз. Заказ 123.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 17 780 руб., ведамасная падпіска – 44 110 руб.

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». ЛІВ № 02330/0494405 ад 27.03.2009. Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, Мінск. Пасведчанне № 392 ад 18.05.2009.

Надрукавана ў РУП «Выдавецкі дом «Беларуская навука».

© «Выдавецкі дом «Беларуская навука»
Весці НАН Беларусі, серыя фізіка-матэматычных навук, 2010

PROCEEDINGS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES 2010 No 1

FOUNDED BY THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1965

Issued four times a year

CONTENTS

MATHEMATICS

Egorov A. D. Composite formula for mathematical expectation of functionals of solution of Ito's equation	4
Demenchuk A. K. Necessary condition for existence of irregular oscillations of linear systems with trivial average coefficient matrix	9
Minchenko L. I., Stakhovsky S. M. New regularity conditions in mathematical programming problems	14
Vas'kovskii M. M. Theorem on the dependence of β -martingale solutions of stochastic parabolic evolution equations on the initial conditions and the right-hand sides	19
Davyalova E. V. Markushevich's problem with three discontinuity points	27
Grin'ko A. P. Asymptotic expansions of local fractional integrals	34
Mardvilko T. S. Inequality for the quasi-norm rational function with respect to linear and planar measures and its applications	41
Rykova V. V. Number of integer polynomials with a given order of discriminants	49
Tihonenko T. V. Factorization of finite groups with supersoluble and Hall subgroups	53
Ageev S. M., Silayeva Z. N. Generalization of Borsuk's problem	58
Kuzmenkov D. S. Optimal observation of parabolic system	63

PHYSICS

Babich A. A., Karpenko N. V., Pankov A. A., Tsytrinov A. V. Identifying new heavy Z' -bosons in e^+e^- annihilation processes with longitudinal polarized beams	71
Tarasenko A. N., Gorbatsievich A. K. Green's function approach to the calculation of the gravitational radiation of a particle radially moving in the Schwarzschild space-time	80
Grabchikov S. S., Potuzhnaya O. I., Sheleh M. U. Influence of pulse and reverse electrolysis modes on the phase and chemical composition of Co-P and Co-Ni-P alloys	86
Anisimova A. E., Kulak G. V. Acoustooptical interaction in the plane-parallel slab	94
Esman A. K., Kuleshov V. K., Zykov G. L. Buffering of the optical signals in the nanosecond range	99

INFORMATICS

Benediktovitch V. I. Non-crossing spanning tree in the geometric complement of the spanning tree	103
Voitikova M. V., Voitovich A. P. Atrial arrhythmia identification by means of the wavelet analysis of an electrocardiogram	110

SHORT NOTES

Goncharenko A. M. Propagation of optical solitons in absorbing selfoc	119
--	-----

SCIENTISTS OF BELARUS

Nikolai Alekseevich Izobov (To the 70 th Anniversary of the Birthday)	122
--	-----

МАТЭМАТЫКА

УДК 517.987.4 + 519.216

А. Д. ЕГОРОВ

**О СОСТАВНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ
ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ИТО**

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 15.04.2009)

Вычисление математических ожиданий функционалов от решений стохастических уравнений является актуальной проблемой во многих прикладных задачах, в частности, в финансовой математике [1, 2]. Речь идет о вычислении математического ожидания $E[f(X_{(\cdot)})]$, где f – нелинейный функционал от траектории решения $X_{(\cdot)}$ некоторого стохастического уравнения. Построению приближенных формул для вычисления такого рода математических ожиданий функций от решений стохастических уравнений, т. е. $E[g(X_t)]$, где g – функция (а не функционал), посвящено большое число работ (см. [3–5]). Ряд результатов в этом направлении получен в [6–8]. В этих работах строились формулы, аппроксимационно точные для функциональных многочленов от решений уравнений, и основанные на них составные формулы, в которых использовалась аппроксимация решения уравнения, получаемая методом последовательных приближений. В данной работе на примере линейного уравнения, имеющего явное решение, мы показываем, что построение аналогичных составных формул, основанных на использовании итерационных методов решения стохастических уравнений, в частности, схемы Эйлера, требует замены условия аппроксимационной точности формул для класса функциональных многочленов на их точность для некоторого специального класса функционалов.

Рассмотрим линейное уравнение

$$X_t = 1 + \lambda \int_0^t X_s dW_s, \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

где W_s – винеровский процесс. Точное решение этого уравнения имеет вид

$$X_t = \exp \left\{ \lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t \right\}. \quad (2)$$

Имеет место также формула для смешанных моментов произвольного порядка

$$E \left[\prod_{k=1}^M X_{t_k} \right] = \exp \left\{ \lambda^2 \sum_{k=2}^M \sum_{j=1}^{k-1} \min(t_k, t_j) \right\}. \quad (3)$$

Для получения формул, аппроксимационно точных для функциональных многочленов, в соответствии с [6–8] рассматривается уравнение

$$Z_t = 1 + \lambda \int_0^t Z_s d\Theta_s, \quad t \in [0, 1], \quad (4)$$

где $\theta_t \equiv \theta_t(u) = \sum_{k=1}^N c_k \rho_t(u_k)$, $\rho_t(u_k) = 1_{[0,t]}(|u_k|) \text{sign}(u_k)$; $u_k \in U = [-1,1]$. Далее будет использоваться обозначение $E[g]$ для интеграла по нормированной мере Лебега на $U \times \dots \times U$. Решение уравнения (4) находится в явном виде с помощью итерации (см.[5]) и имеет вид

$$Z_t^N = 1 + \sum_{m=1}^N \lambda^m \left\{ \sum_{k_1, \dots, k_m=1}^N \prod_{l=1}^{m-1} [c_{k_l} \rho_{|u_{k_{l+1}}|} (u_{k_l})] c_{k_m} \rho_t(u_{k_m}) \right\}. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что члены с различными индексами в суммировании по m в (5) ортогональны, так что мы можем вычислить

$$E[Z_t Z_s] = 1 + \sum_{m=1}^N \lambda^{2m} \sum_{k_1, \dots, k_m=1}^m \sum_{r_1, \dots, r_m=1}^m E \left[\prod_{l=1}^{m-1} (c_{k_l} \rho_{|u_{k_{l+1}}|} (u_{k_l})) c_{k_m} \rho_t(u_{k_m}) \times \prod_{q=1}^{m-1} (c_{r_q} \rho_{|u_{r_{q+1}}|} (u_{r_q})) c_{r_m} \rho_s(u_{r_m}) \right]. \quad (6)$$

Заметим, что только при $u_{k_1} < u_{k_2} < \dots < u_{k_m}$ и $u_{k_l} = u_{r_l}$ мы имеем отличные от нуля члены в правой части равенства (6). Эти члены, в свою очередь, равны

$$\sum_{k_1, \dots, k_m=1}^N E \left[\prod_{l=1}^{m-1} (c_{k_l}^2 1_{[0,|u_{k_{l+1}}|]} (u_{k_l})) c_{k_m}^2 1_{[0,t]}(|u_{k_m}|) 1_{[0,s]}(|u_{k_m}|) \right] = \frac{1}{m!} (\min(t, s))^m,$$

где мы использовали тот факт, что $\sum_{k_l=1}^N c_{k_l}^2 = 1$. Таким образом, имеем

$$E[Z_t Z_s] = 1 + \sum_{m=1}^N \frac{\lambda^{2m}}{m!} (\min(t, s))^m. \quad (7)$$

Далее рассмотрим итерационную схему Эйлера для уравнения (1):

$$Y_{n+1} = Y_n (1 + \lambda (W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n})), \quad Y_0 = 1, \quad Y_n = Y_{\tau_n}, \\ n = 0, 1, \dots, P-1; \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_P = 1; \quad Y_t = Y_{n_t}, \quad n_t = \max\{0, 1, 2, \dots, P : \tau_n < t\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$Y_t = \prod_{k=0}^{n_t} (1 + \lambda (W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})). \quad (8)$$

Так как $W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k}$ и $W_{\tau_{j+1}} - W_{\tau_j}$ независимы для $k \neq j$ и $E[W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k}] = 0$, то мы имеем:

$$E \left[\prod_{k=0}^{n_t} (1 + \lambda (W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})) \right] = 1, \quad (9)$$

$$E[Y_t Y_s] = E \left[\left(\prod_{k=0}^M (1 + \lambda (W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})) \right)^2 \right], \quad (10)$$

где $M = \min(n_t, n_s)$. Можно вычислить (10) дифференцированием $2M$ раз по параметрам следующего функционала:

$$E \left[\exp \left\{ \sum_{k=0}^M \nu_k (1 + \lambda (W_{\tau_{k+1}} - W_{\tau_k})) + \sum_{j=0}^M \mu_j (1 + \lambda (W_{\tau_{j+1}} - W_{\tau_j})) \right\} \right] = \\ \exp \left\{ \sum_{k=0}^{n_t} \left[(\nu_k + \mu_k) + \frac{\lambda^2 \Delta_k}{2} (\nu_k + \mu_k)^2 \right] \right\}. \quad (11)$$

В результате получим

$$E[Y_t Y_s] = \left(\prod_{k=0}^M \frac{\partial^2}{\partial v_k \partial \mu_k} \right) \left[\prod_{k=0}^M \exp \left\{ (v_k + \mu_k) + \frac{\lambda^2 \Delta_k}{2} (v_k + \mu_k)^2 \right\} \right]_{v_k, \mu_k=0} = \prod_{k=0}^{n_t} (1 + \lambda^2 \Delta_k). \quad (12)$$

Заметим, что при равномерной дискретизации $\tau_{k+1} - \tau_k = \frac{t}{P}$, $\prod_{k=0}^{n_t} (1 + \lambda^2 \Delta_k) \rightarrow e^{\lambda^2 t}$, откуда следует, что $E[Y_t Y_s] \rightarrow \exp\{\lambda^2 \min(t, s)\}$ при $n_{\min(t, s)} \rightarrow \infty$, что согласуется с (3) при $n = 2$.

Далее вычислим $E[Y_{n_t}(\theta) Y_{n_s}(\theta)]$, где $Y_{n_t}(\theta)$ получается подстановкой θ в эйлеровскую аппроксимацию $Y_{n_t}(W)$ вместо процесса Винера W . Используя (8), получим

$$Y_{n_t}(\theta) = \prod_{k=0}^{n_t} (1 + \lambda \tilde{\Delta}_k) = 1 + \lambda \sum_{k=0}^{n_t} \tilde{\Delta}_k + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{k_1 \neq k_2=0}^{n_t} \tilde{\Delta}_{k_1} \tilde{\Delta}_{k_2} + \dots + \frac{\lambda^{n_t}}{n_t!} \sum_{k_1 \neq \dots \neq k_{n_t}=0}^{n_t} \tilde{\Delta}_{k_1} \dots \tilde{\Delta}_{k_{n_t}},$$

где $\tilde{\Delta}_k = \theta_{\tau_{k+1}} - \theta_{\tau_k} = \sum_{r=1}^N c_r 1_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(|u_r|) \text{sign}(u_r)$. Заметим, что $E[Y_{n_t}(\theta)] = 0$. Это следует из равенства $E[\tilde{\Delta}_{k_1} \dots \tilde{\Delta}_{k_m}] = 0$, $m = 1, 2, \dots, n_t$, справедливого для $k_1 \neq \dots \neq k_m$, в силу того, что

$$\int_{-1}^1 1_{(\tau_{k_1}, \tau_{k_1+1}]}(|u_r|) 1_{(\tau_{k_2}, \tau_{k_2+1}]}(|u_r|) du_r = 0, \quad \int_{-1}^1 1_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(|u_r|) \text{sign}(u_r) du_r = 0.$$

Пусть $M = \min(n_t, n_s)$, тогда в силу аргументов, приведенных выше, получаем

$$E[Y_t(\theta) Y_s(\theta)] = E \left[1 + \lambda^2 \left(\sum_{k=0}^{n_t} \tilde{\Delta}_k \right)^2 + \lambda^4 \left(\sum_{k_1 \neq k_2=0}^{n_t} \tilde{\Delta}_{k_1} \tilde{\Delta}_{k_2} \right)^2 + \dots + \lambda^{2n_t} \left(\sum_{k_1 \neq \dots \neq k_{n_t}=0}^{n_t} \tilde{\Delta}_{k_1} \dots \tilde{\Delta}_{k_{n_t}} \right)^2 \right]. \quad (13)$$

Вычислим далее

$$E \left[\left(\sum_{k=0}^{n_t} \tilde{\Delta}_k \right)^2 \right] = \sum_{k=0}^{n_t} E[\tilde{\Delta}_k^2] + \sum_{k_1 \neq k_2=1}^{n_t} E[\tilde{\Delta}_{k_1} \tilde{\Delta}_{k_2}] = \sum_{k=0}^{n_t} E \left[\left(\sum_{r=1}^N c_r 1_{(\tau_k, \tau_{k+1}]}(|u_r|) \text{sign}(u_r) \right)^2 \right] = \left(\sum_{r=1}^N c_r^2 \right) \sum_{k=0}^{n_t} (\tau_{k+1} - \tau_k) = t_{n_t},$$

где мы опять используем $\sum_{r=1}^N c_r^2 = 1$; далее, правая часть равенства

$$E \left[\left(\sum_{k_1 \neq k_2=1}^{n_t} \tilde{\Delta}_{k_1} \tilde{\Delta}_{k_2} \right)^2 \right] = E \left[\left(\sum_{k_1 \neq k_2=1}^{n_t} \sum_{j_1 \neq j_2=1}^{n_t} \tilde{\Delta}_{k_1} \tilde{\Delta}_{k_2} \tilde{\Delta}_{j_1} \tilde{\Delta}_{j_2} \right)^2 \right]$$

отлична от нуля, только если $\tilde{\Delta}_{k_1} = \tilde{\Delta}_{j_1}$ и $\tilde{\Delta}_{k_2} = \tilde{\Delta}_{j_2}$, и в этом случае мы имеем

$$E[\tilde{\Delta}_{k_1}^2 \tilde{\Delta}_{k_2}^2] = (\tau_{k_1+1} - \tau_{k_1})(\tau_{k_2+1} - \tau_{k_2}),$$

так что получаем

$$E \left[\left(\sum_{k_1 \neq k_2=1}^{n_t} \tilde{\Delta}_{k_1} \tilde{\Delta}_{k_2} \right)^2 \right] = \sum_{k_1 \neq k_2=1}^{n_t} (\tau_{k_1+1} - \tau_{k_1})(\tau_{k_2+1} - \tau_{k_2}).$$

Наконец, для случая N -кратной суммы будем иметь

$$E \left[\left(\sum_{k_1 \neq \dots \neq k_N=0}^{n_t} \tilde{\Delta}_{k_1} \dots \tilde{\Delta}_{k_N} \right)^2 \right] = E \left[\sum_{k_1 \neq \dots \neq k_N=0}^{n_t} \tilde{\Delta}_{k_1}^2 \dots \tilde{\Delta}_{k_N}^2 \right] = \sum_{k_1 \neq \dots \neq k_N=0}^{n_t} \prod_{i=1}^N E \left[\tilde{\Delta}_{k_i}^2 \right] = \sum_{k_1 \neq \dots \neq k_l=0}^{n_t} \prod_{i=1}^l (\tau_{k_{i+1}} - \tau_{k_i}).$$

Таким образом, из (13) следует, что

$$E \left[Y_t(\theta)^2 \right] = \prod_{k=0}^{n_t} (1 + \lambda^2 \Delta_k). \quad (15)$$

При $N < n$, в силу того, что в рассматриваемых выше суммах появятся слагаемые, содержащие произведения θ с числом сомножителей, большим $2N$, будет иметь место равенство

$$E[Y_t Y_s] = E[Y_t(\theta) Y_s(\theta)] + Q, \quad (16)$$

где Q – погрешность, обусловленная отсутствием точности формулы для моментов от θ порядка выше N .

Стандартная составная приближенная формула имеет вид [6]:

$$E[F(X)] \approx E[F(Y)] + E[F(Z(\theta))] - E[F(Y, \theta)], \quad (17)$$

где Y – эйлеровская аппроксимация решения X , определяемая (8); $Z = Z(t)$ задается равенством (4) и $F(Y, \theta)$ определяется подстановкой θ в $F(Y)$ вместо W . Эта формула аппроксимационно точна для функциональных многочленов заданной степени. Степень точности определяется выбором θ .

Из (16) видно, что точность составной формулы (17) в случае второго порядка точности определяется не только элементарной формулой

$$E[F(X)] \approx E[F(Z(\theta))], \quad (18)$$

но и точностью аппроксимации с помощью элементарной формулы эйлеровского приближения. Погрешность аппроксимации формулы (17) может быть представлена в виде

$$R(F) = E[F(X)] - E[F(Y)] + E[F(Y(\theta))] - E[F(Z(\theta))]. \quad (19)$$

Пусть $F(X) = P(X) + r(X)$, тогда мы будем иметь из (19)

$$R(F) = E[P(X)] - E[P(Y)] + E[P(Y(\theta))] - E[P(Z(\theta))] + E[r(X)] - E[r(Y)] + E[r(Y(\theta))] - E[r(Z(\theta))]. \quad (20)$$

Из этого соотношения видно, что осуществить контроль погрешности составной приближенной формулы можно, только если удастся определить класс функциональных многочленов, для которого можно оценить погрешность не только эйлеровской аппроксимации, но и величину погрешности приближения этой аппроксимации с помощью элементарной формулы. Последнюю можно сделать достаточно малой, как было выше показано для случая моментов решения, только если использовать элементарные формулы очень высокой степени точности, что практически

делает применение малоэффективным из-за большого объема вычислений и невозможности следить за погрешностью этих вычислений. Таким образом, в случае использования схемы Эйлера требование точности приближенных формул для заданного класса функционалов является необходимым. Далее мы укажем класс приближенных формул, который может быть использован для этой цели.

Обозначим через H_N класс функционалов от решений стохастических уравнений, которые могут быть представлены в виде

$$F_N(X_{(\cdot)})(W) = \sum_{r=1}^n \int_0^1 \dots \int_0^1 A_r(s_1, \dots, s_r) \prod_{l=1}^r \langle X_{s_l}, H_{\alpha_l} \rangle H_{\alpha_l}(W_{(\cdot)}) ds_1 \dots ds_r, \quad (21)$$

где $\sum_{l=1}^r \alpha_l = N$, $W = W_{(\cdot)}$, $H_{\alpha_l}(W_{(\cdot)})$ – функциональный многочлен Эрмита степени n_l (см. [6, 8]),

$\langle X_s, H_\alpha \rangle = E[X_s(W_{(\cdot)})H_\alpha(W_{(\cdot)})]$. Очевидно, что (21) является функциональным многочленом степени N от винеровского процесса. После подстановки эйлеровской аппроксимации Y_t в (21) вместо решения X_t мы также получаем функциональный многочлен степени N относительно W . Из сказанного вытекает

Т е о р е м а. *Приближенная формула*

$$E[F(X_{(\cdot)})(W)] \approx E[F(Y_{(\cdot)})(W)] + E[F(X_{(\cdot)})(\theta)] - E[F(Y_{(\cdot)})(\theta)], \quad (22)$$

где θ определено, как в (4), точно для функционалов из класса H_N .

В самом деле, после подстановки $F_n(Y_{(\cdot)}(W))$ из (21) в (22) мы получаем точное равенство, в силу того, что $E[F_N(X_{(\cdot)})(W)] = E[F_N(X_{(\cdot)})(\theta)]$, $E[F_N(Y_{(\cdot)})(W)] = E[F_N(Y_{(\cdot)})(\theta)]$, и в силу определения функции θ , приведенного после формулы (4). Коэффициенты $\langle X_s, H_\alpha \rangle$, входящие в формулу (21), возникают при решении стохастических дифференциальных уравнений методом Галёркина, основанном на использовании разложений по полиномам Винера–Эрмита (см. [9]).

Литература

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты, модели. Теория. Т. 1, 2. М., 2004.
2. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М., 2007.
3. Kloeden P. E., Platen E. P. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer. Berlin, 1999.
4. Мильштейн Г. Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. Свердловск, 1988.
5. Кузнецов Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М., 2007.
6. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. Functional integrals: Approximate evaluations and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
7. Egorov A. D., Zhergelo A. V. // Monte Carlo methods and applications. 2004. Vol. 10. N. 3–4. P. 257–264.
8. Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М., 2006.
9. Mikulevicius R., Rozovskii B. // SIAM J. Math. Anal. 1998. Vol. 29. P. 452–480.

A. D. EGOROV

COMPOSITE FORMULA FOR MATHEMATICAL EXPECTATION OF FUNCTIONALS OF SOLUTION OF ITO'S EQUATION

Summary

An approximate formula for evaluation of mathematical expectation of nonlinear functionals of solution of stochastic differential equations is considered. The formula is based on using Euler's iterative scheme of approximate solution of stochastic differential equations. It is exact for functionals of special form.

УДК 517.925:517.977

А. К. ДЕМЕНЧУК

**НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ
НЕРЕГУЛЯРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
С НУЛЕВЫМ УСРЕДНЕНИЕМ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ**

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 12.12.2008)

В работах [1–5] и др. изучались периодические решения дифференциальных систем, где периоды решения и самой системы предполагались несоизмеримыми. Впоследствии такие решения названы сильно нерегулярными [6]. Существование такого рода решений свидетельствует, в частности, о том, что колебания, поддерживаемые внешней гармонической силой, не всегда происходят с частотой, кратной частоте этой силы. Условия протекания физических процессов, когда колебания системы описываются сильно нерегулярными периодическими решениями, называются асинхронным режимом [7, 8]. Известен ряд систем, преобразующих энергию источника высокочастотных колебаний в низкочастотные, частота которых практически не зависит от частоты источника [7, 8] и др. На этой основе разработан ряд технических устройств, в которых реализуется задаваемое определенным образом воздействие на колебания, приводящее к периодическому вкладу энергии от внешнего гармонического источника с целью генерирования, усиления или преобразования колебаний [8]. При этом колебания осуществляются на собственной частоте системы, в общем случае несоизмеримой с частотой внешней силы.

Задача построения систем, обладающих асинхронным режимом, может быть сформулирована в виде задачи возбуждения нерегулярных колебаний. Пусть управляемая система описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

правая часть которого обеспечивает существование и единственность решений и периодична или почти периодична по t . Управление u принимает значения в некотором допустимом множестве, определяемом постановкой конкретной задачи.

О п р е д е л е н и е. Задачу выбора такого управления u , чтобы у данного уравнения появились сильно нерегулярные периодические решения, будем называть задачей возбуждения сильно нерегулярных колебаний.

Для регулярных колебаний отношение частот спектра и правой части уравнения рационально, т. е. наличие частот, отличных от кратных частот правой части, невозможно. Как отмечено в [9], на наличие систем с асинхронным режимом не обращали должного внимания, вследствие чего они не нашли отражения в литературе по теории колебаний. Одной из причин этого являлось исследование относительно простых систем, где нерегулярные колебания не наблюдаются, а также игнорирование инерционных, термических и других эффектов. Поэтому задача возбуждения и управления спектром нерегулярных колебаний в работах по математической теории колебаний для нестационарных систем не рассматривалась.

В настоящей работе рассматривается линейная система управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

где $A(t)$ – непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица, B – постоянная $(n \times n)$ -матрица.

Предположим, что управление задается в виде обратной связи

$$u = U(t)x \quad (2)$$

с непрерывной ω -периодической $(n \times n)$ -матрицей $U(t)$. Будем решать следующую задачу возбуждения сильно нерегулярных колебаний: выбрать такую матрицу $U(t)$ (коэффициент обратной связи), чтобы замкнутая управлением (2) система

$$\dot{x} = (A(t) + BU(t))x \quad (3)$$

имела сильно нерегулярные периодические решения.

Предварительно заметим, что если матрица B невырожденная, то задача возбуждения нерегулярных колебаний для системы (1) разрешима. Действительно, в таком случае, например, выбором коэффициента обратной связи

$$U(t) = B^{-1}(-A(t) + A_1)$$

управления (2) система (1) приводится к стационарной системе $\dot{x} = A_1x$ с любыми наперед заданными свойствами, в том числе и наличием сильно нерегулярных периодических решений. Для этого достаточно, чтобы матрица A_1 имела, по меньшей мере, одну пару чисто мнимых собственных значений $\pm i\lambda$ таких, что числа ω и π/λ несоизмеримы.

В [10] исследован случай, когда $\text{rank} B = r < n$ и первые $d = n - r$ строк матрицы B нулевые. Предполагалось, что среднее значение \hat{A} матрицы $A(t)$ равно нулю, а сама матрица $A(t)$ имеет блочно-треугольную форму, где правый верхний блок $A_{12}(t)$ размерности $r \times d$ тождественно равен нулю.

В настоящей работе ослабим условие $A_{12}(t) \equiv 0$ и заменим его необходимым.

Имеет место

Т е о р е м а. Пусть в системе (1) матрица $A(t)$ имеет нулевое среднее значение ($\hat{A} = 0$), матрица B вырожденная ($\text{rank} B = r < n$) и ее первые $d = n - r$ строк нулевые. Для разрешимости задачи возбуждения сильно нерегулярных колебаний (1) – (3) необходимо выполнение условия $\text{rank}_{\text{col}} A_{12} = r_1 < r$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть задача возбуждения сильно нерегулярных колебаний (1) – (3) разрешима и столбцовый ранг квадратного $(r \times r)$ -блока $A_{12}(t)$ матрицы коэффициентов $A(t)$ равен его размерности, т. е. $\text{rank}_{\text{col}} A_{12} = r$. Это означает, что найдется непрерывный ω -периодический $(n \times n)$ -матричный коэффициент обратной связи $U(t)$ такой, что замкнутая управлением (2) система (3) имеет отличное от стационарного периодическое решение $x(t)$, период которого несоизмерим с ω . Из [4] вытекает, что матрица $U(t)$ имеет каноническое представление $U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t)$, \hat{U} – постоянная $(n \times n)$ -матрица, $\tilde{U}(t)$ – непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица с нулевым средним значением, причем компоненты канонического представления удовлетворяют соответственно тождествам

$$\dot{x}(t) - B\hat{U}x(t) \equiv 0 \quad (4)$$

и

$$(A(t) + B\tilde{U}(t))x(t) \equiv 0. \quad (5)$$

В силу условия теоремы первые d строк матрицы B нулевые, а прямоугольный $(r \times n)$ -блок $B_{r,n}$ из оставшихся строк имеет ранг r . Пусть $x(t) = \text{col}(x^{[d]}(t), x_{[r]}(t))$, $x^{[d]}(t) = \text{col}(x_1(t), \dots, x_d(t))$, $x_{[r]}(t) = \text{col}(x_{d+1}(t), \dots, x_n(t))$. Обозначим матрицы, составленные соответственно из d первых и r остальных столбцов матрицы \hat{U} , через $\hat{U}_{n,d}$ и $\hat{U}_{n,r}$. Тогда тождество (4) примет вид:

$$\dot{x}^{[d]}(t) \equiv 0, \quad \dot{x}_{[r]}(t) - B_{r,n} \widehat{U}_{n,d} x^{[d]}(t) - B_{r,n} \widehat{U}_{n,r} x_{[r]}(t) \equiv 0,$$

откуда следует, что $x^{[d]}(t) \equiv c - \text{const}$ и

$$\dot{x}_{[r]}(t) - B_{r,n} \widehat{U}_{n,d} c - B_{r,n} \widehat{U}_{n,r} x_{[r]}(t) \equiv 0.$$

Заметим, что линейная алгебраическая система $B_{r,n} Y = 0$ с неизвестной $(n \times d)$ -матрицей Y имеет нетривиальное решение $Y = Y_0$. Выбор $\widehat{U}_{n,d} = Y_0$ позволяет свести последнее тождество к следующему

$$\dot{x}_{[r]}(t) - B_{r,n} \widehat{U}_{n,r} x_{[r]}(t) \equiv 0. \quad (6)$$

Так как ранг матрицы $B_{r,n}$ равен r , $r < n$, то ранг расширенной $(r \times (n+r))$ -матрицы, составленной из $B_{r,n}$ и единичной $(r \times r)$ -матрицы $E_{r,r}$ также равен r . Следовательно, линейная алгебраическая система

$$B_{r,n} Z = E_{r,r}, \quad (7)$$

где Z – неизвестная постоянная $(n \times r)$ -матрица, разрешима относительно Z . Пусть $Z = Z_0$ – какое-либо частное решение системы (7).

Возьмем постоянную $(r \times r)$ -матрицу U_1 , среди собственных чисел которой имеется по меньшей мере одна пара чисто мнимых

$$\pm i\lambda \quad (8)$$

такая, что отношение чисел ω и π/λ иррационально. Положим

$$\widehat{U}_{n,r} = Z_0 U_1. \quad (9)$$

Тогда с учетом (9) тождество (6) примет вид

$$\dot{x}_{[r]}(t) - B_{r,n} U_0 U_1 x_{[r]}(t) \equiv \dot{x}_{[r]}(t) - U_1 x_{[r]}(t) \equiv 0.$$

Этому тождеству удовлетворяет $\Omega = 2\pi/\lambda$ -периодический вектор

$$x_{[r]}(t) = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t \quad (10)$$

с некоторыми вещественными постоянными векторами C_1, C_2 , причем в силу (8) периоды Ω и ω несоизмеримы.

Таким образом, при описанном выше выборе блоков $\widehat{U}_{n,d}$ и $\widehat{U}_{n,r}$ стационарной компоненты \widehat{U} коэффициента управления $U(t)$ тождество (4) действительно выполняется, при этом первые d компонент нерегулярного периодического решения будут стационарными, а остальные имеют вид (10).

Перейдем далее к анализу тождества (5). Представим матрицу $A(t)$ в блочном виде. Пусть $A_{d,d}^{(11)}(t)$, $A_{r,d}^{(21)}(t)$ – левые верхний и нижний, а $A_{d,r}^{(12)}(t)$, $A_{r,r}^{(22)}(t)$ – правые верхний и нижний блоки матрицы $A(t)$ (нижние индексы указывают размерность). Тогда тождество (5) в силу строения матрицы B и сильно нерегулярного решения $x(t) = \text{col}(c, x_{[r]}(t))$ распадается на два:

$$A_{r,r}^{(11)}(t)c + A_{r,r}^{(12)}(t)x_{[r]}(t) \equiv 0 \quad (11)$$

и

$$(A_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n} \widetilde{U}_{n,d}(t))c + (A_{r,r}^{(22)}(t) + B_{r,n} \widetilde{U}_{n,r}(t))x_{[r]}(t) \equiv 0, \quad (12)$$

где $\widetilde{U}_{n,d}(t)$ – $(n \times d)$ -блок из первых d столбцов матрицы $\widetilde{U}(t)$, а $\widetilde{U}_{n,r}(t)$ – $(n \times r)$ -блок из остальных r столбцов матрицы $\widetilde{U}(t)$.

Рассмотрим алгебраическую систему

$$B_{r,n}V + A_{r,d}^{(21)}(t) = 0, \quad (13)$$

где V – неизвестная $(n \times d)$ -матрица. Так как ранг матрицы $B_{r,n}$ равен r , $r < n$, то система (13) разрешима относительно V . Пусть $V = V_0(t)$ – какое-либо ω -периодическое решение с нулевым средним значением системы (13). Полагая $\tilde{U}_{n,d}(t) = V_0(t)$, имеем:

$$(A_{r,d}^{(21)}(t) + B_{r,n}V_0(t))c \equiv 0. \quad (14)$$

Аналогично выбором матрицы $\tilde{U}_{n,r}(t) = W_0(t)$, где $W_0(t)$ – какое-либо ω -периодическое решение с нулевым средним значением системы

$$B_{r,n}W + A_{r,r}^{(21)}(t) = 0,$$

получим тождество

$$(A_{r,r}^{(21)}(t) + B_{r,n}W_0(t))_{[r]}(t) \equiv 0. \quad (15)$$

Из (14), (15) следует выполнимость тождества (12).

Для завершения доказательства осталось рассмотреть тождество (11). Поскольку отношение чисел ω и Ω иррационально и по начальному предположению столбцовый ранг матрицы $A_{r,r}^{(12)}(t)$ равен числу столбцов, то в силу [6] вектор $A_{r,r}^{(12)}(t)x_{[r]}(t)$ тождественно не равен нулю, более того, хотя бы одна из его компонент будет отличной от постоянной либо Ω -периодической, либо квазипериодической с периодами Ω и ω функцией, не вырождающейся в ω -периодическую. Пусть это будет функция $a(t)$. Обозначим соответствующую ей компоненту вектора $A_{r,r}^{(11)}(t)c$ через $b(t)$. В силу несоизмеримости чисел Ω , ω сумма ω -периодической функции $b(t)$ и отличной от постоянной в общем случае квазипериодической с периодами Ω и ω функции $a(t)$, не вырождающейся в ω -периодическую, тождественно не равна нулю, т. е. $b(t) + a(t) \neq 0$. Поэтому тождество (11), а вместе с ним и тождество (5) не имеют места.

Следовательно, замкнутая управлением (2) система (3) не имеет отличного от стационарного периодического решения $x(t)$, период которого несоизмерим с ω , т. е. при сделанном допущении задача возбуждения сильно нерегулярных колебаний (1) – (3) неразрешима. Полученное противоречие завершает доказательство.

З а м е ч а н и е. Теорема верна и в случае, когда сильно нерегулярное периодическое решение (10) содержит гармоники более высокого порядка. Для этого следует выбрать постоянную $(r \times r)$ -матрицу U_1 с соответствующим количеством чисто мнимых собственных значений. При этом число гармоник ограничивается размерностью матрицы U_1 , которая в свою очередь определяется числом ненулевых строк матрицы при управлении исходной системы.

Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели».

Литература

1. Massera J. L. // Vol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, N 1. P. 37–45.
2. Курцвейль Я., Вейвода О. // Чехосл. матем. журнал. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.
3. Еругин Н. П. // Прикл. матем. и механика. 1956. Т. 20, вып. 1. С. 148–152.
4. Гайшун И. В. // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 8. С. 684–686.
5. Грудо Э. И. // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1499–1504.
6. Demenčuk A. K. // Math. Bohemica. 2001. Vol. 126, N 1. P. 221–228.
7. Пеннер Д. И., Дубошинский Я. Б., Дубошинский Д. Б. и др. // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1065–1066.
8. Пеннер Д. И., Дубошинский Д. Б., Козаков М. И. и др. // Успехи физич. наук. 1973. Т. 109, вып. 1. С. 402–406.

9. Ланда П. С, Дубошинский Я. Б. // Успехи физич. наук. 1989. Т. 158, вып. 4. С. 729–742.
10. Демечук А. К. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 4. С. 37–42.

A. K. DEMENCHUK

**NECESSARY CONDITION FOR EXISTENCE OF IRREGULAR OSCILLATIONS
OF LINEAR SYSTEMS WITH TRIVIAL AVERAGE COEFFICIENT MATRIX**

Summary

We consider the linear control periodic system with the trivial average coefficient matrix and with reverse communication. The excitation problem of irregular oscillations is considered. A necessary condition for solution of this problem is given.

Национальная академия наук Беларуси

УДК 517.977

Л. И. МИНЧЕНКО, С. М. СТАХОВСКИЙ

**НОВЫЕ УСЛОВИЯ РЕГУЛЯРНОСТИ В ЗАДАЧАХ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 22.11.2008)

Условия регулярности играют важную роль в задачах математического программирования. В то же время они различаются между собой общностью и условиями применения. Одним из наиболее известных и общих условий регулярности является условие Мангасаряна–Фромовица [1]. Другое достаточно известное условие регулярности – условие постоянного ранга, отличное по своему характеру и природе от условия Мангасаряна–Фромовица и независимое от него, предложено Жаненом [2]. В связи с этим большой интерес вызвала работа [3] Qi и Wei, в которой было предложено новое условие постоянной положительно-линейной зависимости (CPLD), обобщающее два первых условия регулярности. Авторы работы [3] выдвинули предположение, что условие CPLD должно быть условием регулярности, т. е. гарантировать существование множителей Лагранжа в точках локального экстремума. Недавно Andreani, Martinez и Schuverdt доказали справедливость данной гипотезы [4]. Поскольку условие CPLD обладает широкой общностью, возникает вопрос о его соотношении с некоторыми известными ранее условиями регулярности очень общего характера – условием квазинормальности [5] и условием R -регулярности (часто именуемым в литературе *error bound property*) [6–9]. В [4] было доказано, что из выполнения CPLD в какой-либо точке вытекает квазинормальность в этой точке. Вопрос о взаимосвязи CPLD с R -регулярностью остался нерешенным. Целью данной статьи является доказательство, что условие регулярности постоянной положительно-линейной зависимости влечет выполнение условия R -регулярности.

Введение. Рассмотрим задачу $P(x)$ минимизации по переменной y функции $f(x, y)$ на множестве $F(x)$, где

$$F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \leq 0 \quad i \in I, \quad h_i(x, y) = 0 \quad i \in I_0\}$$
$$x \in R^n, \quad I = \{1, \dots, s\}, \quad I_0 = \{s+1, \dots, p\} \quad \text{или} \quad I_0 = \emptyset.$$

Будем предполагать $f(x, y)$, $h_i(x, y)$ непрерывно дифференцируемыми функциями из $R^n \times R^m$ в R . Обозначим F многозначное отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in R^n$ множество $F(x)$, через $\text{gr}F$ график многозначного отображения F , т. е.

$$\text{gr}F = \{(x, y) \mid y \in F(x), x \in R^n\}.$$

Для задачи $P(x)$ введем функцию Лагранжа

$$L(z, \lambda) = f(z) + \langle \lambda, h(z) \rangle, \quad \text{где} \quad z = (x, y), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad h = (h_1, \dots, h_p)$$

и множество множителей Лагранжа в точке z

$$\Lambda(z) = \{\lambda \in R^p \mid \nabla_y L(z, \lambda) = 0, \lambda_i \geq 0 \text{ и } \lambda_i h_i(z) = 0, i \in I\}.$$

Определим также множество индексов ограничений типа неравенства, активных в точке z

$$I(z) = \{i \in I \mid h_i(z) = 0\}.$$

Справедливость следующей леммы следует из утверждений о строении многогранных множеств [10, с. 71, 84–85].

Л е м м а 1. Пусть множество множителей Лагранжа $\Lambda(z)$ не пусто в точке $z = (x, y)$. Тогда существует максимальная линейно независимая подсистема $\nabla_y h_i(z) \quad i \in J \subset (I_0 \cup I(z))$ из системы векторов $\nabla_y h_i(z) \quad i \in I_0 \cup I(z)$ и точка λ из множества $\Lambda(z)$ такие, что отличными от нуля могут быть только компоненты $\lambda_i \quad i \in J$.

Условиями, существенно влияющими на возможность эффективного решения задачи $P(x)$, являются условия регулярности, обеспечивающие непустоту множества $\Lambda(z)$ в точках локального минимума рассматриваемой задачи. Одним из наиболее известных условий регулярности многозначного отображения F в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{gr}F$ является условие Мангасаряна–Фромовица [1], требующее, чтобы система векторов $\nabla_y h_i(z_0) \quad i \in I_0$ была линейно независимой и существовал вектор \bar{y}_0 такой, что

$$\langle \nabla_y h_i(z_0), \bar{y}_0 \rangle = 0, \quad i \in I_0, \quad \langle \nabla_y h_i(z_0), \bar{y}_0 \rangle < 0, \quad i \in I(z_0).$$

Более общим является условие R -регулярности, которое определяется ниже.

Пусть $\rho(x, C) = \inf_{y \in C} |x - y|$, где $|y|$ – евклидова норма вектора, B – открытый единичный шар с центром в 0 в соответствующем пространстве.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что многозначное отображение F R -регулярно в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, если найдутся числа $\alpha > 0, \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ такие, что

$$\rho(y, F(x)) \leq \alpha \max \{0, h_i(x, y) \quad i \in I, |h_i(x, y)| \quad i \in I_0\}$$

для всех $x \in x_0 + \delta_1 B, y \in y_0 + \delta_2 B$.

Известно [9], что ценным преимуществом R -регулярного в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{gr}F$ многозначного отображения F является его псевдолипшицевость в данной точке, которая предполагает существование числа $l > 0$ и окрестностей $V(x_0)$ и $V(y_0)$ точек x_0 и y_0 таких, что

$$F(x_1) \cap V(y_0) \subset F(x_2) + l|x_2 - x_1|B \quad \text{для всех } x_1, x_2 \in V(x_0).$$

Часто используется и условие регулярности постоянного ранга [2], которое по своей природе отлично от условия Мангасаряна–Фромовица. Напомним [2], что многозначное отображение F в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{gr}F$ удовлетворяет условию постоянного ранга, если для любого подмножества индексов $J_1 \subset I(z_0) \cup I_0$ система векторов $\nabla_y h_i(z) \quad i \in J$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки z_0 .

В работе [3] было предложено новое условие постоянной положительно-линейной зависимости, обобщающее одновременно условия Мангасаряна–Фромовица и постоянного ранга.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что точка z_0 удовлетворяет условию постоянной положительно линейной зависимости, если либо она удовлетворяет условию регулярности Мангасаряна–Фромовица, либо в противном случае для всех подмножеств индексов $J_1 \subset I(z_0), J_2 \subset I_0$ и чисел $\lambda_i \quad i \in J_1 \cup J_2$ таких, что $\lambda_i \geq 0 \quad i \in J_1$ и

$$\sum_{i \in J_1 \cup J_2} \lambda_i \nabla_y h_i(z_0) = 0, \quad \sum_{i \in J_1} \lambda_i + \sum_{i \in J_2} |\lambda_i| > 0,$$

система векторов $\nabla_y h_i(z) \quad i \in J_1 \cup J_2$ является линейно зависимой при всех z из некоторой окрестности $V(z_0)$.

Связь CPLD с R -регулярностью. Пусть $v \in R^m, v \notin F(x)$. Обозначим $\Pi_{F(x)}(v)$ множество точек из $F(x)$, ближайших к точке v . Очевидно, эти точки являются решениями задачи нелинейного программирования $f_v(y) \rightarrow \min, y \in F(x)$, где $f_v(y) = |y - v|$.

Обозначим $L_v(z, \lambda) = f_v(y) + \langle \lambda, h(z) \rangle$, $\Lambda_v(z) = \{ \lambda \in \mathbb{R}^p \mid \nabla_y L_v(z, \lambda) = 0, \lambda_i \geq 0, \lambda_i h_i(z) = 0, i \in I \}$.

Введем нижний топологический предел многозначного отображения F в точке x_0 :

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} F(x) = \{ y \in \mathbb{R}^m \mid \forall x_k \rightarrow x_0 \exists \{y_k\} \text{ такая, что } y_k \in F(x_k), y_k \rightarrow y, k = 1, 2, \dots \}.$$

Л е м м а 2 [11]. Пусть $y_0 \in \liminf_{x \rightarrow x_0} F(x)$ и пусть существуют числа $M > 0$ и $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ такие, что при всех $x \in x_0 + \delta_1 B, v \in y_0 + \delta_2 B, v \notin F(x)$, в точках $z = (x, y)$ таких, что $y = y(x, v) \in \Pi_{F(x)}(v)$, выполнено условие

$$\Lambda_v^M(z) = \{ \lambda \in \Lambda_v(z) : \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \leq M \} \neq \emptyset. \quad (1)$$

Тогда многозначное отображение F R -регулярно в точке $z_0 = (x_0, y_0)$.

Покажем, что при определенных условиях из CPLD следует R -регулярность.

Систему векторов $\{ \nabla_y h_i(z) \mid i \in J_1 \subset I(z), i \in J_2 \subset I_0 \}$ будем называть положительно линейно зависимой, если найдутся не все равные нулю числа $\lambda_i, i \in J_1 \cup J_2$ такие, что $\lambda_i \geq 0, i \in J_1$ и $\sum_{i \in J_1 \cup J_2} \lambda_i \nabla_y h_i(z) = 0$.

Т е о р е м а 1. Пусть условие CPLD выполнено в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{gr}F$, где $y_0 \in \liminf_{x \rightarrow x_0} F(x)$. Тогда многозначное отображение F R -регулярно в данной точке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим вначале, что если в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{gr}F$ выполняется условие Мангасаряна–Фромовица, то утверждение леммы выполняется (см., например, [9]). Будем предполагать, что точка z_0 не удовлетворяет условию Мангасаряна–Фромовица. Покажем, что существуют числа $M > 0$ и $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ такие, что при всех $x \in x_0 + \delta_1 B, v \in y_0 + \delta_2 B, v \notin F(x)$, в точках $z = (x, y)$ таких, что $y = y(x, v) \in \Pi_{F(x)}(v)$, выполнено условие (1).

Предположим противное. В этом случае существуют последовательности $x_k \rightarrow x_0, v_k \rightarrow y_0$ такие, что $v_k \notin F(x_k)$ и либо $\Lambda_{v_k}(z_k) = \emptyset$, либо $\rho(0, \Lambda_{v_k}(z_k)) \rightarrow \infty$ для $z_k = (x_k, y_k), y_k = y(x_k, v_k) \in \Pi_{F(x_k)}(v_k)$. При этом, поскольку $|v_k - y_k| \leq |v_k - y_0|, y_k = y(x_k, v_k) \rightarrow y_0$.

Из выполнения CPLD в точке z_0 следует, что, не ограничивая общности, можно считать его выполненным во всех точках z_k . Действительно, допустим, что существует некоторая подпоследовательность последовательности $\{z_k\}$ (для простоты обозначим ее также $\{z_k\}$), в которой CPLD не выполняется. Это значит, что для каждого k найдется положительно линейно зависимая система векторов $\nabla_y h_i(z_k) \mid i \in J^k = J_1^k \cup J_2^k$ из определения 2 такая, что она будет линейно независимой на некоторой последовательности $z_k^s \rightarrow z_k$ при $s \rightarrow \infty$. Поскольку число всевозможных выборов индексных множеств J^k конечно, можно, не убавив общности, считать, что $J^k = J = J_1 \cup J_2 = \text{const}$. В таком случае система $\nabla_y h_i(z_0) \mid i \in J = J_1 \cup J_2$ не может быть положительно линейно зависимой. Действительно, если предположить, что она положительно линейно зависима, то в силу условия CPLD, выполненного в z_0 , она была бы линейно зависимой в каждой точке z_k и ее окрестности, начиная с некоторого значения $k = k_0$. Следовательно, была бы линейно зависимой система векторов $\nabla_y h_i(z_k^s) \mid i \in J$, что невозможно. С другой стороны, из условия положительно линейной зависимости

$$\sum_{i \in J_1 \cup J_2} \lambda_i(z_k) \nabla_y h_i(z_k) = 0, \quad \sum_{i \in J_1} \lambda_i(z_k) + \sum_{i \in J_2} |\lambda_i(z_k)| > 0, \quad \lambda_i(z_k) \geq 0 \quad i \in J_1,$$

следует, если принять $\bar{\lambda}(z_k) = \lambda(z_k) |\lambda(z_k)|^{-1} \rightarrow \bar{\lambda}$, что

$$\sum_{i \in J_1 \cup J_2} \bar{\lambda}_i \nabla_y h_i(z_0) = 0, \quad \sum_{i \in J_1} \bar{\lambda}_i + \sum_{i \in J_2} |\bar{\lambda}_i| > 0, \quad \bar{\lambda}_i \geq 0 \quad i \in J_1,$$

т. е. система векторов $\nabla_y h_i(z_0) \quad i \in J = J_1 \cup J_2$ положительно линейно зависима. Полученное противоречие показывает, что условие CPLD должно быть выполненным в точках z_k . Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что условие CPLD выполнено во всех точках z_k и, следовательно [4], $\Lambda_{v_k}(z_k) \neq \emptyset$, $h_i(z_k) = 0 \quad i \in I_0 \cup I(z_k)$, $h_i(z_k) < 0 \quad i \notin (I_0 \cup I(z_k))$, $k = 1, 2, \dots$

Более того, можно выделить, если необходимо, подпоследовательность из последовательности $\{z_k\}$ (обозначим ее для простоты также $\{z_k\}$), такую, что $I(z_k) = I^*$, где I^* не зависит от z_k .

Тогда $h_i(z_k) = 0 \quad i \in I^*$, $h_i(z_k) < 0 \quad i \in (I \setminus I^*)$. Обозначим $J = I_0 \cup I^*$. Очевидно, что для любого z_k существует $i \in J$, для которого $\nabla_y h_i(z_k) \neq 0$, иначе из определения $\Lambda_{v_k}(z_k)$ следует $\nabla f_{v_k}(y_k) = 0$, что невозможно.

Поскольку $\Lambda_{v_k}(z_k) \neq \emptyset$, то, используя лемму 1, выберем в системе $\{\nabla_y h_i(z_k) \quad i \in I_0 \cup I^*\}$ максимальную линейно независимую подсистему $\{\nabla_y h_i(z_k) \quad i \in I_{00} \cup I^*, I_{00} \in I_0, I_0^* \in I^*\}$ такую, что для некоторого $\lambda^k \in \Lambda_{v_k}(z_k)$ справедливо равенство $\lambda_i^k = 0$ для всех $i \notin I_0^*$ и всех $i \notin I_{00}$. При этом без потери общности мы можем предполагать, что $J^0 = I_{00} \cup I_0^*$ не зависит от k .

Таким образом, система

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla_y h_i(z_k) + \nabla f_{v_k}(y_k) &= 0, \\ \lambda_i &\geq 0 \quad i \in I, \quad \lambda_i = 0 \quad i \notin I_0^*, \quad \lambda_i = 0 \quad i \notin I_{00}, \end{aligned} \quad (2)$$

имеет решение λ^k такое, что $\lambda_i^k = 0$ для всех $i \notin I_0^*$ и всех $i \notin I_{00}$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\lambda^k |\lambda^k|^{-1} \rightarrow \bar{\lambda}$. Тогда, поскольку $\lambda^k \in \Lambda_{v_k}(z_k)$ и $|\lambda^k| \rightarrow \infty$, из (2) следует

$$\sum_{i \in I_{00} \cup I_0^*} \bar{\lambda}_i \nabla_y h_i(z_0) = 0, \quad \bar{\lambda}_i \geq 0 \quad i \in I, \quad \bar{\lambda}_i = 0 \quad \text{для всех } i \in I \setminus I_0^*, \quad i \in I_0 \setminus I_{00},$$

где $|\bar{\lambda}| = 1$. Последнее означает, что система векторов $\{\nabla_y h_i(z_0) \quad i \in J^0 = I_{00} \cup I_0^*\}$ положительно линейно зависима и, значит, вследствие условия CPLD векторы $\nabla_y h_i(z_k) \quad i \in J^0$ должны быть линейно зависимы. Но это противоречит определению данной системы векторов. Полученное противоречие доказывает справедливость (1) при всех $x \in x_0 + \delta_1 B$, $v \in y_0 + \delta_2 B$, $v \notin F(x)$, в точках $z = (x, y)$ таких, что $y = y(x, v) \in \Pi_{F(x)}(v)$, где $M > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ некоторые числа. В таком случае, применяя лемму 2, получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим частный случай многозначного отображения F . Пусть $F(x) = C = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0 \quad i \in I, h_i(y) = 0 \quad i \in I_0\}$. Тогда условие CPLD формулируется в следующем виде.

О п р е д е л е н и е 3. Точка y_0 удовлетворяет условию постоянной положительно линейной зависимости на множестве C , если либо она удовлетворяет условию регулярности Мангасаряна–Фромовица, либо в противном случае для всех подмножеств индексов $J_1 \subset I(z_0)$, $J_2 \subset I_0$, и чисел $\lambda_i \quad i \in J_1 \cup J_2$ таких, что $\lambda_i \geq 0 \quad i \in J_1$ и

$$\sum_{i \in J_1 \cup J_2} \lambda_i \nabla h_i(y_0) = 0, \quad \sum_{i \in J_1} \lambda_i + \sum_{i \in J_2} |\lambda_i| > 0,$$

система векторов $\nabla h_i(y)$ $i \in J_1 \cup J_2$ является линейно зависимой при всех y из некоторой окрестности $V(y_0)$.

С л е д с т в и е. Пусть $C = \{y \in R^m \mid h_i(y) \leq 0 \quad i \in I, \quad h_i(y) = 0 \quad i \in I_0\}$ и пусть условие CPLD выполнено в точке $y_0 \in C$. Тогда в точке y_0 выполняется следующее условие R -регулярности: найдутся числа $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для всех $y \in y_0 + \delta B$ выполнено условие

$$\rho(y, C) \leq \alpha \max\{0, h_i(y) \quad i \in I, \quad |h_i(y)| \quad i \in I_0\}.$$

Следующие примеры показывают, что утверждение, обратное теореме 1, вообще говоря, не имеет места. Иначе говоря, из R -регулярности в какой-либо точке не следует выполнение условия CPLD регулярности в этой точке.

П р и м е р 1. Пусть $F(x) = \{y \in R^2 \mid h_1(y) = y_1 - y_2^2 \leq 0, \quad h_2(y) = -y_1 - y_2^2 \leq 0, \quad h_3(y) = y_2 = 0\}$, $x_0 = 0$, $y_0 = (0, 0)$. Тогда $\nabla_y h_1(y) = (1, -2y_2)$, $\nabla_y h_2(y) = (-1, -2y_2)$, $\nabla_y h_3(y) = (0, 1)$.

Нетрудно проверить, что CPLD не выполняется в точке $z_0 = (x_0, y_0)$, где $y_0 \in \liminf_{x \rightarrow x_0} F(x)$, в то время как многозначное отображение F RCR-регулярно и, следовательно, R -регулярно в данной точке.

П р и м е р 2. Пусть $F(x) = C = \{y \in R^2 \mid h_1(y) = y_2 e^{y_1} = 0, \quad h_2(y) = y_2 = 0\}$, $x_0 = 0$, $y_0 = (0, 0)$.

Очевидно, $\nabla h_1(y) = (y_2 e^{y_1}, e^{y_1})$, $\nabla h_2(y) = (0, 1)$ и в точке (x_0, y_0) они совпадают. Следовательно, условие Мангасаряна–Фромовица не имеет места в этой точке. Легко убедиться, что в любой окрестности y_0 присутствуют точки, в которых градиенты ∇h_1 и ∇h_2 линейно независимы, и, значит, условие CPLD не выполняется в (x_0, y_0) . С другой стороны, очевидно, $\rho(y, F(x)) = \rho(y, C) = |y_2| \leq \max\{|y_2 e^{y_1}|, |y_2|\}$ выполнено для всех x и y и, следовательно, имеет место R -регулярность в точке (x_0, y_0) .

Литература

1. Mangasarian O. L., Fromovitz S. // J. Math. Analysis and Appl. 1967. Vol. 17. P. 37–47.
2. Janin R. // Mathematical Programming Study. 1984. Vol. 21. P. 110–126.
3. Qi L., Wei Z. // SIAM Journal on Optimization. 2000. Vol. 10. P. 963–981.
4. Andreani R., Martinez J. M., Schverdt M. L. // J. Optimiz. Theory and Appl. 2005. Vol. 125. P. 473–485.
5. Hestenes M. R. Optimization theory – the finite dimensional case. John Wiley, New York, 1975.
6. Федоров В. В. Численные методы максимина. М., 1979.
7. Ioffe A. D. // Trans. American Math. Soc. 1979. Vol. 251. P. 61–69.
8. Bosch P., Jourani A., Henrion R. // Applied Mathematics and Applications. 2004. Vol. 50. P. 161–181.
9. Luderer B., Minchenko L. and Satsura T. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Dordrecht: Kluwer Publ., 2002.
10. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование. М., 1963.
11. Минченко Л. И., Гвоздь Е. Н. // Докл. НАН Беларуси. 2007. Т. 51, № 3. С. 5–9.

L. I. MINCHENKO, S. M. STAKHOVSKI

NEW REGULARITY CONDITIONS IN MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

Summary

The relation between the constant positive linear dependence regularity condition and the error bound property is studied for parametric mathematical programming problems.

УДК 517.911.5 + 519.216.73

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ

**ТЕОРЕМА О ЗАВИСИМОСТИ β -МАРТИНГАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
СТОХАСТИЧЕСКИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
ОТ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ И ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 23.01.2009)

Рассмотрим стохастическое эволюционное уравнение [1]

$$dX(t) = AX(t)dt + f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \in [0, T], \quad X \in H, \quad (1)$$

где H – сепарабельное гильбертово пространство, A – генератор C_0 -полугруппы $S(t)$ на H , функции $f: [0, T] \times H \rightarrow H$, $g: [0, T] \times H \rightarrow L_2(U_0, H)$ измеримы по Борелю, $W(t)$ – Q -винеровский процесс (цилиндрический, если $\text{Tr}(Q) = \infty$) со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве U , Q – заданный симметрический положительно определенный оператор на U , $L_2(U_0, H)$ – пространство операторов Гильберта–Шмидта $B: U_0 \rightarrow H$ с нормой $\|B\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|Bu_i\|^2 \right)^{1/2}$ (u_i – полный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $U_0 = Q^{1/2}U$, состоящем из элементов пространства U , скалярное произведение в котором задается следующим образом: $\langle u, v \rangle_{U_0} = \langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v \rangle_U$, $u, v \in U_0$).

В настоящей статье исследуется зависимость β -мартингальных решений уравнения (1) от правых частей $f(t, X)$, $g(t, X)$ и начального условия $X(0)$ (под β -мартингальным решением уравнения (1) понимается мартингальное решение некоторого стохастического эволюционного включения, построенного по уравнению (1)). В работе [2] доказано, что уравнение (1) с измеримыми по Борелю и имеющими линейный порядок роста по X отображениями $f(t, X)$, $g(t, X)$ и оператором A , порождающим сильно непрерывную полугруппу $S(t)$ такую, что при каждом $t \in (0, T]$ оператор $S(t)$ компактен, имеет β -мартингальное решение $X(t)$ с любым заданным наперед начальным распределением $\nu \in \wp$, где \wp – совокупность всех вероятностей, заданных на $(H, \mathbf{B}(H))$, с метрикой Леви–Прохорова $d(\cdot, \cdot)$. В настоящей работе доказана теорема, устанавливающая полунепрерывную зависимость β -мартингальных решений уравнения (1) с измеримыми по Борелю ограниченными отображениями $f(t, X)$, $g(t, X)$ и оператором A , порождающим компактную полугруппу $S(t)$, от правых частей $f(t, X)$, $g(t, X)$ и начального условия $X(0)$.

В статье будем пользоваться обозначениями из работы [2].

Построим многозначные отображения

$$F(t, X) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}}[f(t, [X]_{\delta})]_{\delta}, \quad G(t, X) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}}[g(t, [X]_{\delta})]_{\delta}, \quad (t, X) \in [0, T] \times H.$$

О п р е д е л е н и е. Предположим, что существует процесс $X(t)$, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, \mathbf{F}, P) с потоком σ -алгебр (\mathbf{F}_t) , и выполняются следующие условия:

- 1) процесс $X(t)$ непрерывен и (\mathbf{F}_t) -согласован;
- 2) существует (\mathbf{F}_t) -согласованный Q -винеровский процесс $W(t)$, $W(0) = 0$ п. н.;
- 3) существуют измеримые (\mathbf{F}_t) -согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$, определенные на (Ω, \mathbf{F}, P) , такие, что $v(t) \in F(t, X(t))$, $u(t) \in G(t, X(t))$ для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$, и $\int_0^T \|v(s)\| ds < \infty$, $\int_0^T \|u(s)\|_{L_2(U_0, H)}^2 ds < \infty$, где μ – мера Лебега;

4) для всех $t \in [0, T]$ выполняется соотношение

$$X(t) = S(t)X(0) + \int_0^t S(t-s)v(s)ds + \int_0^t S(t-s)u(s)dW(s) \text{ п. н.,}$$

где $S(t) = e^{At}$, $t \in [0, T]$, – C_0 -полугруппа на H .

Тогда набор $(\Omega, \mathbf{F}, P, \mathbf{F}_t, W(t), X(t), v(t), u(t))$ называется β -мартингалным решением уравнения (1).

Т е о р е м а. Пусть отображения $f(t, X)$, $g(t, X)$ измеримы по Борелю и ограничены; при каждом $t \in (0, T]$ оператор $S(t)$ компактен; $X_0 \in H$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ для любого $t_1 \in [0, T]$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_1)$, что для любого $\tilde{X}_0 \in H$, $\|\tilde{X}_0 - X_0\| \leq \delta$, для любых измеримых по Борелю отображений $\tilde{f}(t, X)$, $\tilde{g}(t, X)$, удовлетворяющих условию $\|\tilde{f}(t, X) - f(t, X)\| + \|\tilde{g}(t, X) - g(t, X)\|_{L_2(U_0, H)} \leq \delta$ при всех $(t, X) \in [0, t_1] \times H$, для любого β -мартингалного решения $\tilde{X}(t)$ уравнения $d\tilde{X}(t) = A\tilde{X}(t)dt + \tilde{f}(t, \tilde{X}(t))dt + \tilde{g}(t, \tilde{X}(t))dW(t)$ с начальным условием \tilde{X}_0 существует β -мартингалное решение $X(t)$ уравнения $dX(t) = AX(t)dt + f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$ с начальным условием X_0 , удовлетворяющее неравенству $d(P^{X(t_1)}, P^{\tilde{X}(t_1)}) \leq \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, утверждение теоремы не выполнено. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\exists t_1 > 0$, $\forall \delta_n = 1/n$ существуют измеримые по Борелю отображения $f_n(t, X)$, $g_n(t, X)$, $\|f_n(t, X) - f(t, X)\| + \|g_n(t, X) - g(t, X)\|_{L_2(U_0, H)} \leq \delta_n$, $\forall (t, X) \in [0, t_1] \times H$, $\exists X_{0,n} \in H$, $\|X_{0,n} - X_0\| \leq \delta_n$, существует β -мартингалное решение $(\Omega_n, \mathbf{F}_n, P_n, \mathbf{F}_n, W_n(t), X_n(t), v_n(t), u_n(t))$ уравнения $dX(t) = AX(t) + f_n(t, X(t))dt + g_n(t, X(t))dW(t)$ с начальным условием $X_{0,n}$ такое, что для любого β -мартингалного решения $X(t)$ уравнения (1) с начальным условием X_0 выполняется неравенство

$$d(P^{X_n(t_1)}, P^{X(t_1)}) > \varepsilon_0. \quad (2)$$

Для любого натурального n для всех $t \in [0, t_1]$ выполняется соотношение

$$X_n(t) = S(t)X_{0,n} + \int_0^t S(t-s)v_n(s)ds + \int_0^t S(t-s)u_n(s)dW_n(s) \text{ п. н.} \quad (3)$$

Л е м м а. Последовательность X_n , $n \geq 1$, плотна в $C([0, t_1], H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем числа $p > 2$ и $\alpha \in (0, 1)$ такие, что $0 < 1/p < \alpha < 1/2$. Рассмотрим оператор

$$G_\alpha : L_p([0, t_1], H) \rightarrow C([0, t_1], H),$$

задаваемый соотношением

$$G_\alpha f(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S(t-s)f(s)ds, \quad f \in L_p([0, t_1], H), \quad t \in [0, t_1].$$

По лемме 1 [2] оператор G_α компактный. Как показано в лемме 2 [2], справедливо следующее соотношение

$$\int_0^t S(t-s)u_n(s)dW_n(s) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} G_\alpha Y_n(t), \quad t \in [0, t_1], \quad (4)$$

где

$$Y_n(t) = \int_0^t (t-r)^{-\alpha} S(t-r)u_n(r)dW_n(r), \quad t \in [0, t_1].$$

Из соотношений (3) и (4) вытекает, что

$$X_n(t) = S(t)X_n(0) + G_1(v_n)(t) + \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} G_\alpha(Y_n)(t), \quad t \in [0, t_1].$$

Из ограниченности отображений f , g вытекает существование положительной постоянной c_p , когда для любого натурального n выполняется неравенство

$$E_n \int_0^{t_1} \|Y_n(s)\|^p ds \leq c_p.$$

Из неравенства Чебышева следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > 0$, и для всех натуральных n имеем

$$P_n \left(\|X_{0,n}\| \leq r, \left(\int_0^{t_1} \|Y_n(s)\|^p ds \right)^{1/p} \leq r, \left(\int_0^{t_1} \|v_n(s)\|^p ds \right)^{1/p} \leq r \right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Используя компактность оператора G_α , заключаем, что множество

$$K = \left\{ S(\cdot)X + G_1 f(\cdot) + \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} G_\alpha g(\cdot) \mid \|X\| \leq r, \|f\|_{L_p} \leq r, \|g\|_{L_p} \leq r \right\}$$

является компактом в $C([0, t_1], H)$. Так как для любого натурального n выполняется неравенство $P^{X_n}(K) \geq 1 - \varepsilon$, то последовательность X_n , $n \geq 1$, плотна в $C([0, t_1], H)$. Лемма доказана.

Существует подпоследовательность n_k последовательности n такая, что $P^{X_{n_k}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слабо}} \Theta$, где Θ - некоторая вероятность на $(C([0, t_1], H), \mathbf{B}(C([0, t_1], H)))$ (для упрощения обозначений считаем, что сама последовательность P^{X_n} слабо сходится к Θ).

Построим систему множеств $\Gamma(i_1, \dots, i_k)$ следующим образом: возьмем для каждого натурального k шары σ_m^k , $m=1, 2, \dots$, радиуса не более 2^{-k-1} , покрывающие $C([0, t_1], H)$ и удовлетворяющие условиям $P^{X_n}(\partial\sigma_m^k) = 0$, $P^\Theta(\partial\sigma_m^k) = 0$ (∂A - граница множества A) для каждого n , k , m , и положим $D_1^k = \sigma_1^k$, $D_2^k = \sigma_2^k \setminus \sigma_1^k, \dots$, $D_n^k = \sigma_n^k \setminus (\sigma_1^k \cup \dots \cup \sigma_{n-1}^k)$ и $\Gamma(i_1, \dots, i_k) = D_{i_1}^1 \cap D_{i_2}^2 \cap \dots \cap D_{i_k}^k$. Пусть $H_n(i_1, \dots, i_k) = \{\omega \in \Omega_n \mid X_n(\omega) \in \Gamma(i_1, \dots, i_k)\}$. Для каждого множества $\Gamma(i_1, \dots, i_k)$ такого, что $\text{int}(\Gamma(i_1, \dots, i_k)) \neq \emptyset$, выберем точку $q(i_1, \dots, i_k) \in \text{int}(\Gamma(i_1, \dots, i_k))$ ($\text{int}(A)$ - внутренность множества A), если $\text{int}(\Gamma(i_1, \dots, i_k)) = \emptyset$, то в качестве $q(i_1, \dots, i_k)$ берем любую точку из $\Gamma(i_1, \dots, i_k)$. Положим $X_n^k(\omega) = q(i_1, \dots, i_k)$, если $\omega \in H_n(i_1, \dots, i_k)$. Так как $\|X_n^k - X_n\| \leq 2^{-k}$ для любых n , k , то $X_n^k(t) \rightarrow X_n(t)$ при $k \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, t_1]$ п. н.

Пусть $\int_{H_n(i_1, \dots, i_k)} v_n(t, \omega) dP_n(\omega) = M_{n, i_1, \dots, i_k}(t)$, $\int_{H_n(i_1, \dots, i_k)} u_n(t, \omega) dP_n(\omega) = G_{n, i_1, \dots, i_k}(t)$. Определим процессы $v_n^k(t, \omega)$, $u_n^k(t, \omega)$ следующим образом: $v_n^k(t, \omega) = \frac{M_{n, i_1, \dots, i_k}(t)}{P_n(H_n(i_1, \dots, i_k))}$, $u_n^k(t, \omega) = \frac{G_{n, i_1, \dots, i_k}(t)}{P_n(H_n(i_1, \dots, i_k))}$, если $\omega \in H_n(i_1, \dots, i_k)$ и $P_n(H_n(i_1, \dots, i_k)) > 0 \forall t \in [0, t_1]$, для остальных $(t, \omega) \in [0, t_1] \times \Omega_n$ полагаем $v_n^k(t, \omega) = 0$, $u_n^k(t, \omega) = 0$. Для $(\mu \times P_n)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, t_1] \times \Omega_n$ выполняются включения $v_n^k(t, \omega) \in [F_n(t, X_n^k(t, \omega))]^{2^{-k}}$, $u_n^k(t, \omega) \in [G_n(t, X_n^k(t, \omega))]^{2^{-k}}$, где $F_n(t, X) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}}[f_n(t, [X]_\delta)]_\delta$, $G_n(t, X) = \bigcap_{\delta > 0} \overline{\text{co}}[g_n(t, [X]_\delta)]_\delta$, $[F(X)]^\delta = \overline{\text{co}}F([X]_\delta)$.

Возьмем $\Omega = [0, 1)$, $\mathbf{F} = \mathbf{B}([0, 1))$, P – мера Лебега на $[0, 1)$. Для фиксированного k упорядочим все наборы (i_1, \dots, i_k) лексикографически. Определим интервалы $\Delta(i_1, \dots, i_k)$, $\Delta_n(i_1, \dots, i_k)$ вида $[a, b)$, $b \geq a$, в $[0, 1)$ следующим образом:

- 1) $|\Delta(i_1, \dots, i_k)| = \Theta(\Gamma(i_1, \dots, i_k))$, $|\Delta_n(i_1, \dots, i_k)| = P^{X_n}(\Gamma(i_1, \dots, i_k))$ ($|\Delta|$ – длина интервала Δ);
- 2) если $(i_1, \dots, i_k) < (j_1, \dots, j_k)$, то интервал $\Delta(i_1, \dots, i_k)$ ($\Delta_n(i_1, \dots, i_k)$) расположен левее, чем интервал $\Delta(j_1, \dots, j_k)$ ($\Delta_n(j_1, \dots, j_k)$).

Положим $\widehat{X}_n^k(\omega) = q(i_1, \dots, i_k)$ для $\omega \in \Delta_n(i_1, \dots, i_k)$ и $\widehat{X}^k(\omega) = q(i_1, \dots, i_k)$ для $\omega \in \Delta(i_1, \dots, i_k)$. Из доказательства теоремы 1.2.7 [3] следует, что существуют пределы

- 1) $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{X}_n^k(t, \omega) = \widehat{X}_n(t, \omega)$ равномерно по $t \in [0, t_1]$ п. н.;
- 2) $\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{X}^k(t, \omega) = \widehat{X}(t, \omega)$ равномерно по $t \in [0, t_1]$ п. н.;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{X}_n(t, \omega) = \widehat{X}(t, \omega)$ равномерно по $t \in [0, t_1]$ п. н.

Кроме того, $P^{X_n} = P^{\widehat{X}_n}$, $P^{\widehat{X}} = \Theta$. Построим отображения $(t, \omega) \rightarrow \widehat{v}_n^k(t, \omega)$, $(t, \omega) \rightarrow \widehat{u}_n^k(t, \omega)$ такие, что $\widehat{v}_n^k(t, \omega) = \frac{M_{n, i_1, \dots, i_k}(t)}{|\Delta_n(i_1, \dots, i_k)|}$, $\widehat{u}_n^k(t, \omega) = \frac{G_{n, i_1, \dots, i_k}(t)}{|\Delta_n(i_1, \dots, i_k)|}$, если $\omega \in \Delta_n(i_1, \dots, i_k)$ и $|\Delta_n(i_1, \dots, i_k)| > 0$. Из построения \widehat{X}_n^k , \widehat{v}_n^k , \widehat{u}_n^k вытекает, что для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, t_1] \times \Omega$ выполняются включения $\widehat{v}_n^k(t, \omega) \in [F_n(t, \widehat{X}_n^k(t, \omega))]^{2^{-k}}$, $\widehat{u}_n^k(t, \omega) \in [G_n(t, \widehat{X}_n^k(t, \omega))]^{2^{-k}}$. Для любого $p > 2$ существует постоянная $\gamma = \gamma(p)$ такая, что

$$E \left(\int_0^{t_1} \left\| \widehat{v}_n^k(t) \right\|^p dt \right) \leq \gamma, \quad E \left(\int_0^{t_1} \left\| \widehat{u}_n^k(t) \right\|_{L_2(U_0, H)}^p dt \right) \leq \gamma$$

при всех натуральных n, k . Из доказательства леммы 3 [2] вытекает, что последовательности $\widehat{v}_n^k(t, \omega)$, $\widehat{u}_n^k(t, \omega)$, $k \geq 1$, относительно слабо компактны соответственно в $L_1([0, t_1] \times \Omega, H)$, $L_1([0, t_1] \times \Omega, L_2(U_0, H))$. Для удобства записи считаем, что сами последовательности $\widehat{v}_n^k(t, \omega)$, $\widehat{u}_n^k(t, \omega)$, $k \geq 1$, являются слабо сходящимися, пусть $\widehat{v}_n(t, \omega)$, $\widehat{u}_n(t, \omega)$ – их слабые пределы. Для любого натурального n и для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, t_1] \times \Omega$ имеют место включения

$$\widehat{v}_n(t, \omega) \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{k=r}^{\infty} \widehat{v}_n^k(t, \omega) \subset F_n(t, \widehat{X}_n(t, \omega)),$$

$$\hat{u}_n(t, \omega) \in \bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{k=r}^{\infty} \hat{u}_n^k(t, \omega) \subset G_n(t, \hat{X}_n(t, \omega)).$$

Для любого $p > 2$ существует постоянная $\gamma_1 = \gamma_1(p)$ такая, что

$$E \left(\int_0^{t_1} \|\hat{v}_n(t)\|^p dt \right) \leq \gamma_1, \quad E \left(\int_0^{t_1} \|\hat{u}_n(t)\|_{L_2(U_0, H)}^p dt \right) \leq \gamma_1$$

при всех натуральных n . Следовательно, последовательности $\hat{v}_n(t, \omega)$, $\hat{u}_n(t, \omega)$, $n \geq 1$, относительно слабо компактны соответственно в $L_1([0, t_1] \times \Omega, H)$, $L_1([0, t_1] \times \Omega, L_2(U_0, H))$. Считаем, что сами последовательности $\hat{v}_n(t, \omega)$, $\hat{u}_n(t, \omega)$, $n \geq 1$, являются слабо сходящимися, и пусть $\hat{v}(t, \omega)$, $\hat{u}(t, \omega)$ – их слабые пределы. Для каждого $r > 0$ из неравенства $\|f_n(t, X) - f(t, X)\| + \|g_n(t, X) - g(t, X)\|_{L_2(U_0, H)} \leq \delta_n \quad \forall (t, X) \in [0, t_1] \times H$, следует, что

$$F_n(t, X) \subset [F(t, X)]_r, \quad G_n(t, X) \subset [G(t, X)]_r \quad (5)$$

для всех достаточно больших n и для всех $(t, \omega) \in [0, t_1] \times \Omega$.

Для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, t_1] \times \Omega$ справедливы включения

$$\hat{v}(t, \omega) \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{n=l}^{\infty} \hat{v}_n(t, \omega) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{n=l}^{\infty} F_n(t, \hat{X}_n(t, \omega)), \quad (6)$$

$$\hat{u}(t, \omega) \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{n=l}^{\infty} \hat{u}_n(t, \omega) \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{n=l}^{\infty} G_n(t, \hat{X}_n(t, \omega)). \quad (7)$$

Из соотношений (5) – (7) получаем, что $\hat{v}(t, \omega) \in [F(t, \hat{X}(t, \omega))]_{2r}$, $\hat{u}(t, \omega) \in [G(t, \hat{X}(t, \omega))]_{2r}$ для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, t_1] \times \Omega$. Пользуясь произвольностью r , заключаем, что $\hat{v}(t, \omega) \in F(t, \hat{X}(t, \omega))$, $\hat{u}(t, \omega) \in G(t, \hat{X}(t, \omega))$ для $(\mu \times P)$ -почти всех $(t, \omega) \in [0, t_1] \times \Omega$.

Пусть $\sigma_{t+\varepsilon}$ – наименьшая σ -алгебра, относительно которой измеримы все случайные векторы $\hat{X}(s)$, $\hat{v}(s)$, $\hat{u}(s)$, $0 \leq s \leq \min\{t + \varepsilon, t_1\}$, и пусть $\mathbf{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{t+\varepsilon}$. Тогда процессы $\hat{X}(t)$, $\hat{v}(t)$, $\hat{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, измеримы, (\mathbf{F}_t) -согласованы, и процесс $\hat{X}(t)$ имеет непрерывные траектории при $t < t_1$.

Из соотношения (3) следует, что для любого натурального n и для любого $t \in [0, t_1]$ выполняется равенство [4]

$$X_n(t) = X_{0,n} + A \left(\int_0^t X_n(s) ds \right) + \int_0^t v_n(s) ds + \int_0^t u_n(s) dW_n(s) \quad \text{п. н.} \quad (8)$$

Не нарушая общности, можно считать, что оператор A^{-1} всюду определен и ограничен [1, с. 233].

Из соотношения (8) вытекает, что для любого $t \in [0, t_1]$ выполняется соотношение

$$A^{-1} X_n(t) = A^{-1} X_{0,n} + \int_0^t X_n(s) ds + \int_0^t A^{-1} v_n(s) ds + \int_0^t A^{-1} u_n(s) dW_n(s) \quad \text{п. н.} \quad (9)$$

Для каждого натурального n определим процессы

$$N_n(t) = A^{-1} X_n(t) - A^{-1} X_{0,n} - \int_0^t X_n(s) ds - \int_0^t A^{-1} v_n(s) ds, \quad t \in [0, t_1],$$

$$\widehat{N}_n(t) = A^{-1} \widehat{X}_n(t) - A^{-1} \widehat{X}_{0,n} - \int_0^t \widehat{X}_n(s) ds - \int_0^t A^{-1} \widehat{v}_n(s) ds, \quad t \in [0, t_1].$$

Из соотношения (9) следует, что при любом натуральном n процесс $N_n(t)$, $t \in [0, t_1]$, является квадратично интегрируемым мартингалом относительно \mathbf{F}_{nt} , имеет квадратичную вариацию

$$\ll N_n(t) \gg = \int_0^t (A^{-1} u_n(s) Q^{1/2}) (A^{-1} u_n(s) Q^{1/2})^* ds, \quad t \in [0, t_1].$$

Докажем, что процесс

$$\widehat{N}(t) = A^{-1} \widehat{X}(t) - A^{-1} X_0 - \int_0^t \widehat{X}(s) ds - \int_0^t A^{-1} \widehat{v}(s) ds, \quad t \in [0, t_1],$$

является квадратично интегрируемым мартингалом относительно \mathbf{F}_t , имеет квадратичную вариацию

$$\ll \widehat{N}(t) \gg = \int_0^t (A^{-1} \widehat{u}(s) Q^{1/2}) (A^{-1} \widehat{u}(s) Q^{1/2})^* ds, \quad t \in [0, t_1].$$

Через $L_1^\sigma([0, t_1], H \times L_2(U_0, H))$ обозначим пространство классов интегрируемых по Бохнеру функций, заданных на $[0, t_1]$, принимающих значения из $H \times L_2(U_0, H)$, со слабой топологией. Возьмем произвольно $a, b \in H$, $s, t \in [0, t_1]$, $s \leq t$, ограниченную непрерывную $(\mathbf{B}_s(C([0, t_1], H) \times L_1^\sigma([0, t_1], H \times L_2(U_0, H))))$ -измеримую функцию

$$\varphi: C([0, t_1], H) \times L_1^\sigma([0, t_1], H \times L_2(U_0, H)) \rightarrow R.$$

Для каждого натурального n имеем

$$\begin{aligned} E\left(\left(\widehat{N}(t) - \widehat{N}(s)\right)\varphi\left(\widehat{X}, \widehat{v}, \widehat{u}\right)\right) &= E\left(\left(A^{-1} \widehat{X}(t) - A^{-1} \widehat{X}(s) - \int_s^t \widehat{X}(\tau) d\tau - \int_s^t A^{-1} \widehat{v}(\tau) d\tau\right)\varphi\left(\widehat{X}, \widehat{v}, \widehat{u}\right)\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\left(A^{-1} \widehat{X}_n(t) - A^{-1} \widehat{X}_n(s) - \int_s^t \widehat{X}_n(\tau) d\tau - \int_s^t A^{-1} \widehat{v}_n(\tau) d\tau\right)\varphi\left(\widehat{X}_n, \widehat{v}_n, \widehat{u}_n\right)\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(E\left(A^{-1} \widehat{X}_n(t)\varphi\left(\widehat{X}_n, \widehat{v}_n, \widehat{u}_n\right) - A^{-1} \widehat{X}_n(s)\varphi\left(\widehat{X}_n, \widehat{v}_n, \widehat{u}_n\right) - \left(\int_s^t \widehat{X}_n(\tau) d\tau\right)\varphi\left(\widehat{X}_n, \widehat{v}_n, \widehat{u}_n\right)\right) - \\ &= \int_s^t \sum_{s(i_1, \dots, i_k)} \int_{\Delta_n(i_1, \dots, i_k)} A^{-1} \widehat{v}_n^k \varphi\left(\widehat{X}_n^k, \widehat{v}_n^k, \widehat{u}_n^k\right) dP(\omega) d\tau = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(E\left(A^{-1} \widehat{X}_n(t)\varphi\left(\widehat{X}_n, \widehat{v}_n, \widehat{u}_n\right) - A^{-1} \widehat{X}_n(s)\varphi\left(\widehat{X}_n, \widehat{v}_n, \widehat{u}_n\right) - \left(\int_s^t \widehat{X}_n(\tau) d\tau\right)\varphi\left(\widehat{X}_n, \widehat{v}_n, \widehat{u}_n\right)\right) - \\ &= \int_s^t \sum_{s(i_1, \dots, i_k)} A^{-1} M_{n, i_1, \dots, i_k}(\tau) \varphi(q(i_1, \dots, i_k), M_{n, i_1, \dots, i_k}, G_{n, i_1, \dots, i_k}) d\tau = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \left(\left(A^{-1} X_n(t) - A^{-1} X_n(s) - \int_s^t X_n(\tau) d\tau - \int_s^t A^{-1} v_n(\tau) d\tau \right) \varphi(X_n, v_n, u_n) \right) = 0; \end{aligned}$$

для любого $t \in [0, t_1]$ имеем

$$\begin{aligned}
& E \left(\left(\langle \widehat{N}(t), a \rangle \langle \widehat{N}(t), b \rangle - \int_0^t \langle A^{-1} \widehat{u}(\tau) Q^{1/2} a, A^{-1} \widehat{u}(\tau) Q^{1/2} b \rangle d\tau \right) \varphi(\widehat{X}, \widehat{v}, \widehat{u}) \right) = \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\left(\langle \widehat{N}_n(t), a \rangle \langle \widehat{N}_n(t), b \rangle - \int_0^t \langle A^{-1} \widehat{u}_n(\tau) Q^{1/2} a, A^{-1} \widehat{u}_n(\tau) Q^{1/2} b \rangle d\tau \right) \varphi(\widehat{X}_n, \widehat{v}_n, \widehat{u}_n) \right) = \\
& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(E \left(\langle \widehat{N}_n(t), a \rangle \langle \widehat{N}_n(t), b \rangle \varphi(\widehat{X}_n, \widehat{v}_n, \widehat{u}_n) \right) - \right. \\
& \quad \left. \int_0^t \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \int_{\Delta_n(i_1, \dots, i_k)} \langle A^{-1} \widehat{u}_n^k Q^{1/2} a, A^{-1} \widehat{u}_n^k Q^{1/2} b \rangle \varphi(\widehat{X}_n^k, \widehat{v}_n^k, \widehat{u}_n^k) dP(\omega) d\tau \right) = \\
& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(E \left(\langle \widehat{N}_n(t), a \rangle \langle \widehat{N}_n(t), b \rangle \varphi(\widehat{X}_n, \widehat{v}_n, \widehat{u}_n) \right) - \right. \\
& \quad \left. \int_0^t \sum_{(i_1, \dots, i_k)} \langle A^{-1} G_{n, i_1, \dots, i_k}(\tau) Q^{1/2} a, A^{-1} G_{n, i_1, \dots, i_k}(\tau) Q^{1/2} b \rangle \varphi(q(i_1, \dots, i_k), M_{n, i_1, \dots, i_k}, G_{n, i_1, \dots, i_k}) d\tau \right) = \\
& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \left(\left(\langle N_n(t), a \rangle \langle N_n(t), b \rangle - \int_0^t \langle A^{-1} u_n(\tau) Q^{1/2} a, A^{-1} u_n(\tau) Q^{1/2} b \rangle d\tau \right) \varphi(X_n, v_n, u_n) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Квадратичная интегрируемость мартингала $\widehat{N}(t)$ вытекает из условия $\sup_n \sup_{t \in [0, t_1]} E_n(\|N_n(t)\|^2) < \infty$ и соотношений $P^{X_n} = P^{\widehat{X}_n}$, $P^{v_n} = P^{\widehat{v}_n}$, $P^{u_n} = P^{\widehat{u}_n}$.

По теореме 8.2 [1] на расширении $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbf{F}}, \widetilde{P})$ с потоком $(\widetilde{\mathbf{F}}_t)$ вероятностного пространства (Ω, \mathbf{F}, P) с потоком (\mathbf{F}_t) можно определить Q -винеровский процесс $W(t)$, согласованный с $(\widetilde{\mathbf{F}}_t)$, такой, что

$$A^{-1} \widehat{X}(t) - A^{-1} X_0 - \int_0^t \widehat{X}(\tau) d\tau - \int_0^t A^{-1} \widehat{v}(\tau) d\tau = \int_0^t A^{-1} \widehat{u}(\tau) dW(\tau), \quad t \in [0, t_1].$$

Так как $\int_0^t A^{-1} \widehat{u}(s) dW(s) = A^{-1} \int_0^t \widehat{u}(s) dW(s)$, и процесс $A^{-1} X(\cdot)$ непрерывный, как процесс со значениями в $D(A)$, то

$$\widehat{X}(t) = X_0 + A \left(\int_0^t \widehat{X}(s) ds \right) + \int_0^t \widehat{v}(s) ds + \int_0^t \widehat{u}(s) dW(s), \quad t \in [0, t_1].$$

Следовательно, для любого $t \in [0, t_1]$ и для любого $\xi \in D(A^*)$ имеем

$$\langle \widehat{X}(t), \xi \rangle = \langle X_0, \xi \rangle + \int_0^t \langle \widehat{X}(s), A^* \xi \rangle ds + \int_0^t \langle \widehat{v}(s), \xi \rangle ds + \int_0^t \langle \xi, \widehat{u}(s) dW(s) \rangle \quad \text{п. н.} \quad (10)$$

Из соотношения (10) вытекает [1, с. 234], что для любого $t \in [0, t_1]$ имеет место соотношение

$$\widehat{X}(t) = S(t) X_0 + \int_0^t S(t-s) \widehat{v}(s) ds + \int_0^t S(t-s) \widehat{u}(s) dW(s) \quad \text{п. н.}$$

Таким образом, $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathbf{F}}, \widetilde{P}, \widetilde{\mathbf{F}}_t, W(t), \widehat{X}(t), \widehat{v}(t), \widehat{u}(t))$ – β -мартингальное решение уравнения (1) на $[0, t_1]$ с начальным условием $X(0) = X_0$. Так как $P^{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{слабо}} P^{\widehat{X}}$, то $d(P^{X_n(t)}, P^{\widehat{X}(t)}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, что противоречит неравенству (2). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если пространства H , U конечномерны, то теорема настоящей работы близка к теореме из [5].

Литература

1. Д а Р т о G., З а б з з к J. Stochastic evolution equations in infinite dimensions. Cambridge University Press, 1992.
2. В а с ь к о в с к и й М. М. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 40–50.
3. В а т а н а б э С., И к э д а Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
4. П у г а ч е в В. С. // Докл. РАН. 1995. Т. 342, № 5. С. 592–595.
5. Л е в а к о в А. А. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2003. № 4. С. 84–89.

M. M. VAS'KOVSKII

THEOREM ON THE DEPENDENCE OF β -MARTINGALE SOLUTIONS OF STOCHASTIC PARABOLIC EVOLUTION EQUATIONS ON THE INITIAL CONDITIONS AND THE RIGHT-HAND SIDES

Summary

The theorem on the dependence of β -martingale solutions of stochastic evolution equation $dX(t) = AX(t)dt + f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t)$, $X \in H$, is proved. Here H is a separable Hilbert space, $W(t)$ is the Wiener process, assuming that the operator A is the generator of a compact semigroup $S(\cdot)$ on H , the functions $f(t, X)$, $g(t, X)$, $t \in [0, T]$, $X \in H$, are Borel measurable and bounded.

УДК 517.948.32:517.544

Е. В. ДАВЬЯЛОВА

**ЗАДАЧА МАРКУШЕВИЧА С ТРЕМЯ ПРОИЗВОЛЬНО
 РАСПОЛОЖЕННЫМИ ТОЧКАМИ РАЗРЫВА**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 27.05.2009)

Рассмотрим задачу нахождения функций φ , кусочно-аналитических и ограниченных в плоскости переменного $\zeta = \xi + i\eta$ с линией разрыва $\text{Im} \zeta = 0$. Предельные значения слева (φ^+) и справа (φ^-) от выбранной ориентации оси (ось условимся ориентировать слева направо) связаны уравнением:

$$a(\xi)\varphi^+(\xi) + \overline{b(\xi)\varphi^+(\xi)} + c(\xi)\varphi^-(\xi) + \overline{d(\xi)\varphi^-(\xi)} = f(\xi), \quad (1)$$

коэффициенты которого ограничены, H -непрерывны на $\mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2, r_3\}$ и удовлетворяют другим ограничениям, указываемым ниже.

Предположим, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим тождествам:

$$|a(\xi)| \equiv |b(\xi)|, |c(\xi)| \equiv |d(\xi)| \text{ при } \xi \in (-\infty, r_1) \cup (r_2, r_3), \quad (2)$$

$$b(\xi) \equiv d(\xi) \equiv 0 \text{ при } \xi \in (r_1, r_2) \cup (r_3, +\infty), \quad (3)$$

а в остальном нигде не обращаются в нуль. Для преобразования краевых условий введем обозначения:

$$a(\xi) = |a(\xi)|e^{i\alpha(\xi)}, b(\xi) = |b(\xi)|e^{i\beta(\xi)}, c(\xi) = |c(\xi)|e^{i\gamma(\xi)}, d(\xi) = |d(\xi)|e^{i\delta(\xi)}. \quad (4)$$

Тогда при $\xi \in (-\infty, r_1) \cup (r_2, r_3)$, опуская для краткости аргумент, из (1) получим следующее уравнение:

$$|a| \left(e^{i\alpha} \varphi^+ + e^{i\beta} \overline{\varphi^+} \right) + |c| \left(e^{i\gamma} \varphi^- + e^{i\delta} \overline{\varphi^-} \right) = f. \quad (5)$$

Умножая это равенство на $\exp\left(-i \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}\right)$, получим

$$|a| e^{-i \frac{\gamma + \delta}{2}} \left(e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}} \varphi^+ + e^{i \frac{\beta - \alpha}{2}} \overline{\varphi^+} \right) + |c| e^{-i \frac{\alpha + \beta}{2}} \left(e^{i \frac{\gamma - \delta}{2}} \varphi^- + e^{i \frac{\delta - \gamma}{2}} \overline{\varphi^-} \right) = f \cdot e^{-i \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}}.$$

Перепишем это равенство в виде:

$$2|a| e^{-i \frac{\gamma + \delta}{2}} \text{Re} \left(e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}} \varphi^+ \right) + 2|c| e^{-i \frac{\alpha + \beta}{2}} \text{Re} \left(e^{i \frac{\gamma - \delta}{2}} \varphi^- \right) = f \cdot e^{-i \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}}.$$

Исключая φ^+ и φ^- , при $\xi \in (-\infty, r_1) \cup (r_2, r_3)$ получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(2|a| e^{-i \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}} \cdot \operatorname{Re} \left(e^{i \frac{\alpha-\beta}{2}} \varphi^+ \right) \right) &= \operatorname{Im} \left(f \cdot e^{-i \frac{\gamma+\delta}{2}} \right), \\ \operatorname{Im} \left(2|c| e^{-i \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}} \cdot \operatorname{Re} \left(e^{i \frac{\gamma-\delta}{2}} \varphi^- \right) \right) &= \operatorname{Im} \left(f \cdot e^{-i \frac{\alpha+\beta}{2}} \right). \end{aligned}$$

Предположив для простоты, что $\sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}$ нигде не обращается в нуль, находим

$$e^{i \frac{\alpha-\beta}{2}} \varphi^+ + e^{i \frac{\beta-\alpha}{2}} \varphi^+ = \frac{\operatorname{Im} \left(f \cdot e^{-i \frac{\gamma+\delta}{2}} \right)}{|a| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, \quad (6)$$

$$e^{i \frac{\gamma-\delta}{2}} \varphi^- + e^{i \frac{\delta-\gamma}{2}} \varphi^- = -\frac{\operatorname{Im} \left(f \cdot e^{-i \frac{\alpha+\beta}{2}} \right)}{|c| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}. \quad (7)$$

При $\xi \in (r_1, r_2) \cup (r_3, +\infty)$, учитывая тождество (3), из (1) получим

$$a(\xi)\varphi^+(\xi) + c(\xi)\varphi^-(\xi) = f(\xi). \quad (8)$$

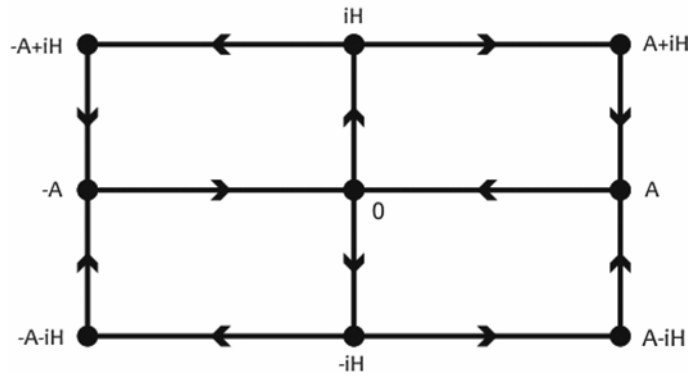
Таким образом, при сделанных предположениях задача (1) сводится к краевой задаче на плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ с краевыми условиями (6), (7) при $\xi \in (-\infty, r_1) \cup (r_2, r_3)$ и (8) при $\xi \in (r_1, r_2) \cup (r_3, +\infty)$. Данная краевая задача допускает решение в замкнутой форме [2]. Наша цель — найти аналитическое выражение для общего решения однородной задачи ($f(\xi) = 0$).

С этой целью построим функцию

$$z = z(\zeta) = \int_{+\infty}^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_1 t - g_2}} = \int_{+\infty}^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt{4(t-r_1)(t-r_2)(t-r_3)}}, \quad \zeta = \wp(z, g_1, g_2),$$

реализующую конформный гомеоморфизм верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} \zeta > 0$) на прямоугольник со следующим соответствием граничных точек: $z(\infty) := 0$, $z(r_3) := -A$, $z(r_2) := -A - iH$, $z(r_1) := -iH$. Ветвь корня, стоящего под знаком интеграла, выбрана так, что при $t > r_3$ будет $\sqrt{t(t-r_1)(t-r_2)(t-r_3)} > 0$. Отображающую функцию продолжим аналитически через интервал $(r_3, +\infty)$ в нижнюю полуплоскость. Получим гомеоморфизм плоскости $\mathbb{C} \setminus (-\infty, r_3]$ на прямоугольник с вершинами 0 , $-A$, $-A \pm iH$, $\pm iH$. Введем новую неизвестную функцию $\Phi(z) = \varphi(\wp(z))$, которая продолжается в правый прямоугольник (см. рисунок) по принципу симметрии $\Phi(z) = -\overline{\Phi(-\bar{z})}$. Выполняется условие симметрии

$$\begin{cases} \Phi(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}, \\ -\Phi(z) = \overline{\Phi(-\bar{z})}. \end{cases}$$



Фундаментальная область

Функция $\zeta = \wp(z)$, обратная к функции $z = z(\zeta)$, как известно, является двоякопериодической с основными периодами $2A$ и $2iH$. Поэтому новая неизвестная функция $\Phi(z)$ – из этого же класса функций.

Введем в качестве фундаментальной области прямоугольник Π с контуром K и вершинами $0, \pm A, \pm A \pm iH, \pm iH$ (см. рисунок). Части контура обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} K_1^\circ: 0 < x < A, y = 0; & \quad K_2^\circ: -A < x < 0, y = 0; \\ K_3^\circ: 0 < x < A, y = -H; & \quad K_4^\circ: -A < x < 0, y = H; \\ K_5^\circ: x = 0, 0 < y < H; & \quad K_6^\circ: x = 0, -H < y < 0; \\ K_7^\circ: x = A, -H < y < 0; & \quad K_8^\circ: x = -A, 0 < y < H, \end{aligned}$$

где индекс \circ символизирует множество внутренних точек.

Таким образом, $K = \prod_{j=1}^8 K_j$. Исходя из равенств (6), (7), запишем краевые условия, которым удовлетворяет функция Φ на вертикальных составляющих контура

$$\Phi^+(iy) = -e^{i(\beta-\alpha)}\Phi^-(iy) + \frac{e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \operatorname{Im} \left(f \cdot e^{-i\frac{\gamma+\delta}{2}} \right)}{|a| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, \quad y \in K_5^\circ, \quad (9)$$

$$\Phi^+(iy) = -e^{i(\gamma-\delta)}\Phi^-(iy) + \frac{e^{-i\frac{\delta-\gamma}{2}} \operatorname{Im} \left(f \cdot e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \right)}{|c| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, \quad y \in K_6^\circ, \quad (10)$$

$$\Phi^+(A-iy) = -e^{i(\beta-\alpha)}\Phi^-(A-iy) + \frac{e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} \operatorname{Im} \left(f \cdot e^{-i\frac{\gamma+\delta}{2}} \right)}{|a| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, \quad y \in K_7^\circ, \quad (11)$$

$$\Phi^+(-A+iy) = -e^{i(\gamma-\delta)}\Phi^-(A+iy) + \frac{e^{-i\frac{\delta-\gamma}{2}} \operatorname{Im} \left(f \cdot e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} \right)}{|c| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, \quad y \in K_8^\circ. \quad (12)$$

Учитывая условие (8), на горизонтальных составляющих контура получим:

$$\Phi^+(x) = -\frac{c}{a}\Phi^-(x) + \frac{f}{a}, \quad x \in K_1^\circ, \quad (13)$$

$$\Phi^+(x) = -\frac{a}{c}\Phi^-(x) + \frac{\bar{f}}{c}, \quad x \in K_2^\circ, \quad (14)$$

$$\Phi^+(x-iH) = -\frac{c}{a}\Phi^-(x+iH) + \frac{f}{a}, \quad x \in K_3^\circ, \quad (15)$$

$$\Phi^+(-x+iH) = -\frac{a}{c}\Phi^-(-x-iH) + \frac{\bar{f}}{c}, \quad x \in K_4^\circ. \quad (16)$$

Таким образом, задача свелась к задаче Римана, решения которой мы ищем в классе ограниченных функций с основными периодами $2A$ и $2iH$

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in K^\circ, \quad (17)$$

где

$$G(t) = \begin{cases} -e^{i(\beta-\alpha)}, & t \in K_5^\circ, t \in K_7^\circ, \\ -e^{i(\gamma-\delta)}, & t \in K_6^\circ, t \in K_8^\circ \\ -\frac{c}{a}, & t \in K_1^\circ, t \in K_3^\circ, \\ -\frac{a}{c}, & t \in K_2^\circ, t \in K_4^\circ, \end{cases} \quad g(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{i(\alpha-\beta)}{2}} \operatorname{Im} \left(f \cdot e^{-\frac{i(\gamma+\delta)}{2}} \right)}{|a| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, & t \in K_5^\circ, t \in K_7^\circ, \\ \frac{e^{-\frac{i(\delta-\gamma)}{2}} \operatorname{Im} \left(f \cdot e^{-\frac{i(\alpha+\beta)}{2}} \right)}{|c| \sin \frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}}, & t \in K_6^\circ, t \in K_8^\circ, \\ \frac{f}{a}, & t \in K_1^\circ, t \in K_3^\circ, \\ \frac{\bar{f}}{c}, & t \in K_2^\circ, t \in K_4^\circ. \end{cases}$$

Рассмотрим однородную задачу сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad t \in K^\circ. \quad (18)$$

При решении этой задачи применим метод, изложенный в работе [2]. Аппаратом решения служит аналог интеграла типа Коши. Для построения такого интеграла нужен аналог ядра Коши. Используем функцию Вейерштрасса $\zeta(z)$, квазипериодическую, которая имеет единственный простой полюс в точке $z=0$ с вычетом, равным единице. Известно [1], что она нечетная, на вещественной оси принимает вещественные значения, на мнимой – мнимые и удовлетворяет условию симметрии. Тогда разрывный аналог ядра Коши [2] можно задать следующим образом:

$$\hat{\omega}(\tau-z)d\tau = \left[\zeta(\tau-z) - \frac{\zeta\left(\tau - \frac{A+iH}{2}\right) + \zeta\left(\tau - \frac{A-iH}{2}\right) + \zeta\left(\tau - \frac{-A+iH}{2}\right) + \zeta\left(\tau - \frac{-A-iH}{2}\right)}{4} \right] d\tau -$$

$$\frac{d\tau}{2A} \int_{-A-iH}^{A-iH} \left[\zeta(\xi-\tau) - \frac{\zeta\left(\tau - \frac{A+iH}{2}\right) + \zeta\left(\tau - \frac{A-iH}{2}\right) + \zeta\left(\tau - \frac{-A+iH}{2}\right) + \zeta\left(\tau - \frac{-A-iH}{2}\right)}{4} \right] d\xi.$$

Точки выбираем таким образом, чтобы в первом слагаемом сумма вычетов в выбранных точках и в точке $\tau = z$ была равна нулю; вторым слагаемым добиваемся нормировки. Точки τ и z принадлежат основному прямоугольнику Π .

На каждой составляющей контура K произвольно выделим и зафиксируем однозначную непрерывную ветвь логарифма $\ln G_j(t)$ при $t \in K_j$. Полагая $\ln G(t) := \sum_j \ln G_j(t)$, $j = \overline{1,8}$, введем кусочно-аналитическую функцию

$$\mathcal{X}(z) = e^{\Gamma(z)}, \text{ где } \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \ln G(\tau) \hat{\omega}(\tau - z) d\tau, \quad (19)$$

а $\hat{\omega}(\tau - z)$ – введенный выше разрывный аналог ядра Коши. В силу комплексной нормировки аналог ядра Коши разрывен только на линии a , на которой выполняется равенство

$$\hat{\omega}^+(\tau - t) - \hat{\omega}^-(\tau - t) = -2\pi i \cdot dw(t), \quad t \in a, \quad (20)$$

где a – линия $[-A - iH, -A + iH]$, а $dw(t)$ – комплексно нормированный абелев дифференциал 1-го рода, т. е. такой, что $\int_a dw(t) = 1$, а следовательно, $dw(t) = \frac{dt}{2A}$.

Используя формулы Сохоцкого для интеграла (19) и соотношение (20), получим:

$$\mathcal{X}^+(t) = G(t) \mathcal{X}^-(t), \quad t \in (K \setminus a)^\circ, \quad (21)$$

$$\mathcal{X}^+(t) = \exp \left\{ \int_K \ln G(\tau) \frac{d\tau}{2A} \right\} G(t) \mathcal{X}^-(t), \quad t \in a. \quad (22)$$

Вычислим индекс \varkappa коэффициента $G(t)$ задачи. Известно, что $\varkappa = \sum_{i=1}^4 \varkappa_i$. Применяя свойства аргумента, находим:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= \left[\frac{1}{\pi} \arg \frac{c}{a}(-0) - \frac{1}{2\pi} (\beta(+0i) - \alpha(+0i) + \gamma(+0i) - \delta(+0i)) \right], \\ \varkappa_2 &= \left[\frac{1}{2\pi} (\beta(-0i) - \alpha(-0i) + \gamma(-0i) - \delta(-0i)) - \frac{1}{\pi} \arg \frac{c}{a}(+A) \right], \\ \varkappa_3 &= \left[\frac{1}{\pi} \arg \frac{c}{a}(-A) - \frac{1}{2\pi} (\beta(+iH) - \alpha(+iH) + \gamma(+iH) - \delta(+iH)) \right], \\ \varkappa_4 &= \left[\frac{1}{2\pi} (\beta(-iH) - \alpha(-iH) + \gamma(-iH) - \delta(-iH)) - \frac{1}{\pi} \arg \frac{c}{a}(+0) \right]. \end{aligned}$$

Здесь квадратные скобки означают целую часть. Индекс задачи выражается через индекс \varkappa коэффициента $G(t)$ и род поверхности h по формуле: $l - l' = \varkappa - h + 1$. Так как $h = 1$, то $l - l' = \varkappa - l - l' = \varkappa$, где l и l' – числа решений исходной и союзной к ней задачи. Таким образом, при $\varkappa \neq 0$ возможны следующие ситуации:

$$\begin{cases} \varkappa < 0 \\ l = 0 \end{cases}, \text{ то } l' = |\varkappa| \text{ или } \begin{cases} \varkappa > 0 \\ l' = 0 \end{cases}, \text{ то } l = |\varkappa|.$$

Вводим дивизор $\mathcal{E} := (t_1)^{\varkappa_1} (t_2)^{\varkappa_2} (t_3)^{\varkappa_3} (t_4)^{\varkappa_4}$, $\text{ord } \mathcal{E} = \varkappa$ и новую кусочно-мероморфную функцию

$$\hat{\varphi}(z) := \frac{\Phi(z)}{\mathcal{X}(z)},$$

разрывную на контуре K , где t_1, t_2, t_3, t_4 точки разрыва коэффициента $G(t)$ задачи. Функция $\hat{\varphi}$ разрывна на линии a , на которой условия сопряжения получаются, если разделить равенство (18) на равенства (21) и (22). Таким образом, однородная задача (18) преобразуется к виду

$$\hat{\varphi}^+(t) = \hat{\varphi}^-(t), \quad t \in (K \setminus a)^\circ, \quad (23)$$

$$\hat{\varphi}^+(t) = \hat{\varphi}^-(t) \exp \left\{ \int_K \ln G(t) \right\}, \quad t \in a. \quad (24)$$

В силу теоремы об аналитическом продолжении функция $\hat{\varphi}$ аналитична на линии $(K \setminus a)^\circ$, поэтому равенство (23) можно отбросить. Общее решение однородной задачи (18) имеет вид:

$$\Phi(z) = \hat{\varphi}(z) \mathcal{X}(z). \quad (25)$$

Для решения задачи сопряжения (24) введем новую неизвестную функцию

$$\varphi(z) := \hat{\varphi}(z) \cdot \exp \left\{ \int_{\tilde{q}}^{q_1} \hat{\omega}(\tau - z) d\tau \right\}, \quad (26)$$

где $\tilde{q} \in \Pi$ – произвольно зафиксированная точка, $q_1 \in \Pi$ – пока неизвестная точка, а путь интегрирования полностью лежит в прямоугольнике Π . Точку q_1 мы пытаемся подобрать так, чтобы функция $\varphi(z)$ не имела линий разрыва, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t), \quad t \in a.$$

Учитывая это, из равенства (26) получим:

$$\hat{\varphi}^+(z) \exp \left\{ \int_{\tilde{q}}^{q_1} \hat{\omega}^+(\tau - z) dz \right\} = \hat{\varphi}^-(z) \exp \left\{ \int_{\tilde{q}}^{q_1} \hat{\omega}^-(\tau - z) dz \right\}.$$

В силу условия (24), исключая функции $\hat{\varphi}^\pm$, приходим к следующему:

$$\exp \int_a \ln G(t) \frac{dt}{2A} = \exp \int_{\tilde{q}}^{q_1} \left(\hat{\omega}^-(\tau - t) - \hat{\omega}^+(\tau - t) \right) d\tau.$$

Из равенства экспонент следует, что их показатели отличаются на числа, целократные $2\pi i$. Следовательно,

$$2\pi i \int_{\tilde{q}}^{q_1} \frac{dt}{2A} = \int_a \ln G(t) \frac{dt}{2A} + 2\pi i n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Введем в рассмотрение комплексно-нормированный абелев интеграл первого рода с нижним пределом \tilde{q}

$$w(q) = \int_{\tilde{q}}^q dw(t),$$

где штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования не пересекает линий канонического рассечения. Тогда уравнение (27) может быть записано в виде:

$$w(q_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_a \ln G(t) \frac{dt}{2A} + n + \frac{iH}{A} m. \quad (28)$$

Проблема нахождения точки q_1 из уравнения (28) носит название проблемы обращения Якоби. Обычно она записывается как система сравнений по модулю периодов базиса абелевых дифференциалов первого рода в следующем виде:

$$w(q_1) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int \ln G(t) \frac{dt}{2A} \pmod{\text{периодов}}.$$

Следовательно,

$$q_1 = \tilde{q} + \frac{1}{2\pi i} \int \ln G(t) dt + 2An + 2iHm.$$

Положим $\tilde{q} = 0$, тогда для q_1 должно выполняться условие:

$$0 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2H} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2\pi i} \int \ln G(t) dt \right) + m < 1.$$

Отсюда

$$m = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2H} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{2\pi i} \int \ln G(t) dt \right) \right],$$

где квадратные скобки означают целую часть. Таким образом, точка q_1 и число m найдены. Подставляя выражение для $\hat{\varphi}(z)$ из (26) в (25), находим общее решение однородной задачи:

$$\Phi(z) = \varphi(z) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int \ln G(z) \hat{\omega}(\tau - z) - \int_0^{q_1} \hat{\omega}(\tau - z) + 2\pi i m \frac{z}{2A} \right\}, \quad (29)$$

где φ – произвольная эллиптическая функция, кратная дивизору $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{E}^{-1}$, $\mathcal{E} := (t_1)^{\varkappa_1} (t_2)^{\varkappa_2} (t_3)^{\varkappa_3} (t_4)^{\varkappa_4}$, $\mathcal{F} = (0)(q_1)^{-1}$, $\operatorname{ord} \mathcal{E} = \varkappa$, $\operatorname{ord} \mathcal{F} = 0$. Общее решение однородной задачи (18) построено.

Литература

1. А х и е з е р Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М., 1970.
2. Z v e r o v i c h E. I. // Compl. anal. oper. Theory. 2008. Vol. 2. P. 709–732.

E. V. DAVYALOVA

MARKUSHEVICH'S PROBLEM WITH THREE DISCONTINUITY POINTS

Summary

The author considered the boundary-value homogeneous problem

$$a(\xi)\varphi^+(\xi) + b(\xi)\overline{\varphi^+(\xi)} + c(\xi)\varphi^-(\xi) + d(\xi)\overline{\varphi^-(\xi)} = f(\xi), \quad \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2, r_3\}$$

of finding the function $\varphi(\xi)$ and solved it in a class of bounded functions.

УДК 517.968

А. П. ГРИНЬКО

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
ЛОКАЛЬНЫХ ДРОБНЫХ ИНТЕГРАЛОВ**

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина

(Поступила в редакцию 11.02.2009)

Введение. Хорошо известны ([1, с. 219], [3, т. 3, с. 271]) асимптотические представления дробного интеграла Римана–Лиувилля

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

при $x \rightarrow 0$ и для более общих интегралов типа свертки с переменным верхним пределом [2]

$$\Omega(x) = \int_0^x F(x-t) f(t) dt,$$

при $x \rightarrow \infty$, если известна степенная асимптотика функции $f(x)$ вблизи этих точек.

Настоящая работа посвящена рассмотрению асимптотических представлений локальных дробных интегралов типа Римана–Лиувилля

$$(I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad -\infty < a \leq x \leq b < \infty, \quad (1)$$

введенных в работе [4], при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow \infty$, а также в случае фиксированного ε при $x \rightarrow \infty$.

1. Предварительные сведения. Пусть $\{\mu_n\}$ – возрастающая последовательность действительных чисел и $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$, x_0 – некоторое действительное число. Предположим также, что функция $\varphi(x)$ имеет следующие асимптотики:

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0)(x-x_0)^{\mu_n} \quad \text{при } x \rightarrow x_0; \quad (2)$$

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n-\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Воспользуемся следующими обозначениями: ${}_2F_1(\gamma, \beta; \alpha; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса [5]. Заметим, что для $|z| < 1$, $0 < \operatorname{Re} \gamma < \operatorname{Re} \alpha$ имеет место представление:

$${}_2F_1(\gamma, \beta; \alpha; z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\gamma)_i (\beta)_i}{(\alpha)_i} \frac{z^i}{i!} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\gamma)} \int_0^1 u^{\gamma-1} (1-u)^{\alpha-\gamma-1} (1-uz)^{-\beta} du, \quad (4)$$

где $(\beta)_0 = 1$, $(\beta)_k = \beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)$, $k=1, 2, \dots$, $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$ – символ Похгаммера.

Определим семейство функций:

$$\left[\begin{array}{l} g_0^*(t) = (1-t)^{\alpha-1}, \quad g_1(t) = g_0^*(t) - g_0^*(0); \\ g_1^*(t) = \frac{g_1(t)}{t}, \quad g_2(t) = g_1^*(t) - g_1^*(0); \\ \dots, \quad \dots; \\ g_{n-1}^*(t) = \frac{g_{n-1}(t)}{t}, \quad g_n(t) = g_{n-1}^*(t) - g_{n-1}^*(0); \dots \end{array} \right]. \quad (5)$$

Из (5) непосредственно следует:

$$g_n^*(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(1-\alpha-n+1)(1-t)^{\alpha-1-n}}{1 \cdot 2 \dots n} = \frac{(1-\alpha)_n}{n!}, \quad (6)$$

$$g_n^*(t) = \frac{(1-t)^{\alpha-1} - 1}{t^n} - \frac{(1-\alpha)}{t^{n-1}} - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{2t^{n-2}} - \dots - \frac{(1-\alpha)_{n-1}}{(n-1)!t} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} t^{k-n}. \quad (7)$$

Приведем примеры вычисления локального дробного интеграла от степенной функции, необходимые нам в дальнейшем.

Пусть $\varphi(x) = (x-x_0)^\nu$, с учетом (4), для $x_0 \leq x \leq x_0 + 2\varepsilon$ и $\nu > -\alpha$ имеем:

$$I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x) = \frac{\Gamma(1+\nu)(x-x_0)^{\nu+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha+\nu)} - \frac{\varepsilon^{\alpha-1}(x_0-x+\varepsilon)^{\nu+1}}{\Gamma(\alpha)(1+\nu)} {}_2F_1\left(1-\alpha, 1; 2+\nu; \frac{x_0-x+\varepsilon}{\varepsilon}\right); \quad (8)$$

если $x \leq x_0$ и $\nu > -\alpha$, то можем записать:

$$I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x) = -I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(-x) = -\frac{\varepsilon^\alpha (x_0-x+\varepsilon)^\nu}{\Gamma(1+\alpha)} {}_2F_1\left(-\nu, 1; 1+\alpha; \frac{\varepsilon}{x_0-x+\varepsilon}\right). \quad (9)$$

Из представлений (8) и (9) следует, что для $\nu > -\alpha$ локальный дробный интеграл от степенной функции $\varphi(x) = (x-x_0)^\nu$ непрерывен в точке $x = x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \left(I^{\alpha, -\varepsilon} (x-x_0)^\nu \right) = -\lim_{x \rightarrow x_0-0} \left(I^{\alpha, -\varepsilon} (x_0-x)^\nu \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha+\nu)} \varepsilon^{\alpha+\nu}. \quad (10)$$

2. Асимптотические представления локальных дробных интегралов. Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (2) и $\mu_0 > -\alpha$, тогда локальный дробный интеграл (1) непрерывен в каждой действительной точке x_0

$\lim_{x \rightarrow x_0} I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x) = I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x_0)$, и при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место следующее асимптотическое представление:

$$I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x_0) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x_0)}{(\alpha + \mu_n)} \varepsilon^{\alpha + \mu_n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из представления (2) следует, что для функции $\varphi(x)$ можно записать:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^N a_n(x_0)(x-x_0)^{\mu_n} + R_N(x-x_0), \quad R_N(x-x_0) = (x-x_0)^{\mu_N} \nu(x-x_0),$$

где $\lim_{x \rightarrow x_0} \nu(x-x_0) = 0$. Тогда локальный дробный интеграл от функции $\varphi(x)$ для $x \neq x_0$, $\mu_0 > -\alpha$

и достаточно малых ε , с учетом равенств (8) и (9), можно представить в виде:

$$I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n(x_0)}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} (t-x_0)^{\mu_n} dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} R_N(t-x_0) dt = \begin{cases} \Psi_1(x) + r_N(x), & \text{если } x_0 \leq x \leq x_0 + 2\varepsilon, \\ \Psi_2(x) + r_N(x), & \text{если } x \leq x_0, \end{cases}$$

где

$$\Psi_1(x) = \sum_{n=1}^N a_n(x_0) \left(\frac{\Gamma(1+\mu_n)(x-x_0)^{\mu_n+\alpha}}{\Gamma(1+\alpha+\mu_n)} - \frac{\varepsilon^{\alpha-1}(x_0-x+\varepsilon)^{\mu_n+1}}{\Gamma(\alpha)(1+\mu_n)} {}_2F_1\left(1-\alpha, 1; 2+\mu_n; \frac{x_0-x+\varepsilon}{\varepsilon}\right) \right),$$

$$\Psi_2 = - \sum_{n=0}^N a_n(x_0) \frac{\varepsilon^\alpha (x_0-x+\varepsilon)^{\mu_n}}{\Gamma(1+\alpha)} {}_2F_1\left(-\mu_n, 1; 1+\alpha; \frac{\varepsilon}{x_0-x+\varepsilon}\right),$$

$$r_N(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} (t-x_0)^{\mu_N} v(t-x_0) dt. \quad (11)$$

Функция $v(t-x_0)$ непрерывна, а функция $(x-t)^{\alpha-1}(t-x_0)^{\mu_N}$, при $\mu_N + \alpha > 0$ интегрируема для произвольного x . Следовательно, по теореме о среднем существует такое $0 \leq \theta \leq 1$, что верно равенство:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} (t-x_0)^{\mu_N} v(t-x_0) dt = v(x-\theta\varepsilon-x_0) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x-\varepsilon}^x (x-t)^{\alpha-1} (t-x_0)^{\mu_N} dt = \begin{cases} \frac{\Gamma(1+\mu_N)v(x-\theta\varepsilon-x_0)}{(x-x_0)^{-\mu_N-\alpha}\Gamma(1+\alpha+\mu_N)} - \frac{\varepsilon^{\alpha-1}(x_0-x+\varepsilon)^{\mu_N+1}}{v^{-1}(x-\theta\varepsilon-x_0)\Gamma(\alpha)(1+\mu_N)} {}_2F_1\left(1-\alpha, 1; 2+\mu_N; \frac{x_0-x+\varepsilon}{\varepsilon}\right), & \text{если } x_0 \leq x \leq x_0 + 2\varepsilon; \\ - \frac{\varepsilon^\alpha v(x-\theta\varepsilon-x_0)(x_0-x+\varepsilon)^{\mu_N}}{\Gamma(1+\alpha)} {}_2F_1\left(-\mu_N, 1; 1+\alpha; \frac{\varepsilon}{x_0-x+\varepsilon}\right), & \text{если } x \leq x_0. \end{cases} \quad (12)$$

Следовательно, используя равенства (11), (12) и (10), имеем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^N \frac{a_n(x_0)}{(\alpha + \mu_n)} \varepsilon^{\alpha + \mu_n} + v(\theta\varepsilon) \frac{1}{\Gamma(\alpha)(\alpha + \mu_N)} \varepsilon^{\alpha + \mu_N},$$

где $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\theta\varepsilon) = 0$, что заканчивает доказательство теоремы.

Т е о р е м а 2. Пусть функция $\varphi(x)$ локально интегрируема на $(0; +\infty)$ и удовлетворяет условию (3) с $0 < \beta < 1$. Тогда локальный дробный интеграл $I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x)$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x+\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1-n-\beta)a_n}{\Gamma(1+\alpha-n-\beta)} \varepsilon^{\alpha-n-\beta} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(x)}{\Gamma(1+\alpha-n)} \varepsilon^{\alpha-n},$$

где

$$b_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} \varphi_n(t+x) t^{-\beta} dt,$$

$$\varphi_1(t+x) = t^\beta \varphi(t+x) - a_0, \dots, \varphi_{n+1}(t+x) = t \varphi_n(t+x) - a_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся доказательством асимптотического разложения дробного интеграла Римана–Лиувилля (теорема 16.2 из [1]). После замен:

$$\begin{cases} t - x = \varepsilon\tau; & dt = \varepsilon d\tau; \\ t = x + \varepsilon\tau; & x + \varepsilon - t = \varepsilon(1 - \tau) \end{cases} \quad (14)$$

можем записать:

$$I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x + \varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{x+\varepsilon} (x + \varepsilon - t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = \frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\alpha-1} \varphi(\varepsilon\tau + x) d\tau. \quad (15)$$

Используем подстановки

$$\begin{cases} \varphi_1(\varepsilon\tau + x) = (\varepsilon\tau)^\beta \varphi(\varepsilon\tau + x) - a_0; \\ \dots; \\ \varphi_{n+1}(\varepsilon\tau + x) = \varepsilon\tau\varphi_n(\varepsilon\tau + x) - a_n. \end{cases}, \quad (16)$$

тогда равенство (15) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x + \varepsilon) &= \int_0^1 \frac{\varepsilon^\alpha (1 - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\varepsilon\tau)^{-\beta} (\varphi_1(\varepsilon\tau + x) + a_0) d\tau = \\ &= \int_0^1 \frac{\varepsilon^{\alpha-\beta} (1 - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) \tau^\beta} \varphi_1(\varepsilon\tau + x) d\tau + \frac{\varepsilon^{\alpha-\beta} a_0 \Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} = \frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)} I(x; \varepsilon) + \frac{\varepsilon^{\alpha-\beta} a_0 \Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Равенство (17) соответствует равенству (16.14) из [1], доказанному с неточностями, поэтому докажем его заново. С учетом подстановок (16), (5), (6) и (7) можем записать:

$$(1-t)^{\alpha-1} = g_1(t) + 1, \quad \frac{g_{n-1}^*(t)}{t} = g_n^*(t) + \frac{g_{n-1}^*(0)}{t}, \quad \varphi_n(\varepsilon t + x) = (\varepsilon t)^{-1} (\varphi_{n+1}(\varepsilon t + x) + a_n(x)).$$

Тогда для $\varepsilon^\beta I(x; \varepsilon)$ из равенства (17) имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \varepsilon^\beta I(x; \varepsilon) &= \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{-\beta} \varphi_1(\varepsilon t + x) dt = \int_0^1 g_1(t) t^{-\beta} \varphi_1(\varepsilon t + x) dt + \int_0^1 t^{-\beta} \varphi_1(\varepsilon t + x) dt = \\ &= \int_0^1 g_1(t) t^{-\beta} (\varepsilon t)^{-1} (\varphi_2(\varepsilon t + x) + a_1) dt + \int_0^1 t^{-\beta} \varphi_1(\varepsilon t + x) dt = \dots = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^1 \varphi_{N+1}(\varepsilon t + x) g_N^*(t) t^{-\beta} dt + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{\varepsilon^k} \int_0^1 g_k^*(t) t^{-\beta} dt + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^k} \int_0^1 \varphi_{k+1}(\varepsilon t + x) t^{-\beta} dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Оценим третье слагаемое из правой части равенства (18). После подстановки

$$t\varepsilon = \tau, \quad (19)$$

с учетом (7) и того, что для достаточно больших ε $\varphi_{k+1}(\varepsilon t + x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} (\varepsilon t)^{-n}$, и все $t^{-\beta} \varphi_{k+1}(\varepsilon t + x) = t^k \varphi(t + x) - \sum_{n=0}^k a_n t^{k-\beta-n}$ интегрируемы на $(0; +\infty)$, имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^k} \int_0^1 \frac{\varphi_{k+1}(\varepsilon t + x)}{t^\beta} dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} \int_0^\varepsilon \varphi_{k+1}(\tau + x) \left(\frac{\varepsilon}{\tau}\right)^\beta dt \sim \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1-\beta}} \int_0^\infty \frac{\varphi_{k+1}(\tau + x)}{\tau^\beta} dt - \\ &\sim \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1-\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k} \int_\varepsilon^\infty \tau^{-n-\beta} dt \sim \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1-\beta}} \int_0^\infty \varphi_{k+1}(\tau + x) t^{-\beta} dt + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+k} \varepsilon^{-k-n}}{1-n-\beta}. \end{aligned} \quad (20)$$

Чтобы оценить первое слагаемое в правой части равенства (18), воспользуемся (20) и рядом Тейлора функции

$$(1-t)^{\alpha-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} t^k, \quad -1 < t < 1.$$

Тогда с учетом (7) и подстановки (19) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^1 \varphi_{N+1}(\varepsilon t + x) g_N^*(t) t^{-\beta} dt &= \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varphi_{N+1}(\tau + x)}{\varepsilon^{N+1}} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{k-\beta-N} d\tau + \\ &\frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon} \varphi_{N+1}(\tau + x) \left(\left(1 - \frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{-N-\beta} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{k-N-\beta} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{k-N} &= [k-N=l] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_{l+N}}{(l+N)!} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^l = (1-\alpha)_{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha+N)_l}{(l+N)!} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^l \leq \\ &(1-\alpha)_{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha+N)_l}{(l)!} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^l = (1-\alpha)_{N-1} \left(1 - \frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{\alpha-N-1} \end{aligned}$$

есть непрерывная по τ на $\left[0; \frac{\varepsilon}{2}\right]$ функция и $\varphi_{N+1}(\tau + x) \tau^{-\beta}$ интегрируема на $(0; +\infty)$, то, применив формулу среднего значения для определенного интеграла, можем записать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^1 \varphi_{N+1}(\varepsilon t + x) g_N^*(t) t^{-\beta} dt &\sim \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{\varepsilon^{N+1} k!} \left(\frac{\theta_1 \varepsilon}{\varepsilon 2}\right)^{k-N} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi_{N+1}(\tau + x) \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{-\beta} d\tau + \\ &\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+N}}{\varepsilon^{N+1+n}} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{-n} \left(1 - \frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)^{-N-\beta} d\tau - \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+N} \tau^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{N+1+k-N-\beta}} \tau^{k-N-\beta} d\tau \sim \\ &\frac{1}{\varepsilon^{N+1-\beta}} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \left(\frac{\theta_1}{2}\right)^{k-N} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi_{N+1}(\tau + x) \tau^{-\beta} d\tau + \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+N}}{\alpha \varepsilon^{n-1}} \theta_2^{-n-N-\beta} - \\ &\frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+N}}{\varepsilon^{n-1}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! (1-n+k-N-\beta)} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{1-n+k-N-\beta}\right) = O(\varepsilon^{\beta-N-1}). \end{aligned} \quad (21)$$

Используя (7), (21) и (20), оценим $I(x; \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} I(x; \varepsilon) &= O(\varepsilon^{-N-1}) + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\varepsilon^{n+\beta}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \int_0^1 t^{k-n-\beta} dt + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} \int_0^1 \varphi_{k+1}(t+x) t^{-\beta} dt + \\ &\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{1-n-\beta} \varepsilon^{-k-n-\beta} = O(\varepsilon^{-N-1}) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} \int_0^1 \varphi_{k+1}(t+x) t^{-\beta} dt + \\ &\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\varepsilon^{n+\beta}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k! (k-n-\beta+1)} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \sum_{n=1+k}^{\infty} \frac{a_n}{1-n+k-\beta} \varepsilon^{-n-\beta}. \end{aligned} \quad (22)$$

Перегруппируем два последних слагаемых равенства (22), выбирая из двух сумм выражения при одинаковых $a_n(x)$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\varepsilon^{n+\beta}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!(k-n-\beta+1)} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k!} \sum_{n=1+k}^{\infty} \frac{a_n}{1-n+k-\beta} \varepsilon^{-n-\beta} &= \frac{a_1}{\varepsilon^{1+\beta}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!(k-\beta)} + \frac{1}{-\beta} \right) + \dots + \\ & \frac{a_N}{\varepsilon^{N+\beta}} \left(\sum_{k=N}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!(k-N-\beta+1)} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k!(k-N-\beta+1)} \right) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{N+1+\beta}}\right) = \\ & \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\varepsilon^{n+\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k (1-n-\beta)_k}{(1-n-\beta)k!(2-n-\beta)_k} + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{N+1+\beta}}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда для локального дробного интеграла $I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x + \varepsilon)$ с учетом равенства (17) и оценок (22) и (23) окончательно получаем:

$$\begin{aligned} I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x + \varepsilon) &= \frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\varepsilon^{n+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-n-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-n-\beta)} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^n \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k) k! \varepsilon^{k+1}} \int_0^\infty \varphi_{k+1}(t+x) t^{-\beta} dt + \right. \\ & O\left(\varepsilon^{-N-1}\right) \left. \right) + \frac{\varepsilon^{\alpha-\beta} a_0 \Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{\varepsilon^{n+\beta-\alpha}} \frac{\Gamma(1-n-\beta)}{\Gamma(1+\alpha-n-\beta)} + \\ & \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha-k) k! \varepsilon^{k+1-\alpha}} \int_0^\infty \varphi_{k+1}(t+x) t^{-\beta} dt + O\left(\varepsilon^{-N-1+\alpha}\right). \end{aligned}$$

Последняя оценка после подстановки $k+1=n$ завершает доказательство теоремы.

Т е о р е м а 3. Пусть функция $\varphi(x)$ локально интегрируема и имеет асимптотическое представление (3) с $\beta=1$. Тогда локальный дробный интеграл $I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x)$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x + \varepsilon) \sim \ln(\varepsilon) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\Gamma(\alpha-n) n!} \varepsilon^{\alpha-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) \varepsilon^{\alpha-n-1},$$

где

$$b_0(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(a_0 \int_0^1 \frac{(1-t)^{1-\alpha} - 1}{t} dt + d_1(x) \right), \quad b_n(x) = \frac{a_n}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_k}{k!(k-n)} + \frac{(-1)^n d_{n+1}(x)}{\Gamma(\alpha-n) n!},$$

$$n=1, 2, \dots, \quad d_{n+1}(x) = \int_0^1 \varphi_{n+1}(t+x) dt + \int_1^\infty \left(\varphi_{n+1}(t+x) - \frac{a_n}{t} \right) dt, \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_1(t+x) = \varphi(t+x), \quad \varphi_{n+1}(t+x) = t \varphi_n(t+x) - a_{n-1}, \quad n=1, 2, \dots \quad (24)$$

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2. При $\beta=0, a_0=0, a_n=a_{n-1}$ обозначения (13) переходят в обозначения (24), и из равенств (17) и (18) имеем следующее представление:

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\varepsilon^\alpha} \left(I^{-\varepsilon, \alpha} \varphi \right) (x + \varepsilon) = \int_0^1 \frac{\varphi_{N+1}(\varepsilon t + x)}{\varepsilon^N \left(g_N^*(t) \right)^{-1}} dt + \sum_{k=1}^N \frac{a_{k-1}}{\varepsilon^k} \int_0^1 g_k^*(t) dt + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^k} \int_0^1 \varphi_{k+1}(\varepsilon t + x) dt. \quad (25)$$

Для третьего слагаемого равенства (25) можем записать:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^k} \int_0^1 \varphi_{k+1}(\varepsilon t + x) dt &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} \int_0^\varepsilon \varphi_{k+1}(t+x) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} \left(\int_1^\infty \left(\varphi_{k+1}(t+x) - \frac{a_k}{t} \right) dt - \right. \\ & \left. \int_\varepsilon^\infty \left(\varphi_{k+1}(t+x) - \frac{a_k}{t} \right) dt + \int_1^\varepsilon \frac{a_k}{t} dt + \int_0^1 \varphi_{k+1}(t+x) dt \right) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} \left(a_k \ln \varepsilon - \right. \end{aligned}$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \left(\varphi_{k+1}(t+x) - \frac{a_k}{t} \right) dt + \int_0^1 \varphi_{k+1}(t+x) dt + \int_1^{\infty} \left(\varphi_{k+1}(t+x) - \frac{a_k}{t} \right) dt = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} (a_k \ln \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+k-1} t^{-n} dt + d_{k+1}(x)) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} \left(a_k \ln \varepsilon - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{n} \varepsilon^{-n} + d_{k+1}(x) \right). \quad (26)$$

Для оценки первого слагаемого равенства (25) используем оценку (21) при выполнении условий $\beta = 0$, $a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1}$ и оценку (26). Тогда для равенства (25) имеем:

$$\Gamma(\alpha) \varepsilon^{-\alpha} (I^{-\varepsilon, \alpha} \varphi)(x+\varepsilon) = O\left(\frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^{N+1}}\right) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{\varepsilon^{k+1}} \int_0^1 g_{k+1}^*(t) dt + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} (a_k \ln \varepsilon + d_{k+1}(x)) - \sum_{k=0}^{N-2} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} \sum_{n=1}^{N-k-1} \frac{a_{n+k}}{n} \varepsilon^{-n} = \ln \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} a_k + \frac{1}{\varepsilon} \left(a_0 \int_0^1 g_1^*(t) dt + d_1(x) \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\varepsilon^{k+1}} \left(a_k \int_0^1 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_n}{n! t^{k+1-n}} dt + \frac{(1-\alpha)_k}{k!} d_{k+1}(x) \right) - \sum_{k=0}^{N-2} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{n+1}} \sum_{n=1+k}^{N-1} \frac{a_n}{n-k} + O\left(\frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^{N+1}}\right).$$

Перепишем последнее слагаемое по возрастающим индексам a_n и окончательно получим:

$$\Gamma(\alpha) \varepsilon^{-\alpha} (I^{-\varepsilon, \alpha} \varphi)(x+\varepsilon) = \ln \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(1-\alpha)_k}{k! \varepsilon^{k+1}} a_k + \frac{1}{\varepsilon} \left(a_0 \int_0^1 g_1^*(t) dt + d_1(x) \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\varepsilon^{k+1}} \left(a_k \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_n}{n!(n-k)} + \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(1-\alpha)_n}{n!(n-k)} \right) + \frac{(1-\alpha)_k}{k!} d_{k+1}(x) \right) + O\left(\frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^{N+1}}\right).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Асимптотическое разложение локального дробного интеграла по переменной x при выполнении условий (3) имеет вид:

$$I^{\alpha, -\varepsilon} \varphi(x+\varepsilon) = \int_x^{x+\varepsilon} \frac{(x+\varepsilon-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \varphi(t) dt = \frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \varphi(\varepsilon\tau+x) d\tau \sim \frac{\varepsilon^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{\mu_n}.$$

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук А. А. Килбасу за получение консультаций в период пребывания в Белорусском государственном университете.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф08МС-028).

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
2. Риекстыньш Э. Я. // Латв. мат. ежегодник. 1970. Вып. 8. С. 223–239.
3. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов: В 3 т. Т. 3. Рига, 1981.
4. Гринько А. П., Карпук М. М. // Труды Института математики НАН Беларуси. 2004. Т. 12, № 1. С. 46–53.
5. Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3 т. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., 1965.

A. P. GRIN'KO

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF LOCAL FRACTIONAL INTEGRALS

Summary

Examples of local fractional integrals of the exponential function are calculated. The asymptotic expansions of local fractional integrals are obtained if the interval integration length tends to zero and infinity at a finite point of the real line.

УДК 517.53

Т. С. МАРДВИЛКО

**НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ КВАЗИНОРМ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ
ОТНОСИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНОЙ И ПЛОСКОЙ МЕР И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ**

Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка

(Поступила в редакцию 24.06.2009)

Введение. Пусть G – односвязная область в комплексной плоскости с локально-спрямляемой границей ∂G . Через $L_p(\partial G)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций f на ∂G с конечной квазинормой (нормой при $1 \leq p < \infty$)

$$\|f\|_{L_p(\partial G)} = \left(\int_{\partial G} |f(\xi)|^p |d\xi| \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Аналогично введем пространство Лебега относительно плоской меры Лебега m_2 в G . Будем говорить, что комплексная функция $f \in L_p(G)$, если она измерима относительно меры m_2 и

$$\|f\|_{L_p(G)} = \left(\int_G |f(\xi)|^p dm_2(\xi) \right)^{1/p} < \infty, \quad 0 < p < \infty.$$

Введем пространство Бергмана $A_p(G)$, $0 < p < \infty$. Именно, $f \in A_p(G)$, если f аналитична в G и конечна квазинорма $\|f\|_{A_p(G)} = \|f\|_{L_p(G)}$.

Обозначим через \mathcal{P}_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, множество алгебраических полиномов степени не выше n . Мы будем рассматривать также $\mathcal{R}_n = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathcal{P}_n, q \neq 0 \right\}$ – множество рациональных функций степени не выше n .

Положим $\Pi := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$. Через c, c_1, c_2, \dots будем обозначать некоторые положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров.

Е. Дынькин [1] и В. Р. Мисюк [2] одновременно и независимо доказали (см. также [3]), что если $2 < p < \infty$, $r \in \mathcal{R}_n \cap A_p(\Pi)$, то

$$\|r\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})} \leq c(p) n^{\frac{1}{p}} \|r\|_{A_p(\Pi)}.$$

В работах [1] и [2] неравенство получено для круга; для полуплоскости доказательство легко переносится с естественными изменениями.

Нам удалось получить аналогичное неравенство для $0 < p < 1$.

Теорема 1. Если $0 < p < 1$, $\frac{2}{p} \notin \mathbb{N}$, $r \in \mathcal{R}_n \cap L_p(\Pi)$, $n \geq 1$, то

$$\|r\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})} \leq c(p) n^{\frac{1}{p}} \|r\|_{L_p(\Pi)}.$$

В случае $1 < p < 2$ последнее неравенство получено при дополнительном предположении, что все полюсы r лежат на \mathbb{R} .

Теорема 2. Если $1 < p < 2$, $r \in \mathcal{R}_n \cap A_p(\Pi)$, $n \geq 1$, и все полюсы r лежат на \mathbb{R} , то

$$\|r\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})} \leq c(p) n^{\frac{1}{p}} \|r\|_{A_p(\Pi)}.$$

Доказательство теорем 1 и 2, приведенное ниже, существенно отличается от доказательства аналогичного результата из [1, 2] для $p > 2$; мы проводим его методом, предложенным в [4].

Неравенства в теоремах 1 и 2 являются точными относительно входящих в них параметров. Ограничение $\frac{2}{p} \notin \mathbb{N}$ также является существенным (примеры приведены во второй части статьи).

1. Доказательство теорем 1 и 2. Воспользуемся теорией пространств Харди для полуплоскости; нужные результаты сформулируем по мере необходимости. Согласно определению [5], функция f , аналитическая в верхней полуплоскости Π , принадлежит пространству Харди $H_p(\Pi)$, $0 < p < \infty$, если конечна квазинорма

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{y>0} \|f(\cdot + iy)\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty.$$

Известно, что если $f \in H_p$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$ существует $\lim_{y \rightarrow 0^+} f(x + iy) =: f(x)$, когда z стремится к x по некасательным к \mathbb{R} путям. При этом имеет место равенство $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p}$.

Отметим, что для любой функции $f \in H_{p/2}$, $0 < p < \infty$, выполняется неравенство

$$\|f\|_{A_p(\Pi)} \leq c \|f\|_{H_{p/2}}. \quad (1)$$

Неравенство (1) для круга можно найти в [6]. Для полуплоскости оно получается конформным отображением. Таким образом, из результатов работ [1, 2] и теорем 1, 2 следует, что неравенство (1) можно обратить в некоторых случаях.

Лемма 1 [7]. Для $-1 < \alpha < \infty$ и любого действительного β введем функции

$$I_{\alpha, \beta}(z) = \int_D \frac{(1 - |\omega|^2)^\alpha}{|1 - z\bar{\omega}|^{2+\alpha+\beta}} dm_2(\omega), \quad z \in D,$$

$$J_\beta(z) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1 - ze^{-i\theta}|^{1+\beta}}, \quad z \in D.$$

Тогда для $z \in D$ имеют место соотношения

$$I_{\alpha, \beta}(z) \asymp J_\beta(z) \asymp \begin{cases} 1, & \text{если } \beta < 0 \\ \ln \frac{2}{1 - |z|^2}, & \text{если } \beta = 0 \\ 1/(1 - |z|^2)^\beta, & \text{если } \beta > 0. \end{cases}$$

Отметим, что для $\beta > 0$ точная асимптотика интеграла $J_\beta(z)$ при $|z| \rightarrow 1 - 0$ найдена в [8].

Лемма 2. Пусть $0 < p < 1$, $n \geq 1$, и неравенство

$$\|r\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})} \leq c_1(p) \cdot n^{\frac{1}{p}} \cdot \|r\|_{A_p(\Pi)} \quad (2)$$

выполняется для любой функции $r \in \mathcal{R}_n \cap A_p(\Pi)$ с действительными коэффициентами и с полюсами лишь на \mathbb{R} . Тогда для всех $r \in \mathcal{R}_n \cap L_p(\Pi)$ выполняется неравенство

$$\|r\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})} \leq c_2(p) \cdot n^{\frac{1}{p}} \cdot \|r\|_{L_p(\Pi)} \quad (3)$$

с некоторой константой $c_2(p)$ вместо $c_1(p)$.

Доказательство леммы 2. Пусть $r \in \mathcal{R}_n \cap L_p(\Pi)$ и не все ее полюсы лежат на \mathbb{R} . Через b_+ и b_- обозначим соответственно произведение Бляшке, полюсами которых, с учетом кратности, являются полюсы r , лежащие в полуплоскостях $\text{Im } z > 0$ и $\text{Im } z < 0$. Если, например, r не имеет полюсов в $\text{Im } z < 0$, то полагаем $b_-(z) \equiv 1$. Очевидно, что ∞ полюсом r не является. Для каждого фиксированного $\xi \in T := \{\xi : |\xi| = 1\}$ функция

$$r(z, \xi) := r(z) \cdot (b_+(z) - \xi b_-(z))^{-1}$$

принадлежит \mathcal{R}_n и все ее полюсы лежат на \mathbb{R} . Рассмотрим интеграл

$$J(p, z) := \int_T |b_+(z) - \xi b_-(z)|^{-p} |d\xi|, \quad z \in \Pi.$$

Так как $|b_+(z)| \geq 1$, а $|b_-(z)| \leq 1$ для всех $z \in \Pi$, то, с учетом леммы 1, получаем, что $J(p, z) \leq \mu(p)$, где $\mu(p)$ – положительная величина, зависящая только от p . Используя теорему Фубини, находим, что

$$\int_T \left(\int_{\Pi} |r(z, \xi)|^p dm_2(z) \right) |d\xi| = \int_{\Pi} |r(z)|^p \cdot J(p, z) dm_2(z) \leq \mu(p) \cdot \|r\|_{L_p(\Pi)}^p.$$

Следовательно, существует такое $\xi_0 \in T$, что функция $r_0(z) := r(z, \xi_0)$ удовлетворяет условию

$$\|r_0\|_{A_p(\Pi)} \leq c_3(p) \cdot \|r\|_{L_p(\Pi)}, \quad c_3(p) = \left((2\pi)^{-1} \cdot \mu(p) \right)^{1/p}.$$

Положим $r_1(x) = \text{Re } r_0(x)$ и $r_2(x) = \text{Im } r_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда, для r_1 и r_2 выполняются неравенства

$$\|r_k\|_{A_p(\Pi)} \leq c_3(p) \cdot \|r\|_{L_p(\Pi)}, \quad k = 1, 2. \quad (4)$$

Для r_1 и r_2 , согласно предположению, выполняется неравенство (2). Тогда с учетом (4) получим

$$\|r_k \cdot (b_+ - \xi_0 b_-)\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})} \leq 2 \|r_k\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})} \leq 2c_1(p) \cdot n^{\frac{1}{p}} \cdot \|r_k\|_{A_p(\Pi)} \leq 2c_1(p) \cdot c_3(p) \cdot n^{\frac{1}{p}} \cdot \|r\|_{L_p(\Pi)}.$$

Поскольку $r = (r_1 + ir_2)(b_+ - \xi_0 b_-)$, то неравенство (3) для любой функции $r \in \mathcal{R}_n \cap L_p(\Pi)$ будет выполняться с константой $c_2(p) = 2^{\frac{2}{p}} c_1(p) \cdot c_3(p)$ вместо $c_1(p)$.

Пусть n и l – натуральные числа, причем $n \geq l + 1$. Через \mathcal{R}_n^l обозначим подмножество $r \in \mathcal{R}_n$ таких, что все полюсы r лежат на \mathbb{R} , кратность каждого из них не выше l , все коэффициенты r действительны и

$$r(z) = O(z^{-l-1}) \text{ при } z \rightarrow \infty.$$

Несложно заметить, что если коэффициенты $r \in \mathcal{R}_n \cap L_{p/2}(\mathbb{R})$, $0 < p < 2$, $\frac{2}{p} \notin \mathbb{N}$, действительны и все полюсы лежат на \mathbb{R} , то $r \in \mathcal{R}_n^l$ при $l = \left\lceil \frac{2}{p} \right\rceil$.

Через Π_m^l , $m \geq 2$ и $l \geq 1$, обозначим множество финитных кусочно-полиномиальных на \mathbb{R} функций степени не выше $l-1$ с m свободными узлами. Именно, $\varphi \in \Pi_m^l$, если существует m точек (узлов φ) $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_m < +\infty$, таких, что $\varphi|_{(x_k, x_{k+1})} \in \mathcal{P}_{l-1}$, $k=1, 2, \dots, m-1$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus [x_1, x_m]$. Ради удобства считаем также, что $\Pi_1^l = \{0\}$.

Лемма 3 [4]. Для любой $r \in \mathcal{R}_n^l$ существует действительная функция $\varphi \in \Pi_m^l$, $m \leq n$, такая, что

$$r(z) = \frac{l!}{\pi_{\mathbb{R}}} \int \frac{\varphi(t) dt}{(t-z)^{l+1}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp } \varphi.$$

При этом узлами φ являются полюсы r .

Лемма 4 [4]. Пусть $1 < q < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda = \left(k + \frac{1}{q}\right)^{-1}$ и $\varphi \in \Pi_m^l$. Тогда для функции

$$f(z) = \frac{1}{\pi_{\mathbb{R}}} \int \frac{\varphi(t) dt}{t-z}, \quad z \in \Pi,$$

выполняется неравенство

$$\|f^{(k)}\|_{H_\lambda} \leq c(k, q, l) \cdot m^k \cdot \|\varphi\|_{L_q(\mathbb{R})}.$$

Далее будем рассматривать l -ю, $l \in \mathbb{N}$, первообразную функцию $f \in H_\lambda$, $0 < \lambda < \frac{1}{l}$,

$$(I_l f)(z) = \frac{1}{(l-1)!} \int_{-\infty}^z f(\xi) (z-\xi)^{l-1} d\xi, \quad z \in \Pi,$$

интегрирование проводится вдоль луча $\{\xi : \text{Re } \xi = \text{Re } z, \text{Im } \xi \geq \text{Im } z\}$. Поскольку (см., например,

[5, с. 59]) $f(z) = O\left(\frac{1}{(\text{Im } z)^{1/\lambda}}\right)$ при $z \in \Pi$, то указанный интеграл сходится.

Пусть $p, q \in (0, \infty)$, $\frac{2}{p} - \frac{1}{q} = l \in \mathbb{N}$, $l > \frac{1}{p}$. Как известно, пространство Бергмана является частным случаем пространств Харди–Бесова B_p^α (см., например, [3]). Из вложения последних в пространства Харди немедленно получаем неравенство типа Харди–Литтлвуда

$$\|I_l f\|_{H_q} \leq c(p, l) \cdot \|f\|_{A_p(\Pi)}, \quad f \in A_p(\Pi). \quad (5)$$

Нам понадобится аналог неравенства (5) для класса В. И. Смирнова $E_p(\Delta)$ в правильном треугольнике Δ . Согласно определению [9, 6], аналитическая в односвязной ограниченной области G со спрямляемой жордановой границей ∂G функция $f \in E_p(G) =: E_p$, если $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f\|_{L_p(\partial G_n)} < \infty$ хотя бы для одной последовательности $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ односвязных областей, удовлетворяющей условиям: а) границы ∂G_n – спрямляемы; б) $G_n \subset G_{n+1}$ и $\bar{G}_n \subset G$ для всех n ; в) $\bigcup_{n=1}^\infty G_n = G$.

Пространства Смирнова E_p являются наиболее простым и важным обобщением пространств Харди и сохраняют ряд свойств этих пространств. Так, для любой функции $f \in E_p(G)$ для почти всех $\xi \in \partial G$ существует $\lim f(z) =: f(\xi)$, когда $z \in G$ стремятся к ξ по некасательным к ∂G путям. Квазинорма $f \in E_p$ определяется следующим образом: $\|f\|_{E_p} = \|f\|_{L_p(\partial G)}$.

Лемма 5. Пусть $p, q \in (0, \infty)$, $\frac{2}{p} - \frac{1}{q} = l \in \mathbb{N}$, $l > \frac{1}{p}$, Δ – правильный треугольник и z_0 – его центр. Если $f^{(l)} \in A_p(\Delta)$, то $f \in E_q(\Delta)$. Причем, если $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(l-1)}(z_0) = 0$, то

$$\|f\|_{E_q(\Delta)} \leq c(p, l) \cdot \|f^{(l)}\|_{A_p(\Delta)}. \quad (6)$$

Лемму 5 можно получить методом, примененным для доказательства теоремы 1.1 из [10]. Ключевым моментом в доказательстве является интегральное представление функции f , полученное в лемме 2.3 в [10].

Лемма 6. Пусть $p, q \in (0, \infty)$, $\frac{2}{p} - \frac{1}{q} = l \in \mathbb{N}$, $l > \frac{1}{p}$, и $f \in A_p(\Pi)$. Тогда для любого натурального $m \geq 2$ существует действительная функция $\varphi \in \Pi_m^l$ такая, что

$$\|\operatorname{Im}(I_l f) - \varphi\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq c(p, l) \cdot m^{-l+\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_{A_p(\Pi)}. \quad (7)$$

Доказательство леммы 6. Считаем $f \neq 0$. В силу неравенства (5) мы можем выбрать точки $-\infty < x_1 < x_2 < \dots < x_m < +\infty$, удовлетворяющие условиям

$$\|I_l f\|_{L_q(\mathbb{R} \setminus (x_1, x_m))} \leq (m-1)^{-l+\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_{A_p(\Pi)}, \quad (8)$$

$$\int_{\Delta_j} |f(z)|^p dm_2(z) \leq \frac{1}{m-1} \int_{\Delta} |f(z)|^p dm_2(z), \quad (9)$$

где $\Delta_j \subset \Pi$ – правильный треугольник с основанием $J_j = (x_j, x_{j+1})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $\Delta \subset \Pi$ – правильный треугольник с основанием (x_1, x_m) . Через $p_j(z)$ обозначим многочлен Тейлора функции $I_l f(z)$ порядка $l-1$ с начальной точкой в центре Δ_j . Ввиду леммы 5, имеем

$$\|I_l f - p_j\|_{L_q(J_j)} \leq c_1(p, l) \cdot \|f\|_{A_p(\Delta_j)}. \quad (10)$$

Положим $\varphi(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus (x_1, x_m)$ и $\varphi(x) = \operatorname{Im} p_j(x)$ при $x \in J_j$, $j = 1, 2, \dots, m-1$. Из неравенств (9) и (10) при $q \in (0, \infty)$ получаем

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Im}(I_l f) - \varphi\|_{L_q(x_1, x_m)}^q &= \sum_{j=1}^{m-1} \|\operatorname{Im}(I_l f) - \varphi\|_{L_q(J_j)}^q \leq c_1 \sum_{j=1}^{m-1} \|f\|_{A_p(\Delta_j)}^q \leq \\ &c_1 (m-1)^{-\frac{q}{p}} \sum_{j=1}^{m-1} \|f\|_{A_p(\Delta)}^q \leq \left(c_2 (m-1)^{-l+\frac{1}{p}} \|f\|_{A_p(\Delta)} \right)^q. \end{aligned} \quad (11)$$

С учетом неравенств (8) и (11) получаем (7) для $0 < q < \infty$

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Im}(I_l f) - \varphi\|_{L_q(\mathbb{R})}^q &\leq \|\operatorname{Im}(I_l f)\|_{L_q(\mathbb{R} \setminus (x_1, x_m))}^q + \|\operatorname{Im}(I_l f) - \varphi\|_{L_q(x_1, x_m)}^q \leq \\ &\left(c_3 (m-1)^{-l+\frac{1}{p}} \|f\|_{A_p(\Delta)} \right)^q. \end{aligned}$$

Доказательство теорем 1 и 2. Мы можем считать, что $r \in \mathcal{R}_n^l$, $l = \left[\frac{2}{p} \right]$. Это предполагается в условиях теоремы 2. Ввиду леммы 2, доказательство теоремы 1 также сводится к рассмотрению указанного частного случая. В силу определения множества \mathcal{R}_n^l , $r \in H_{p/2}$. Согласно лемме 3 существует действительная функция $\varphi \in \Pi_m^l$, $m \leq n$, для которой

$$(I_l f)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t) dt}{t-z}, \quad z \in \Pi.$$

Очевидно, что $\text{Im}(I_l f)(z)$ совпадает с интегралом Пуассона функции φ в Π и, значит, $\text{Im}(I_l f)(z) = \varphi(x)$ при $x \in \mathbb{R}$ и не являющейся точкой разрыва φ .

Пусть ν – наименьшее натуральное число, для которого $2^\nu \geq m$. Ввиду леммы 6 и неравенства (5) существуют функции $\varphi_\mu \in \Pi_{2^\mu}^l$, $\mu = 0, 1, \dots, \nu-1$, такие, что для $q = \left(\frac{2}{p} - l \right)^{-1}$ имеют место неравенства

$$\|\varphi - \varphi_\mu\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq c_4(p) \cdot 2^{-l\mu + \frac{\mu}{p}} \cdot \|r\|_{A_p(\Pi)}. \quad (12)$$

Положим $\varphi_\nu = \varphi$ и $\psi_\mu = \varphi_\mu - \varphi_{\mu-1}$, $\mu = 1, 2, \dots, \nu$. Поскольку $\psi_\mu \in \Pi_{2^{\mu+1}}^l$ и $\varphi = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_\nu$, то ввиду леммы 4, получим

$$\begin{aligned} \|r\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})}^{p/2} &= \|(I_l r)^{(l)}\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})}^{p/2} \leq \sum_{\mu=1}^{\nu} \left\| \frac{l!}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi_\mu(t) dt}{(t-z)^{l+1}} \right\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})}^{p/2} \leq \\ &c_5(p) \sum_{\mu=1}^{\nu} \left(2^{l\mu} \|\psi_\mu\|_{L_q(\mathbb{R})} \right)^{p/2} \leq \left(c_6(p) \cdot n^{\frac{1}{p}} \cdot \|r\|_{A_p(\Pi)} \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

При получении последнего неравенства мы учли, что, в силу неравенства (12),

$$\|\psi_\mu\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq c_5(p) \cdot 2^{-l\mu + \frac{\mu}{p}} \cdot \|r\|_{A_p(\Pi)}.$$

2. Точность теорем 1 и 2. Как уже было сказано во введении, неравенства в теоремах 1 и 2 являются точными относительно входящих в него параметров. Точность этих неравенств относительно множителя $n^{1/p}$ можно проверить на примере рациональной функции степени n

$$r(z) = \frac{b(z)}{(1+b(z))(z-i)^{2l+2}},$$

где $n \geq 2l+2$, $l = \left[\frac{2}{p} \right]$ и $b(z) = \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^n$.

Неравенство (1) свидетельствует о точности неравенства из теорем 1 и 2 относительно квазинорм $\|\cdot\|_{L_p(\Pi)}$, $\|\cdot\|_{A_p(\Pi)}$ и $\|\cdot\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})}$.

Существенность ограничения $\frac{2}{p} \notin \mathbb{N}$ в теореме 1 проверяется на однопараметрическом множестве функций, зависящих от параметра $0 < \varepsilon \leq 1/2$:

$$r(z) = \left(\frac{2}{(z+i\varepsilon)(z+i)} \right)^l, \quad l = \frac{2}{p} \in \mathbb{N}.$$

Докажем последнее утверждение (предыдущее проверяется похожим образом).
Итак, с учетом леммы 1 находим, что при $\varepsilon \in (0, 1/2]$

$$\|r\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{|x+i\varepsilon||x+i|} \right)^{\frac{2}{p}} = \left(\int_{|\omega|=1} \frac{|d\omega|}{|1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\omega|} \right)^{\frac{2}{p}} \asymp \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{2}{p}},$$

$$\|r\|_{L_p(\Pi)} = \left(\int_{\Pi} \frac{dm_2(z)}{|z+i\varepsilon|^2|z+i|^2} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_D \frac{dm_2(\omega)}{|1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\omega|^2} \right)^{\frac{1}{p}} \asymp \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ квазинорма $\|r\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})}$ растет быстрее, чем $\|r\|_{L_p(\Pi)}$.

3. Приложения. Теоремы 1 и 2 дают возможность получить неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций относительно плоской меры Лебега.

Теорема 3. Пусть $0 < p < 1$, $\frac{2}{p} \notin \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}$, $\sigma = \left(s + \frac{2}{p}\right)^{-1}$. Тогда для $r \in \mathcal{R}_n \cap L_p(\Pi)$, $n \geq 1$, имеет место неравенство

$$\|r^{(s)}\|_{L_\sigma(\mathbb{R})} \leq c(p) \cdot n^{s+\frac{1}{p}} \cdot \|r\|_{L_p(\Pi)}.$$

Теорема 4. Если $1 < p < 2$, $s \in \mathbb{N}$, $\sigma = \left(s + \frac{2}{p}\right)^{-1}$, $r \in \mathcal{R}_n \cap L_p(\Pi)$, $n \geq 1$, и все полюсы r лежат на \mathbb{R} , то

$$\|r^{(s)}\|_{L_\sigma(\mathbb{R})} \leq c(p) n^{s+\frac{1}{p}} \|r\|_{L_p(\Pi)}.$$

Доказательство теорем 3 и 4. Пусть $\sigma = \left(s + \frac{1}{p'}\right)^{-1}$, $0 < p' < 1$, $\frac{1}{p'} \notin \mathbb{N}$. В работе [4] показано, что для $r \in \mathcal{R}_n \cap L_{p'}(\mathbb{R})$ имеет место неравенство типа Бернштейна

$$\|r^{(s)}\|_{L_\sigma(\mathbb{R})} \leq c(p) \cdot n^s \cdot \|r\|_{L_{p'}(\mathbb{R})}.$$

Полагая $p' = \frac{p}{2}$ и пользуясь теоремами 1 и 2, приходим к утверждениям теорем 3 и 4 соответственно.

Теорема 3 в свою очередь дает возможность получить обратную теорему рациональной аппроксимации.

Пусть $r \in A_p(\Pi)$, $0 < p < 1$, и $n = 0, 1, 2, \dots$. Введем $R_n(f)_{A_p(\Pi)} = \inf_{r \in \mathcal{R}_n} \|f - r\|_{A_p(\Pi)}$ – наилучшее приближение f посредством рациональных функций степени не выше n .

Теорема 5. Пусть $0 < p < 1$, $\frac{2}{p} \notin \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sigma = \left(s + \frac{2}{p}\right)^{-1}$. Если для $f \in A_p(\Pi)$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(n^{s+\frac{1}{p}} R_n(f)_{A_p(\Pi)} \right)^\sigma,$$

то $f^{(s)} \in H_\sigma(\Pi)$.

Доказательство теоремы 5 проводится хорошо известным методом Бернштейна для получения обратных теорем теории аппроксимации.

Для $p > 2$ обратная теорема была получена в работах [1, 2].

В заключение отметим, что результаты, аналогичные приведенным в этой статье, применимы и для круга. Доказательства для круга проводятся в основном аналогично соответствующим доказательствам для полуплоскости.

Литература

1. Дун'кин Е. // Operator Theory: Advances and Applications. 2000. Vol. 113. P. 76–94.
2. Мисюк В. Р. // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. 2001. Т. 9. С. 105–108.
3. Рекарский А. А. // East journal on approximations. 2007. Vol. 13. N. 3. P. 227–319; Corrigendum ibidem. 2007. Vol. 13. N. 4. P. 483.
4. Пекарский А. А., Шталь Г. // Матем. сборник. 1995. Т. 186, № 1. С. 119–130.
5. Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М., 1984.
6. Duren P. Theory of H^p Spaces. New York: Academic Press, 1970. P. 258.
7. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. Theory of Bergman Spaces. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.
8. Мардвилко Т. С. // East journal on approximations. 2009. Vol. 15, N 2. P. 31–42.
9. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.; Л., 1950.
10. Пекарский А. А. // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13, № 2. С. 165–190.

T. S. MARDVILKO

INEQUALITY FOR QUASI-NORM RATIONAL FUNCTION WITH RESPECT TO LINEAR AND PLANAR MEASURES AND ITS APPLICATIONS

Summary

In this article the extreme inequality for an estimation quasi-norm rational function with respect to the linear measure Lebesgue through the quasi-norm this function in relation to the measure Lebesgue is obtained. It is proved that if $0 < p < 1$,

$\frac{2}{p} \notin \mathbb{N}$, $r \in \mathcal{R}_n \cap L_p(\Pi)$, $\Pi := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $n \geq 1$, then

$$\|r\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})} \leq c(p)n^{\frac{1}{p}} \|r\|_{L_p(\Pi)}.$$

The similar inequality is obtained for $1 < p < 2$ under an additional condition, that all poles r are on the real axis. Case $p > 2$ is investigated earlier in E. M. Dyn'kin and V. R. Misiuk's works.

The application of this result for obtaining the inequalities of Bernstein type for derivatives rational functions in relation to the planar measure and the converse theorem of rational approximation is given.

УДК 511.36

О. В. РЫКОВА

**О КОЛИЧЕСТВЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ
С ЗАДАННЫМ ПОРЯДКОМ ДИСКРИМИНАНТОВ**

Белорусский государственный аграрный технический университет

(Поступила в редакцию 19.03.2009)

Одной из основных задач теории трансцендентных чисел является изучение связи между алгебраическими и трансцендентными числами. Среди корней многочленов могут быть как действительные, так и комплексные числа. Обозначим через A множество всех алгебраических чисел, через A_1 – множество действительных алгебраических чисел, A_2 – множество комплексных алгебраических чисел α , $\text{Im} \alpha \neq 0$. Ясно, что $A = A_1 \cup A_2$. Легко доказать, что $\mu_1 A_1 = 0$ и $\mu_2 A_2 = 0$, где μ_1 и μ_2 – мера Лебега на прямой и плоскости соответственно.

Пусть $P(t) \in Z[t]$ – многочлен от действительной или комплексной переменной t

$$P(t) = P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0. \quad (1)$$

Обозначим через $H = H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$ высоту многочлена, а через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $P(t)$. Это по определению алгебраические числа и если $P(t)$ – неприводимый многочлен и наибольший общий делитель его коэффициентов $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) = 1$, то многочлен $P(t)$ называется минимальным многочленом для каждого α_j , $1 \leq j \leq n$ и $H(\alpha_j) = H(P)$.

В работах [1–7] изучались различные характеристики, связанные с корнями многочленов $P(t)$: распределение дискриминантов, расстояние между корнями одного и того же многочлена $P(t)$, расстояние между корнями различных многочленов $P_1(t)$ и $P_2(t)$.

В данной работе мы переносим некоторые результаты из указанных работ на поле комплексных чисел.

Дискриминантом многочлена (1) называется число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2. \quad (2)$$

Дискриминант равен нулю тогда и только тогда, когда многочлен имеет кратные корни. Нетрудно доказать [8], что дискриминант $D(P)$ – целое число и получить оценку $|D(P)| < (2n-1)! H(P)^{2n-2}$. Поэтому при $D(P) \neq 0$ имеем

$$1 \leq |D(P)| < c(n) H^{2n-2}. \quad (3)$$

Далее через $c_1, c_2, \dots, c(n)$ будем обозначать величины, зависящие только от n и не зависящие от H . Во многих областях алгебры и теории чисел важно знать, какие значения принимает $D(P)$ и насколько часто значения дискриминанта попадают внутрь некоторого интервала промежутка $[-c(n)H^{2n-2}, c(n)H^{2n-2}]$.

Пусть Q – достаточно большое натуральное число, $v \geq 0$ – действительное число. Определим множество

$$P_n(Q, v) = \{P_n(z) \in Z[z] : H(P) \leq Q, 1 < |D(P)| \leq c(n)Q^{2n-2-4v}\}. \quad (4)$$

Далее через $\#M$ будем обозначать число элементов множества M , μA – меру Лебега измеримого множества $A \subset R$, а через \ll символ Виноградова, означающий для чисел A и B , $A \ll B$ существование величины c такой, что $A < cB$. Нетрудно видеть, что $c_1(n)Q^{n+1} < \#P_n(Q, 0) < c_2(n)Q^{n+1}$.

В данной работе мы укажем общий метод получения оценок снизу $\#P_n(Q, v)$ при достаточно больших значениях v . При $v \in [0, 1/2)$ оценки были получены при $n = 2, 3$ [1, 3], а также при любом n в работе [4].

Т е о р е м а. При $v < \max(1/2, (n-5)/6)$ и $n \geq 4$ имеем

$$\#P_n(Q, v) \gg Q^{n+1-4v}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее считаем, что $z \in C$ из некоторого круга $K(0, r)$. Из [5] следует, что существует некоторое множество $B \subset K$, $\mu B > c(n)\frac{1}{2}\mu K$, такое, что для любого $z \in B$ найдутся полином $P(z)$, величины $c_0 = c_0(n)$, $\delta_0 = \delta_0(n)$, при которых справедлива система неравенств

$$\begin{aligned} \delta_0 Q^{-v_0} &< |P(z)| < c_0 Q^{-v_0}, \\ \delta_0 Q^{-v_1} &< |P'(z)| < c_0 Q^{-v_1}, \\ v_0 \geq 0, v_1 \geq 0, \quad v_0 + v_1 &= \frac{n-3}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Более того, в (5) будем предполагать, что целочисленный полином $P(z)$ неприводим над полем рациональных чисел Q и его старший коэффициент удовлетворяет неравенству $|a_n| > c(n)H$. Это неравенство приводит к ограниченности корней полинома $P(z)$, $|\alpha_j| < c(n)$, $1 \leq j \leq n$ [1].

Пусть α_1 – ближайший к z корень полинома $P(z)$. Упорядочим его остальные корни относительно α_1 :

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|. \quad (6)$$

Введем условие

$$2v_1 < v_0 - 1. \quad (7)$$

Из тождества $|P'(z)| \cdot |P(z)|^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|z - \alpha_i|}$ и неравенств $|z - \alpha_1| \leq |z - \alpha_k|$, $k = 2, \dots, n$ получаем

$$|z - \alpha_1| \leq n |P(z)| \cdot |P'(z)|^{-1}, \quad (8)$$

что с учетом (5) приводит к оценке

$$|z - \alpha_1| < n \delta_0^{-1} c_0 Q^{-v_0+v_1}.$$

Разложим $P'(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки α_1 :

$$P'(z) = P'(\alpha_1) + P''(\alpha_1)(z - \alpha_1) + \sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-1)!} P^{(k)}(\alpha_1)(z - \alpha_1)^{k-1}. \quad (9)$$

Из неравенств $|P^{(l)}(\alpha_1)| \ll Q$, $2 \leq l \leq n$ при выполнении (7) и (8) имеем $|P''(\alpha_1)(z - \alpha_1)| \ll Q^{1-v_0+v_1}$, $\frac{1}{(k-1)!} |P^{(k)}(\alpha_1)(z - \alpha_1)^{k-1}| \ll Q^{1+(k-1)(-v_0+v_1)} \ll Q^{1-v_0-v_1}$. Поэтому при большом Q получаем, что $\sum_{k=3}^n \frac{1}{(k-1)!} |P^{(k)}(\alpha_1)(z - \alpha_1)^{k-1}| < \frac{1}{2} |P'(\alpha_1)|$ и $\frac{1}{2} |P'(\alpha_1)| < |P''(z)| < \frac{3}{2} |P'(\alpha_1)|$. Поэтому

$$0,5\delta_0 Q^{-v_1} < |P'(\alpha_1)| < 2c_0 Q^{-v_1}. \quad (10)$$

Теперь поскольку

$$P'(\alpha_1) = a_n(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \dots (\alpha_1 - \alpha_n),$$

то из ограниченности корней α_j , (9) и наличия у α_1 сопряженного корня $\overline{\alpha_1}$ следует

$$|D(P)| = \left| |P'(\alpha_1)|^2 |a_n^{2n-4}| \prod_{2 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \right| \ll Q^{2n-4-2v_1}. \quad (11)$$

Оценка дискриминанта в (10) получена исходя из того, что в некоторой точке $z = z_1 \in B$ можно найти полином $P(z) = P_1(z)$, для которого выполняется (5). Возьмем точку $z_2 \in B$ такую, что при некоторых $\delta_1 = \delta_1(n)$ и $\delta_2 = \delta_2(n)$ выполняются неравенства

$$\delta_1 Q^{-v_0+v_1} < |z_1 - z_2| < \delta_2 Q^{-v_0+v_1}. \quad (12)$$

Покажем, что δ_1 и δ_2 можно выбрать таким образом, что многочлен $P_1(z)$ в точке z_2 не может удовлетворять (5). Из

$$P_1(z_2) = P_1(z_1) + P'(z_1)(z_2 - z_1) + \frac{1}{2} P''(\xi)(z_2 - z_1)^2, \quad \xi \in (z_1, z_2)$$

и оценок

$$\begin{aligned} |P_1(z_1)| &< c_0 Q^{-v_0}, \\ |P'(z_1)(z_2 - z_1)| &> \delta_0 \delta_1 Q^{-v_1} Q^{-v_0+v_1}, \\ \left| \frac{1}{2} P''(\xi)(z_2 - z_1)^2 \right| &\ll Q \delta_2^2 Q^{-2v_0+2v_1} = \delta_2^2 Q^{1-2v_0+2v_1} \end{aligned}$$

по (7) и (11) для $\delta_1 > 4c_0 \delta_0^{-1}$ и $\delta_2 > \delta_1$ имеем при достаточно большом Q неравенство $|P_1(z_2)| > 2c_0 Q^{-v_0}$ вопреки первому неравенству (5). Это означает, что в точке z_2 должен существовать полином $P_2(z)$, удовлетворяющий при $z = z_2$ неравенствам (5). После выполнения уже описанной процедуры от точки z_2 перейдем к точке z_3 и т. д. Так как каждая новая точка находится внутри круга площадью $c(n) Q^{-2v_0+2v_1}$, то число различных точек не менее $c(n) Q^{2v_0-2v_1}$. Заменим в показателе степени $2v_0$ на $n-3-2v_1$ и v_1 на $v-1$. Получим $c(n) Q^{n+1-4v}$. Из (5) и (7) следует условие $v < (n-5)/6$. Теорема доказана.

Метод, предложенный при доказательстве теоремы, может быть использован для доказательства других фактов. Так при v_0 и v_1 , удовлетворяющих (7), можно доказать существование более чем $c(n) Q^{2v_0-2v_1}$ многочленов $P(z)$ с корнями α_1 и α_2 , и

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < c(n) Q^{-\frac{n+1}{6}} \quad (13)$$

В [6] была получена оценка сверху с показателем $n/4$, что соответствует $n/8$ в комплексном случае. Более того, можно построить $(n+1)$ линейно независимых полиномов, для которых выполняется система неравенств (5). Затем с помощью этих полиномов можно построить как в [6] монический полином

$$T(x) = x^{n+1} + b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 \in Z[x], \quad (14)$$

удовлетворяющий (5). Для дискриминантов монических полиномов можно доказать теорему, аналогичную доказанной ранее. Оба доказательства мы предполагаем представить в последующих работах.

Литература

1. Спринжук В. Г. Проблема Малера в теории чисел. Минск, 1967.
2. Спринжук В. Г. Классические диофантовы уравнения от двух неизвестных. М., 1982.
3. Davenport H. // *Mathematica*. 1961. N 8. P. 58–62.
4. Bernik V. I., Goetze F., Kukso O. S. // *Acta Arithm.* 2008. Vol. 133, N 4. P. 375–396.
5. Bugeaud Y. // *J. Lond. Math. Soc.* (2). 2002. Vol. 65. P. 547–559.
6. Bugeaud Y., Mignotte M. // *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2). 2004. Vol 47, N. 3. P. 553–556.
7. Mignotte M. Some useful bounds in Computer algebra / Ed. B. Buchberger, G. E. Collins, R. Lools. Berlin: Springer, 1982. P. 259–263.
8. Van Der Warden B. L. *Algebra*. Berlin; Heilderberg, Springer–Verlag, 1971.

V. V. RYKOVA

NUMBER OF INTEGER POLYNOMIALS WITH A GIVEN ORDER OF DISCRIMINANTS

Summary

The lower estimation for the number of integer polynomials having a given bound for discriminates is obtained.

УДК 512.54

Т. В. ТИХОНЕНКО

ФАКТОРИЗАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП СВЕРХРАЗРЕШИМЫМИ И ХОЛЛОВЫМИ ПОДГРУППАМИ

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 04.05.2009)

Введение. Строение конечной группы G , представимой в виде произведения двух своих собственных подгрупп A и B , существенно зависит от строения подгрупп A и B и способа их вложения в группу G . Подавляющее число работ о группах с факторизациями посвящено описанию строения группы G , когда подгруппы A и B содержатся в заданных классах групп (абелевы, нильпотентные, разрешимые). Отметим здесь прежде всего работы Н. Ито [1], Х. Виландта [2], О. Кегеля [3] и Л. С. Казарина [4]. Важным при изучении групп с факторизациями является случай, когда порядки подгрупп A и B взаимно просты, т. е. A и B – холловы подгруппы в группе G . Полное описание простых неабелевых групп, представимых в виде произведения двух подгрупп взаимно простых порядков, было установлено З. Арадом и Е. Фисман [5]. Интересные результаты в этом направлении были получены З. Ду [6].

В настоящей работе рассматриваются конечные группы, представимые в виде произведения двух сверхразрешимых подгрупп, а также в виде произведения двух холловых подгрупп с рядом дополнительных ограничений. Доказаны следующие основные результаты.

Т е о р е м а 1. Пусть $G = AB$ – конечная группа, где A и B – сверхразрешимые подгруппы группы G . Тогда любой неабелев композиционный фактор группы G принадлежит следующему списку групп: $\{PSL_2(p), 3 < p$ – простое нечетное число; $PSL_2(9)$; $PSL_2(8)$; $PSL_2(16)\}$.

Т е о р е м а 2. Пусть G – конечная группа, $\pi(G) = \pi \cup \pi'$, где $\pi \neq \emptyset$, $\pi' \neq \emptyset$. Если группа G обладает свойствами E_π , $E_{\pi'}$ и $E_{\{p, q\}}$ для всех $p \in \pi$, $q \in \pi'$, то G – π -отделимая группа.

Все рассматриваемые группы являются конечными. Обозначения, принятые в работе, стандартны. Их можно найти в [7, 8]. Для удобства читателя приведем некоторые из них. Пусть π – некоторое множество простых чисел. Подгруппа H группы G называется холловой π -подгруппой, если $|H|$ делится только на простые числа из множества π , а $[G: H]$ не делится ни на одно простое число из множества π . Если группа G имеет холлову π -подгруппу, тогда говорят, что группа G обладает свойством E_π . Множество простых чисел, делящих порядок группы G , обозначим через $\pi(G)$. Напомним, что группа G называется π -отделимой (соответственно, π -разрешимой), если она имеет нормальный ряд, каждый фактор которого есть либо π -группа (соответственно, разрешимая π -группа), либо π' -группа. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B . При доказательстве теоремы 1 используется техника работы Л. С. Казарина [4].

Предварительные результаты. Нам потребуются следующие вспомогательные результаты.

Л е м м а 1 (см. [4; теорема]). Пусть G – конечная группа, представимая в виде произведения двух разрешимых подгрупп. Если все композиционные факторы группы G являются известными простыми группами, то любой простой неабелев фактор группы G принадлежит следующему списку групп: $\{PSU_3(8)$; $PSL_4(2)$; M_{11} ; $PSp_4(3)$; $PSL_2(q)$ ($q > 3$); $PSL_3(q)$ ($q < 9$).

Л е м м а 2 (см. [9; II, теорема 8.27]). Группа $PSL_2(p^m)$ содержит только следующие подгруппы:

- 1) элементарные абелевы p -группы порядков p, p^2, \dots, p^m ;
- 2) циклические группы порядка z в случае, когда z делит $(p^m \pm 1)/d$, где $d = (2, p^m - 1)$;

- 3) диэдральные группы порядка $2z$, где число z такое, как в п. 2;
- 4) A_4 в случае, когда $p > 2$ или $p = 2$ и t – четное;
- 5) S_4 в случае, когда $p^{2m} \equiv 1 \pmod{16}$;
- 6) A_5 в случае, когда $p = 5$ или $p^{2m} \equiv 1 \pmod{5}$;
- 7) полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^k с циклической группой порядка t в случае, когда t делит $(p^k - 1)/d$ и t делит $p^m - 1$;
- 8) $PSL_2(p^k)$ в случае, когда k делит m ;
- 9) $PGL_2(p^k)$ в случае, когда p – нечетное и $2k$ делит m .

Обозначим через \mathfrak{M} класс всех конечных групп, у которых все неабелевы композиционные факторы содержатся в списке групп, приведенном в заключении теоремы 1. Будем считать, что G – минимальный контрпример к теореме 1. Пусть $M = M_1 \times \dots \times M_k$ – минимальная нормальная подгруппа группы G , где $k \geq 1$ и M_i – изоморфные простые группы. Очевидно, что G не принадлежит \mathfrak{M} , но всякая группа L , представимая в виде произведения двух своих сверхразрешимых подгрупп и для которой $|L| < |G|$, обладает свойством: $L \in \mathfrak{M}$.

Л е м м а 3 (см. [4; лемма 2.2]). Пусть M – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда:

- 1) $G = AB = AM = BM$, $M \leq G \leq \text{Aut}(M)$;
- 2) $M \notin \mathfrak{M}$, но $G/M \in \mathfrak{M}$.

Из леммы 3 следует, что M_i – простые неабелевы группы.

Л е м м а 4 (см. [4; лемма 2.5]). $|M_1|$ делит $|\text{Out}(M_1)|/|A \cap M_1|/|B \cap M_1|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. На протяжении всего доказательства будем считать, что A и B – максимальные сверхразрешимые подгруппы группы G (т. е. подгруппы, которые не содержатся ни в какой большей сверхразрешимой подгруппе группы G).

Согласно лемме 1 необходимо рассмотреть следующие случаи.

1. $M_1 \cong PSU_3(8)$.

$|M_1| = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19$, $|\text{Out}(M_1)| = 2 \cdot 3^2$. Максимальная сверхразрешимая подгруппа группы M_1 , порядок которой делится на 19, изоморфна $[Z_{19}]Z_3$. Следовательно, можно считать, что $|M_1 \cap A| = 3 \cdot 19$. Из леммы 4 заключаем, что порядок $|M_1 \cap B|$ делится на $2^8 \cdot 3 \cdot 7$. Из [8] следует, что $M_1 \cap B < 2^{3+6} : 21$. Очевидно, что группа $2^{3+6} : 21$ не содержит сверхразрешимой подгруппы с таким свойством.

2. $M_1 \cong PSL_4(2)$.

$|M_1| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $|\text{Out}(M_1)| = 2$. Можно считать, что $|M_1 \cap A| = 3 \cdot 7$. Из леммы 4 заключаем, что порядок $|M_1 \cap B|$ делится на $2^5 \cdot 3 \cdot 5$. Из [8] следует, что сверхразрешимых подгрупп с таким свойством в группе M_1 нет.

3. $M_1 \cong M_{11}$.

$|M_1| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, $|\text{Out}(M_1)| = 1$. Максимальная сверхразрешимая подгруппа в M_1 , порядок которой делится на 11, изоморфна $[Z_{11}]Z_5$. Поэтому порядок $|M_1 \cap B|$ делится на $2^4 \cdot 3^2$ и $M_1 \cap B \cong 3^2 : Q_8 2$ – не сверхразрешимая группа.

4. $M_1 \cong PSp_4(3)$.

$|M_1| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$, $|\text{Out}(M_1)| = 2$. Максимальная сверхразрешимая подгруппа в M_1 , порядок которой делится на 5, содержится в одной из групп 2^4 : A_5 или S_6 . В обоих случаях $M_1 \cap A \cong [Z_5]Z_4$. Следовательно, по лемме 4 порядок $|M_1 \cap B|$ делится на $2^3 \cdot 3^4$. Из [8] заключаем, что $M_1 \cap B$ совпадает с одной из следующих максимальных подгрупп группы M_1 : $3_+^{1+2} : 2A_4$ или $3^3 : S_4$. Однако данные группы не сверхразрешимы.

5. $M_1 \cong PSL_2(q)$, $q > 3$.

(a) $M_1 \cong PSL_2(2^n)$, $n \geq 3$, $|\text{Out}(M_1)| = n$. Максимальными сверхразрешимыми подгруппами в M_1 будут: силовская 2-подгруппа порядка 2^n и две диэдральные подгруппы порядков $2(2^n \pm 1)$. Рассмотрим все случаи.

1) $|M_1 \cap A| = 2^n$. По лемме 4 имеем, что $2^n(2^n - 1)(2^n + 1)$ делит $n2^n|M_1 \cap B|$. Поэтому $\frac{n|M_1 \cap B|}{(2^n - 1)(2^n + 1)}$ – целое число. Так как $\frac{n|M_1 \cap B|}{(2^n - 1)(2^n + 1)} \geq 1$, то $|M_1 \cap B| \geq \frac{2^n - 1}{n}(2^n + 1)$. Посколь-

ку $n \geq 3$, то $\frac{2^n - 1}{n} > 2$ и порядок $|M_1 \cap B| > 2(2^n + 1)$. Из леммы 2 следует, что максимальный порядок сверхразрешимой подгруппы в M_1 равен $2(2^n + 1)$. Получили противоречие.

2) $|M_1 \cap A| = 2(2^n - 1)$. В этом случае $\frac{n|M_1 \cap B|}{2^{n-1}(2^n + 1)}$ – целое число и $|M_1 \cap B| \geq \frac{2^{n-1}}{n}(2^n + 1)$. Если

$n \geq 5$, то $\frac{2^{n-1}}{n} > 2$, что невозможно по лемме 2. Поэтому $M_1 \cong PSL_2(8)$ или $M_1 \cong PSL_2(16)$.

3) $|M_1 \cap A| = 2(2^n + 1)$. В этом случае $|M_1 \cap B| \geq \frac{2^{n-1}}{n}(2^n - 1)$. Если $n \geq 5$, то $\frac{2^{n-1}}{n} > 3,2$ и в этом случае $\frac{2^{n-1}}{n}(2^n - 1) > 2(2^n + 1)$, что невозможно по лемме 2. Таким образом, $M_1 \cong PSL_2(8)$ или $M_1 \cong PSL_2(16)$.

(b) $M_1 \cong PSL_2(p^n)$, $n \geq 2$, p – нечетное простое число, $|\text{Out}(M_1)| = 2n$. Максимальными сверхразрешимыми подгруппами в M_1 будут силовская p -подгруппа порядка p^n и диэдральные подгруппы порядков $p^n \pm 1$. Рассмотрим эти случаи.

1) $|M_1 \cap A| = p^n$. По лемме 4 получим, что $\frac{1}{2}p^n(p^n - 1)(p^n + 1)$ делит $2np^n|M_1 \cap B|$. Отсюда следует, что $\frac{4n|M_1 \cap B|}{(p^n - 1)(p^n + 1)}$ – целое число. Значит, $|M_1 \cap B| \geq \frac{p^n - 1}{4n}(p^n + 1)$. Если $p \neq 3$ и $n \neq 2$, то $\frac{p^n - 1}{4n} > 1$, что невозможно по лемме 2. Поэтому $M_1 \cong PSL_2(9)$.

2) $|M_1 \cap A| = p^n - 1$. В этом случае $|M_1 \cap B| \geq \frac{p^n}{4n}(p^n + 1)$. Поскольку $\frac{p^n}{4n} > 1$, то данный случай невозможен.

3) $|M_1 \cap A| = p^n + 1$. Тогда $|M_1 \cap B| \geq \frac{p^n}{4n}(p^n - 1)$. Если $p \neq 3$ и $n \neq 2$, то $\frac{p^n}{4n} \geq 2,25$ и, следовательно, $\frac{p^n}{4n}(p^n - 1) > p^n + 1$, что невозможно. Значит, $M_1 \cong PSL_2(9)$.

6. $M_1 \cong PSL_3(3)$.

$|M_1| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$, $|\text{Out}(M_1)| = 2$. Можно считать, что $M_1 \cap A \cong [Z_{13}]Z_3$. Согласно лемме 4 порядок $|M_1 \cap B|$ делится на $2^3 \cdot 3^2$. Из [8] следует, что $M_1 \cap B < 3^2:2S_4$. Очевидно, что группа $3^2:2S_4$ не обладает сверхразрешимой подгруппой с таким свойством.

7. $M_1 \cong PSL_3(4)$.

$|M_1| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $|\text{Out}(M_1)| = 2^2 \cdot 3$. В данном случае можно считать, что $M_1 \cap A \cong [Z_7]Z_3$. Согласно лемме 4 порядок $|M_1 \cap B|$ делится на $2^4 \cdot 5$. Из [8] следует, что $M_1 \cap B$ содержится в группе $2^4:A_5$. Очевидно, что группа $2^4:A_5$ не обладает сверхразрешимой подгруппой с таким свойством.

8. $M_1 \cong PSL_3(5)$.

$|M_1| = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^5 \cdot 31$, $|\text{Out}(M_1)| = 2$. Можно считать, что $M_1 \cap A \cong [Z_{31}]Z_3$. Согласно лемме 4 порядок $|M_1 \cap B|$ делится на $2^4 \cdot 5^3$. Из [8] следует, что $M_1 \cap B < 5^2:GL_2(5)$. Однако группа $5^2:GL_2(5)$ не содержит сверхразрешимой подгруппы с таким свойством.

9. $M_1 \cong PSL_3(7)$.

$|M_1| = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 19$, $|\text{Out}(M_1)| = 2 \cdot 3$. Будем считать, что $M_1 \cap A \cong [Z_{19}]Z_3$. По лемме 4 порядок $|M_1 \cap B|$ делится на $2^4 \cdot 7^3$. Из [8] следует, что $M_1 \cap B < 7^2:2L_2(7):2$. Группа $7^2:2L_2(7):2$ не обладает сверхразрешимой подгруппой с данным свойством.

10. $M_1 \cong PSL_3(8)$.

$|M_1| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 73$, $|\text{Out}(M_1)| = 2 \cdot 3$. В этом случае $M_1 \cap A \cong [Z_{73}]Z_3$ и порядок $|M_1 \cap B|$ делится на $2^8 \cdot 7^2$. Из [8] следует, что $M_1 \cap B < 2^6:(7 \times L_2(8))$. Ясно, что группа $2^6:(7 \times L_2(8))$ не содержит сверхразрешимых подгрупп с таким свойством.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Будем считать, что группа G – минимальный контр-пример к теореме 2. Так как G обладает свойствами E_π и $E_{\pi'}$, то $G = AB$, где A и B – холловы под-группы группы G взаимно простых порядков. Очевидно, что всякая разрешимая группа удовле-творяет условиям теоремы. Поэтому будем считать, что группа G неразрешима. Сначала пока-жем, что G не является простой неабелевой группой. Факторизации простых неабелевых групп холловыми подгруппами приведены в работе [10]. При доказательстве теоремы 2, будем исполь-зовать эти факторизации без дополнительных оговорок. Последовательно рассмотрим все слу-чайи, указывая при этом пары чисел $r \in \pi(A)$, $s \in \pi(B)$, для которых группа G не обладает свойством $E_{\{r,s\}}$, что противоречит условию теоремы 2.

1. $G \cong A_r$, где $5 \leq r$ – простое число, причем $A \cong A_{r-1}$, $B \cong Z_r$. Согласно результату Ф. Холла [11], группа A_n имеет бипримарную холлову $\{s, t\}$ -подгруппу, если $s = 2$ и $t = 3$ для $n = 3, 4, 5, 7, 8$. Противоречие с условием теоремы 2.

2. $G \cong M_{11} = (3^2: Q_8.2)([Z_{11}]Z_5) = (A_6.2)Z_{11}$. Из [8] следует, что группа M_{11} не обладает свойст-вом $E_{\{2,11\}}$.

3. $G \cong M_{23} = (2^4: A_7)([Z_{23}]Z_{11}) = (PSL_3(4):2_2)([Z_{23}]Z_{11}) = M_{22}Z_{23}$. Из [8] следует, что группа M_{23} не обладает свойством $E_{\{2,23\}}$.

4. $G \cong PSL_2(7) = S_4Z_7 = D_8([Z_7]Z_3)$. Группа $PSL_2(7)$ не имеет холловой $\{2,7\}$ -подгруппы.

5. $G \cong PSL_2(11) = A_4([Z_{11}]Z_5) = A_5Z_{11} = D_{12}([Z_{11}]Z_5)$. Группа $PSL_2(11)$ не обладает свойством $E_{\{2,11\}}$.

6. $G \cong PSL_2(29) = A_5([Z_{29}]Z_7)$. Группа $PSL_2(29)$ не обладает свойством $E_{\{2,29\}}$.

7. $G \cong PSL_2(59) = A_5([Z_{59}]Z_{29}) = D_{60}([Z_{59}]Z_{29})$. Группа $PSL_2(59)$ не обладает свойством $E_{\{2,59\}}$.

8. $G \cong PSL_2(2^n)$, $n \geq 2$; $A \cong [E_2^n]Z_2^{n-1}$, $B \cong Z_2^{n+1}$, где E_2^n – элементарная абелева группа порядка 2^n . Пусть $r \in \pi(2^n + 1)$, тогда группа $PSL_2(2^n)$ не обладает свойством $E_{\{2,r\}}$.

9. $G \cong PSL_2(q)$, $q = p^n$, где p – нечетное простое число и $q \equiv -1 \pmod{4}$. Тогда $A \cong [U]Z_{\frac{1}{2}(q-1)}$,

$B \cong D_{q+1}$, где $|U| = q$. Группа G не обладает свойством $E_{\{2,p\}}$.

10. $G \cong PSL_5(2) = (2^4: PSL_4(2))Z_{31} = (2^6:(S_3 \times PSL_2(7)))([Z_{31}]Z_5)$. Из [8] следует, что группа $PSL_5(2)$ не обладает свойством $E_{\{2,31\}}$.

11. $G \cong PSL_r(q)$, где $q = p^n$, $1 < r$ – нечетное простое число, $(r, q-1) = 1$. В этом случае

$G = P_i Z_{\frac{q^r-1}{q-1}}$ или $G = P_i \left(\begin{bmatrix} Z_{\frac{q^r-1}{q-1}} \\ Z_r \end{bmatrix} \right)$, где P_i – максимальная параболическая подгруппа в группе

$PSL_r(q)$ для $i = 1, r-1$. Пусть сначала p – нечетное простое число. Обозначим $T = Z_{\frac{q^r-1}{q-1}}$ – цикл

Зингера, являющийся циклической сильно изолированной подгруппой группы G . Пусть $t \in \pi(T)$. Тогда в группе G существует холлова $\{t, p\}$ -подгруппа. Из теорем 3.2 и 3.4 [12] следует, что дан-ная группа содержится в подгруппе Бореля. Из того факта, что T – нильпотентная холлова груп-па, можно считать, что T содержится в подгруппе Картана. Противоречие с тем, что минизо-тропный тор не содержится ни в какой собственной параболической подгруппе группы G .

Пусть теперь $p = 2$ и S – силовская s -подгруппа в группе T . По условию теоремы 2 существу-ет холлова $\{p, s\}$ -подгруппа $L = US$ группы G , где $U \in Syl_p(G)$. Покажем, что S – TI-подгруппа в L . Пусть для некоторого $1 \neq u \in U$ выполнено $S \cap S^u \neq 1$. Так как S – абелева группа, то $S \cap S^u \leq Z(\langle S, S^u \rangle)$. Следовательно, $C_L(S \cap S^u) = S\tilde{U}$, где $\tilde{U} \leq U$ и $\tilde{U} \neq 1$. Противоречие с тем, что T – сильно изолированная подгруппа группы G .

Рассмотрим $N_L(S)$. Пусть $N_L(S) = S\tilde{U}$, где $1 \neq \tilde{U} \leq U$. Так как $C_G(S) = T \leq N_G(S)$, то \tilde{U} нормализует T , что невозможно, поскольку $N_G(T)/T \cong Z_r$, где r – нечетное число. Таким образом, L – группа Фробениуса с ядром U . Отсюда следует, что S содержится в подгруппе Картана H группы G . Значит, порядок подгруппы Картана делится на $|T|$. Циклы Зингера сопряжены в группе G , поэтому можно считать, что $T \leq H < B$ – борелевская подгруппа. Противоречие с тем, что T не содержится ни в одной параболической подгруппе.

Следовательно, G не является простой неабелевой группой. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа в группе G . Если N – π -группа, то факторгруппа G/N – π -отделима в силу минимальности контрпримера. Поэтому G также π -отделима, что невозможно. Аналогично показывается, что N не является π' -группой.

Таким образом, $N = (N \cap A)(N \cap B)$ и $N \cap A \neq 1$, $N \cap B \neq 1$. Очевидно, что подгруппа N обладает свойствами E_π и $E_{\pi'}$. Пусть $p \in \pi(N \cap A)$, $q \in \pi(N \cap B)$. Покажем, что N обладает свойством $E_{\{p, q\}}$. В группе G существует холлова $\{p, q\}$ -подгруппа $L = PQ$, где $P \in Syl_p(G)$, $Q \in Syl_q(G)$.

Тогда $|NL| = \frac{|N||L|}{|N \cap L|} = [N : N \cap L]|P||Q|$ и $([N : N \cap L], pq) = 1$. Следовательно, $N \cap L$ – холлова

$\{p, q\}$ -подгруппа в N . Так как p и q – произвольные простые числа, то N удовлетворяет условиям теоремы 2. В силу минимальности контрпримера N – π -отделимая группа. Отсюда следует, что группа G – π -отделима.

Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е. Пусть G – конечная группа четного порядка, $\pi(G) = \pi \cup \pi'$, где $\pi \neq \emptyset$, $2 \in \pi'$. Если группа G обладает свойствами E_π , $E_{\pi'}$ и $E_{\{p, q\}}$ для всех $p \in \pi$, $q \in \pi'$, то G – π -разрешимая группа.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы 2 и теоремы Томпсона–Фейта.

З а м е ч а н и е. В теореме 2 условия E_π и $E_{\pi'}$ нельзя опустить. Пусть $G \cong PSL_2(7)$. Обозначим $\pi = \{3\}$, $\pi' = \{2, 7\}$. Тогда группа G обладает свойствами $E_{\{3, 2\}}$, $E_{\{3, 7\}}$, но не является 3-отделимой.

Литература

1. Ito N. // Math. Z. 1955. В. 62. С. 400–401.
2. Wielandt H. // Math. Z. 1958. В. 2. С. 611–618.
3. Kegel O. H. // J. Arch. Math. 1961. В. 12. Р. 90–93.
4. Kazarin L. S. // Comm. Algebra. 1986. Vol. 14. Р. 1001–1066.
5. Arad Z., Fisman E. // J. Algebra. 1984. Vol. 96. Р. 522–548.
6. Du Z. // J. Algebra. 1997. Vol. 195, I. 2. Р. 501–509.
7. Gorenstein D. Finite groups. New-York: Harper and Row, 1968.
8. Conway J. H. Atlas of Finite Groups. Oxford, 1985.
9. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967.
10. Тихоненко Т. В., Тютянов В. Н. // Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. 2009. 52, № 1. С. 125–111. На 11 Р. // Proc. London Math. Soc. 1956. Vol. 6. Р. 286–304.
12. Ревин Д. О. // Препринт № 40. Новосибирск, 1999. С. 42.

T. V. TIHONENKO

FACTORIZATION OF FINITE GROUPS WITH SUPERSOLUBLE AND HALL SUBGROUPS

Summary

All composition factors of the finite factorizable group whose factors are supersoluble subgroups are described in the article.

Let $\pi(G) = \pi \cup \pi'$ and $\pi \neq \emptyset$, $\pi' \neq \emptyset$. The finite group with the properties E_π , $E_{\pi'}$ and $E_{\{p, q\}}$ for all $p \in \pi$, $q \in \pi'$, is proved to be π -separable. Particularly, the finite group of even order ($2 \in \pi'$) is proved to be π -soluble.

УДК 515.124.62

С. М. АГЕЕВ, З. Н. СИЛАЕВА

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРОБЛЕМЫ БОРСУКА

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 12.05.2009)

Введение. Пространства с фильтрацией давно и плодотворно исследуются с разнообразных точек зрения. В частности, задача продолжения непрерывных отображений клеточных пространств с сохранением имеющихся фильтраций и родственные ей проблемы изучаются в рамках гомотопической топологии (теория препятствий, распетливание пространств и т. д. [1, 2]). Благодаря тому, что топология рассматриваемых пространств является слабой относительно элементов фильтрации, индуктивный метод доказательства здесь оказывается одним из основных. Однако стоит чуть усилить топологию клеточных пространств (например, рассматривать метрическую), как этот метод перестает работать – индуктивно строящиеся отображения перестают быть непрерывными. При этом многие результаты, справедливые для клеточных пространств, либо перестают быть верными, либо переходят в разряд открытых проблем.

В работе мы продолжаем исследование инъективных объектов категории метрических пространств с фильтрацией – так называемых профильтрованных абсолютных экстензоров или ретрактов ($\mathcal{N}\text{-AE} \equiv \mathcal{N}\text{-AR}$). Основы возникающей здесь теории, построенные в работах [3–5], позволяют рассматривать метрические профильтрованные абсолютные экстензоры, с одной стороны, как довольно естественное распространение понятия метрического экстензора на более общую ситуацию, а с другой стороны – как расширение теории клеточных пространств. Так, в [4] было показано, что свойство быть профильтрованным абсолютным экстензором влечет равностепенную локальную стягиваемость семейства элементов фильтрации, но обратное верно лишь для пространств конечной размерности.

В данной работе мы продолжаем изучать, как те или иные свойства абсолютных экстензоров преломляются в присутствии фильтрации. Известная проблема Борсука, окончательно решенная в [6], утверждает, что любая конечная экспонента $\text{exp}_k X$ абсолютного ретракта X также является абсолютным ретрактом. Если теперь рассмотреть прямой предел $\lim_{\rightarrow} \text{exp}_k X$ растущей последовательности $\text{exp}_1 X \subset \text{exp}_2 X \subset \text{exp}_3 X \subset \dots$ абсолютных ретрактов, то, поскольку топология предела является слабой относительно возникающих элементов фильтрации, а все препятствия к продолжению отображений отсутствуют, пространство $\lim_{\rightarrow} \text{exp}_k X$ будет профильтрованным абсолютным экстензором, но, вообще говоря, в классе клеточных пространств.

Однако по причине того, что прямой предел естественно лежит в метрическом пространстве $\text{exp} X$, наиболее подходящей топологией в нем следует признать не слабую, а метрическую. Возникающее пространство $\text{exp}_{\infty} X$ всех непустых конечных подмножеств пространства $X \in \text{ANR}$, как и все элементы его фильтрации $\{\text{exp}_k X\}_{k \in \mathbb{N}}$, являются метрическими абсолютными экстензорами. Но поскольку топология пространства $\text{exp}_{\infty} X$ не является слабой, то вышеперечисленных свойств фильтрации не хватает для установления профильтрованных экстензорных свойств этого пространства. Лишь в случае $\dim X < \infty$ для ANR-пространства X было известно, что $\text{exp}_{\infty} X \in \mathcal{N}\text{-ANE}$ [4].

Основным результатом, полученным в работе, является полное решение обобщенной проблемы Борсука.

Т е о р е м а 1. Если метрическое пространство X является абсолютным окрестностным ретрактом, то метрическое пространство $\text{exp}_\infty X$ с фильтрацией $\{\text{exp}_k X\}_{k \in \mathbb{N}}$ является метрическим профильтрованным абсолютным окрестностным экстензором.

Следует обратить внимание, что предложенный в статье метод доказательства дает также более прозрачное решение исходной проблемы Борсука.

Предварительные сведения и вспомогательные факты. Под *пространством с фильтрацией* (профильтрованным пространством, или \mathcal{N} -пространством), понимается топологическое пространство X , в котором выделена *фильтрация*, т. е. такая последовательность замкнутых подмножеств $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ двух \mathcal{N} -пространств X и Y называется *профильтрованным*, или \mathcal{N} -отображением, если $f(X_i) \subseteq Y_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$ (f сохраняет фильтрацию пространства X) [1]. Поскольку композиция двух \mathcal{N} -отображений снова является \mathcal{N} -отображением, то профильтрованные пространства образуют категорию, в которой в качестве морфизмов выступают \mathcal{N} -отображения. Далее мы будем рассматривать категорию метрических профильтрованных пространств.

Пусть X – метрическое пространство с фильтрацией $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Тогда его подпространство A с фильтрацией, образованной множествами $A_i = A \cap X_i$ для $i \in \mathbb{N}$, будем называть \mathcal{N} -подпространством \mathcal{N} -пространства X . Линейное нормированное пространство X назовем *нормированным \mathcal{N} -пространством*, если для $i \in \mathbb{N}$, X_i – линейное подпространство в X .

Степенью точки x профильтрованного пространства X назовем число, определяемое по формуле $\deg x = \min\{i \in \mathbb{N} \mid x \in X_i\}$. Ясно, что непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ \mathcal{N} -пространств X и Y является \mathcal{N} -отображением тогда и только тогда, когда $\deg f(x) \leq \deg x$ для любой точки $x \in X$. Обобщением понятия степени точки является понятие *степени подмножества M* профильтрованного пространства X : $\deg M = \min\{i \in \mathbb{N} \mid M \cap X_i \neq \emptyset\}$.

Будем называть *полиэдр* со слабой топологией *профильтрованным* или \mathcal{N} -полиэдром, если все элементы его фильтрации – подполиэдры.

Рассмотрим понятия, связанные с продолжением \mathcal{N} -отображений. Профильтрованное отображение $f: A \rightarrow Y$, заданное на замкнутом \mathcal{N} -подпространстве A \mathcal{N} -пространства X , называется *частичным \mathcal{N} -отображением*. Если для f существует такое \mathcal{N} -отображение $\hat{f}: X \rightarrow Y$, что $\hat{f}|_A = f$, будем говорить, что \mathcal{N} -отображение f допускает \mathcal{N} -продолжение на X , а \mathcal{N} -отображение \hat{f} будем называть *\mathcal{N} -продолжением f* . Будем говорить, что \mathcal{N} -пространство Y является *абсолютным \mathcal{N} -экстензором* (абсолютным окрестностным \mathcal{N} -экстензором), или *принадлежит классу \mathcal{N} -АЕ* (\mathcal{N} -АНЕ), если для любого \mathcal{N} -пространства X и любого его замкнутого \mathcal{N} -подпространства A , любое частичное \mathcal{N} -отображение $f: A \rightarrow Y$ допускает \mathcal{N} -продолжение $\hat{f}: X \rightarrow Y$ (\mathcal{N} -продолжение $\hat{f}: U \rightarrow Y$ на некоторую окрестность U множества A в X).

Если X – \mathcal{N} -пространство с фильтрацией $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $I = [0,1]$, то будем рассматривать $X \times I$ как \mathcal{N} -пространство с фильтрацией $\{X_i \times I\}_{i \in \mathbb{N}}$. Профильтрованные отображения $f, g: X \rightarrow Y$ будем называть *\mathcal{N} -гомотопными*, если существует такая \mathcal{N} -гомотопия $H: X \times I \rightarrow Y$, что $H_0 = f$ и $H_1 = g$. Если \mathcal{U} – открытое покрытие пространства X ($\mathcal{U} \in \text{cov} X$), то \mathcal{N} - \mathcal{U} -гомотопией будем называть такую \mathcal{N} -гомотопию $H: X \times I \rightarrow Y$, что для любой точки $x \in X$ существует элемент $U \in \mathcal{U}$, такой, что $H(\{x\} \times I) \subseteq U$. Если $H_0 = \text{id}_X$, то \mathcal{N} - \mathcal{U} -гомотопию H будем называть *\mathcal{N} - \mathcal{U} -деформацией*. Если диаметры элементов покрытия \mathcal{U} не превосходят числа $\varepsilon > 0$, то \mathcal{N} - \mathcal{U} -деформацию будем называть *\mathcal{N} - ε -деформацией*.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\text{exp} X$ – экспонента X , т. е. пространство непустых компактных подмножеств X , наделенное топологией Виеториса (которая порождается метрикой Хаусдорфа ρ_H). Обозначим через $\text{exp}_k X \subseteq \text{exp} X$ пространство всех не более чем k -точечных подмножеств X , а через $\text{exp}_\infty X$ – подпространство $\bigcup_{k=1}^{\infty} \text{exp}_k X \subseteq \text{exp} X$. Ясно, что семейство $\{\text{exp}_k X\}$ образует фильтрацию пространства $\text{exp}_\infty X$. Если $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение метрических

пространств X и Y , то ограничение отображения $\text{exp} f: \text{exp} X \rightarrow \text{exp} Y$, $(\text{exp} f)(C) = f(C)$, где $C \in \text{exp} X$, задает отображение $\text{exp}_\infty f: \text{exp}_\infty X \rightarrow \text{exp}_\infty Y$, сохраняющее указанную фильтрацию пространства $\text{exp}_\infty X$.

Аппроксимация \mathcal{N} -полиэдрами. Всюду в этом параграфе под X будет пониматься линейное нормированное пространство. Пусть $\{Y_k = \text{exp}_k X\}_{k \in \mathbb{N}}$ есть фильтрация пространства $Y = \text{exp}_\infty X$. Доказательство теоремы 1 основывается на следующем результате.

Т е о р е м а 2. Для любого $i \in \mathbb{N}$ существуют открытое покрытие $\Omega_i \in \text{cov} Y$, \mathcal{N} -отображение $g_i: N_i \rightarrow Y$ и $\mathcal{N}2^{-i}$ -гомотопия $F_s: Y \rightarrow Y$, $s \in I$, такая, что $F_0 = \text{id}_Y$, $F_1 = g_i \circ \varphi_i$, где N_i есть нерв покрытия Ω_i , $\varphi_i: Y \rightarrow N_i$ – каноническое отображение, подчиненное Ω_i .

Сопоставим каждой точке $y = \{y_1, \dots, y_m\} \in Y = \text{exp}_\infty X$, $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$, степень $\text{deg } y = m$, носитель $\text{supp } y = \{y_1, \dots, y_m\} \subset X$; разрешающий радиус $r(y) = \frac{1}{8} \inf_{1 \leq i, j \leq m} \rho(y_i, y_j) > 0$. Следующие два результата играют в доказательстве теоремы 2 существенную роль.

Л е м м а 1. Пусть $v = \{v_1, \dots, v_m\} \in N_\delta(y) \subset Y$, где $\delta \leq 2r(y)$, а $N_\delta(y)$ есть δ -окрестность точки $y \in Y$. Тогда

1) $\text{deg } v \geq \text{deg } y$;

2) существует единственная сюръекция конечных множеств, $\theta = \theta(v, y): \text{supp } v \rightarrow \text{supp } y$, удовлетворяющая условию $\|\text{id}_{\text{supp } v} - \theta\| \leq \delta$ (что эквивалентно $\rho(v_j, \theta(v_j)) \leq \delta$ для всех $j \leq m$).

Л е м м а 2. Пусть $y_1, \dots, y_s \in Y = \text{exp}_\infty X$ и задана такая последовательность чисел $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_s > 0$, что $\delta_i \leq r(y_i)$ для любого $i \leq s$. Если $Q = N_{\delta_1}(y_1) \cap \dots \cap N_{\delta_s}(y_s) \neq \emptyset$, то

3) $\text{deg } y_1 \leq \dots \leq \text{deg } y_s$;

4) для любой точки $y \in Q$ и любой точки $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ s -мерного симплекса Δ^{s-1} норма непрерывного отображения $\text{id}_{\text{supp } y} - \sum_{i=1}^s \lambda_i \theta(y, y_i): \text{supp } y \rightarrow X$ * не превосходит $2\delta_1$;

5) для любых точек $u, v \in Q$ и любых $\lambda \in \Delta^{s-1}$ линейные комбинации $\sum_{i=1}^s \lambda_i \theta(u, y_i) \in C(\text{supp } u, X)$ и $\sum_{i=1}^s \lambda_i \theta(v, y_i) \in C(\text{supp } v, X)$ имеют один и тот же образ;

6) отображение $\Lambda_s: \Delta^{s-1} \rightarrow Y = \text{exp}_\infty X$, сопоставляющее $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \in \Delta^{s-1}$ образ линейной комбинации $\sum_{i=1}^s \lambda_i \theta(y, y_i): \text{supp } y \rightarrow X$, где y – любой элемент Q , есть непрерывное отображение.

Рассмотрим далее разбиение единицы $\{t_\mu\}_{\mu \in Y}$ метрического пространства Y , подчиненное открытому покрытию $\Omega_i = \{B_\mu = N_{\delta_i(\mu)}(\mu) \mid \mu \in Y, \delta_i(\mu) = \min\{r(\mu), 2^{-i}\}\} \in \text{cov } Y$. Пусть N_i – нерв покрытия Ω_i . Тогда $\varphi_i: Y \rightarrow N_i$, задаваемое формулой $\varphi_i(y) = \sum_{\mu \in Y} t_\mu(y) \langle B_\mu \rangle$, есть каноническое

отображение, подчиненное покрытию Ω_i .

Рассмотрим ограничение покрытия Ω_i на Y_k , т. е. $\Omega_i|_{Y_k} = \{N_{\delta_i(y)}(y) \cap Y_k \mid y \in Y\}$, и обозначим его нерв через ${}_k N_i$. Существует естественное симплициальное вложение $\pi_k: {}_k N_i \rightarrow N_i$, которое переводит вершину $\langle N_{\delta_i(y)}(y) \cap Y_k \rangle$ в вершину $\langle N_{\delta_i(y)}(y) \rangle$. Будем отождествлять симплекс $\sigma' = \langle N_{\delta_i(y_1)}(y_1) \cap Y_k, \dots, N_{\delta_i(y_p)}(y_p) \cap Y_k \rangle \subset {}_k N_i$ с симплексом $\sigma = \langle N_{\delta_i(y_1)}(y_1), \dots, N_{\delta_i(y_p)}(y_p) \rangle \subset N_i$, т. е. будем считать нерв ${}_k N_i$ подмножеством нерва N_i .

Для любого $\sigma = \langle N_{\delta_i(y_1)}(y_1), \dots, N_{\delta_i(y_s)}(y_s) \rangle \subset N_i$ пересечение $A = \bigcap_{p=1}^s N_{\delta_i(y_p)}(y_p) \neq \emptyset$. Положив $k = \min\{l \in \mathbb{N} \mid A \cap Y_l \neq \emptyset\}$, получим, что $A \cap Y_k \neq \emptyset$. Поэтому существует симплекс $\sigma' = \langle N_{\delta_i(y_1)}(y_1) \cap Y_k, \dots, N_{\delta_i(y_s)}(y_s) \cap Y_k \rangle \subset {}_k N_i$, который отождествляется с σ с помощью π_k . Таким образом, $\sigma \subset {}_k N_i$, поэтому $\bigcup_{k=1}^\infty {}_k N_i = N_i$ и семейство $\{{}_k N_i\}_{k \in \mathbb{N}}$ образует фильтрацию полиэдра N_i .

* Пространство всех непрерывных отображений $C(\text{supp } y, X)$ рассматривается с sup -нормой.

Л е м м а 3. *Каноническое отображение φ_i является \mathcal{N} -отображением.*

Доказательства лемм 1–3 несложны технически и могут быть опущены.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Упорядочим вершины произвольного симплекса $\sigma = \langle N_{\delta_i(y_1)}(y_1), \dots, N_{\delta_i(y_m)}(y_m) \rangle \subset N_i$, $\bigcap_{p=1}^m N_{\delta_i(y_p)}(y_p) \neq \emptyset$, следующим образом: $\delta_i(y_1) \geq \dots \geq \delta_i(y_m)$.

В силу леммы 2 степени точек y_p образуют неубывающую последовательность $\deg y_1 \leq \dots \leq \deg y_m$. Так как $\delta_i(y_m) \leq r(y_p)$ и $y_m \in N_{2r(y_p)}(y_p)$, поэтому однозначно определены сюръекции $\theta(y_m, y_p): \text{supp } y_m \rightarrow \text{supp } y_p$ (лемма 1). Искомое отображение g_i^σ на симплексе $\sigma = \langle N_{\delta_i(y_1)}(y_1), \dots, N_{\delta_i(y_m)}(y_m) \rangle$ зададим следующей формулой: $g_i^\sigma(\sum_{p=1}^m t_p \langle N_{\delta_i(y_p)}(y_p) \rangle) = \Lambda_m(t_1, \dots, t_m) = \text{Im} \sum_{p=1}^m t_p \theta(y_0, y_p) \in Y$,

где y_0 – произвольный элемент из $\bigcap_{p=1}^m N_{\delta_i(y_p)}(y_p)$.

Пусть $\sigma_1 = \langle N_{\delta_i(y_{i_1})}(y_{i_1}), \dots, N_{\delta_i(y_{i_s})}(y_{i_s}) \rangle$ – грань σ , причем $\delta_i(y_{i_1}) \geq \dots \geq \delta_i(y_{i_s})$. Тогда для произвольной точки $t \in \sigma_1$ y_0 принадлежит $\bigcap_{j=1}^s N_{\delta_i(y_{i_j})}(y_{i_j})$. В силу явной формулы для g_i^σ имеем $g_i^{\sigma_1}(t) = \text{Im} \sum_{j=1}^s t_{i_j} \theta(y_0, y_{i_j})$. Но $g_i^\sigma(t) = \text{Im} \sum_{p=1}^m t_p \theta(y_0, y_p)$, где $t \in \sigma_1$, поэтому $g_i^{\sigma_1} = g_i^\sigma|_{\sigma_1}$. Таким образом, возникает непрерывное отображение $g_i: N_i \rightarrow Y$ такое, что $g_i|_\sigma = g_i^\sigma$ для любого симплекса σ .

Докажем, что для любого $k \in \mathbf{N}$, $g_i(k N_i) \subseteq Y_k$. Действительно, для любого $\sigma \subseteq_k N_i$ существует точка $y \in Y_k \cap (\bigcap_{p=1}^m N_{\delta_i(y_p)}(y_p))$. Но для любого $1 \leq p \leq m$, $\theta(y, y_p) \in C(\text{supp } y, X)$, следовательно, $\sum_{p=1}^m t_p \theta(y, y_p) \in C(\text{supp } y, X)$, и так как мощность $|\text{supp } y| = \deg y \leq k$, то $|\text{Im} \sum_{p=1}^m t_p \theta(y, y_p)| \leq |\text{supp } y| \leq k$, значит, $g_i(\sigma) \subseteq Y_k$, откуда следует, что $g_i(k N_i) \subseteq Y_k$.

Определим гомотопию F_s . Пусть $y \in Y$ и $\varphi_i(y) = \sum_{p=1}^m t_p \langle N_{\delta_i(y_p)}(y_p) \rangle$. Так как $y \in N_{2r(y_p)}(y_p)$ для всех $p \leq m$ и определены отображения $\theta(y, y_p)$, то искомую гомотопию F_s можно задать формулой $F_s(y) = \text{Im}(\sum_{p=1}^m t_p ((1-s) \cdot \text{id}_{\text{supp } y} + s \cdot \theta(y, y_p)))$.

Так как коэффициенты t_p и отображение $\theta(y, y_p)$ (как отображение из $\bigcap_{p=1}^m N_{\delta_i(y_p)}(y_p) \subseteq Y$ в X) зависят от y непрерывным образом, то F_s непрерывно. При этом $F_0 = \text{id}_Y$, а $F_1 = g_i \circ \varphi_i = g_i(\sum_{p=1}^m t_p \langle N_{\delta_i(y_p)}(y_p) \rangle) = \Lambda_m(t_1, \dots, t_m) = \text{Im} \sum_{p=1}^m t_p \theta(y, y_p)$. Так как $\|\theta(y, y) - \theta(y, y_p)\| = \|\text{id}_{\text{supp } y} - \theta(y, y_p)\| \leq \delta_i(y_p) \leq \delta_i(y_1)$, то $\|\text{id}_{\text{supp } y} - F_s(y)\| = \|\text{Im} \theta(y, y) - F_s(y)\| \leq s \cdot \delta_i(y_1) \leq 2^{-i}$. Если $y \in Y_k$ для любого $k \in \mathbf{N}$, то $|\text{Im} \theta(y, y_p)| \leq k$, и, следовательно, $F_s(Y_k) \subseteq Y_k$, то есть F – \mathcal{N} -гомтопия. Теорема 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Докажем сначала частный случай теоремы 1.

Т е о р е м а 3. *Если X – линейное нормированное пространство, то $\text{exp}_\infty X \in \mathcal{N}\text{-ANE}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как очевидно, что $\text{exp}_\infty X$ допускает \mathcal{N} -стягивание, то все сводится к установлению $\text{exp}_\infty X \in \mathcal{N}\text{-ANE}$.

Из теоремы 2 следует, что для любого $i \in \mathbf{N}$ существуют \mathcal{N} -полиэдр N_i , \mathcal{N} -отображение $g_i: N_i \rightarrow \text{exp}_\infty X = Y$ и $\mathcal{N}2^{-i}$ -гомтопия $F_s: Y \rightarrow Y$ такие, что $F_0 = \text{id}_Y$, $F_1 = g_i \circ \varphi_i$. Рассмотрим замкнутое \mathcal{N} -вложение метрического \mathcal{N} -пространства Y в линейное нормированное \mathcal{N} -пространство C , существующее в силу [3]. Из теоремы Кодамы [7] для профильтрованных пространств следует, что полиэдр $N_i \in \mathcal{N}\text{-ANE}$. Поэтому \mathcal{N} -отображение $\varphi_i: Y \rightarrow N_i$ имеет \mathcal{N} -продолжение $\hat{\varphi}_i: V \rightarrow N_i$, где V –

окрестность Y в C . Таким образом, найдена \mathcal{N} - 2^{-i} -деформация F такая, что $F_1 = g_i \circ \varphi_i$ допускает окрестностное \mathcal{N} -продолжение $\hat{F}_1 = g_i \circ \hat{\varphi}_i : V \rightarrow Y$. Тогда, применяя характеризацию \mathcal{N} -ANE через малые \mathcal{N} -деформации [5], получаем, что $Y = \text{exp}_\infty X \in \mathcal{N}$ -ANE. Теорема 3 доказана.

Завершается доказательство теоремы 1 редукцией к рассмотренному случаю. Пусть $X \in \text{ANE}$. По теореме Куратовского–Войдыславского существует замкнутое топологическое вложение $i: X \rightarrow L$, где L – линейное нормированное пространство, которое по теореме Дугунджи есть AE [8]. Так как $X \in \text{ANE}$, то существует окрестностная ретракция $r: U \rightarrow X$, где U – окрестность X в L .

Рассмотрим \mathcal{N} -отображение $\text{exp } i: \text{exp}_\infty X \rightarrow \text{exp}_\infty L$. По теореме 3 $\text{exp}_\infty L \in \mathcal{N}$ -AE. Тогда образ окрестности $\text{exp}_\infty U$ множества $\text{exp}_\infty L \in \mathcal{N}$ -ANE при окрестностной \mathcal{N} -ретракции $\text{exp } r: \text{exp}_\infty U \rightarrow \text{exp}_\infty X$ является \mathcal{N} -ANE-пространством, то есть $\text{exp}_\infty X \in \mathcal{N}$ -ANE, что и требовалось доказать.

Литература

1. Бордман Дж., Фогт Р. Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах. М., 1977.
2. Постников М. М. Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. М., 1984.
3. Силаева З. Н. Универсальные пространства с фильтрацией // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. 2009. Т. 17, № 2. С. 76–83.
4. Силаева З. Н. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2009. № 3. С. 89–94.
5. Силаева З. Н. // Matematychni Studii. 2009. № 2. С. 180–192.
6. Nguen To Nhu. // Fund. Math. Vol. 124. P. 243–254.
7. Kodama Y. // J. Math. Soc. Japan. 1956. Vol. 8. P. 206–215.
8. Борсук К. Теория ретрактов. М., 1971.

S. M. AGEEV, Z. N. SILAYEVA

GENERALIZATION OF BORSUK'S PROBLEM

Summary

Borsuk's well-known problem on preserving the absolute extensor by the functor of finite exponent is resolved in the category of metric filtered spaces.

УДК 517.977

Д. С. КУЗЬМЕНКОВ

ОПТИМАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ЗА СИСТЕМОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 14. 11.2008)

Введение. Впервые понятия управляемости и наблюдаемости обыкновенных динамических систем ввел Р. Калман [1] в начале 1960-х годов. Согласно его принципу дуальности, задаче управляемости без учета ограничений на управляющие воздействия соответствует задача наблюдаемости, в которой полагается, что измерения выходного сигнала объекта наблюдения производятся с абсолютной точностью. Задачи оптимального наблюдения, в которых учитывается ограниченная точность измерений, стали исследоваться, начиная с [2]. Роль задач оптимального наблюдения выявляется при оптимальном управлении в условиях неопределенности.

Процессы, поведение которых описывается уравнениями параболического типа, встречаются во многих приложениях [3]. Цель данной работы – описать метод оптимального наблюдения в реальном времени за тепловым процессом в стержне.

1. Постановка задачи. Пусть $l > 0$, t_* , $t^* > t_*$, – заданные константы; $\Omega = S \times T$, $S = [0, l]$, $T = [t_*, t^*]$; $a^2 = \mu(t)$, $x_0(s)$, $s \in S$, $t \in T$, – непрерывные функции.

Рассмотрим тепловой процесс в стержне, описываемый уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \quad (s, t) \in \Omega; \\ \frac{\partial x}{\partial s}(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial x}{\partial s}(l, t) = -\mu(t)x(l, t), \quad t \in T; \\ x(s, t_*) &= x_0(s), \quad s \in S. \end{aligned} \quad (1)$$

Будем считать, что неизвестное начальное состояние $x_0(s)$, $s \in S$, представимо в виде:

$$x_0(s) = x_0(s | w) = x_1(s) + \gamma'(s)w, \quad s \in S,$$

где $x_1(s) \in R$, $\gamma(s) \in R^{n_w}$, $s \in S$ – непрерывные функции; $w \in W = \{w \in R^{n_w}, d_* \leq w \leq d^*\}$ – ограниченное множество возможных значений неизвестного параметра w ; d_* , $d^* \in R^{n_w}$ – заданные векторы.

Множество W назовем *априорным распределением неизвестного параметра w* . Ему соответствует семейство $X_0 = X_0(\cdot) = \{x_0(\cdot | w), w \in W : x_0(\cdot | w) = (x_0(s | w), s \in S)\}$ – *априорное распределение начального состояния*.

Для уменьшения начальной неопределенности системы (1) в дискретные моменты времени будем вести наблюдение за изменением температуры в стержне при помощи измерительного устройства

$$y(t) = \int_0^l c(s, t)x(s, t)ds + \xi(t), \quad t \in T_h, \quad (2)$$

где $T_h = \{t^*, t^* + h_t, \dots, t^*\}$, $h_t = (t^* - t^*)/N$, N – натуральное число; $c(s, t) \in R$, $s \in S$, $t \in T_h$, – известная непрерывная функция; $\xi(t) \in R$, $t \in T_h$, – ошибки измерения, удовлетворяющие неравенствам:

$$\xi_* \leq \xi(t) \leq \xi^*, \quad t \in T_h.$$

Пусть в процессе наблюдения записаны сигналы измерительного устройства

$$y(\cdot) = (y^*(t^*), y^*(t^* + h_t), \dots, y^*(t^*)) = (y^*(t), t \in T_h). \quad (3)$$

Множество $\widehat{W} = \widehat{W}(y(\cdot))$, соответствующее сигналу измерения $y(\cdot)$, назовем *апостериорным распределением параметра* w , если оно состоит из тех и только тех векторов $w \in W$, которые вместе с некоторыми ошибками $\xi(t)$, $t \in T_h$, способны породить сигналы (3). Множеству \widehat{W} соответствует апостериорное распределение $\widehat{X}_0 = \widehat{X}_0(y(\cdot))$ начального состояния.

Задачу

$$\widehat{\alpha} = p'w^* = \max_{w \in \widehat{W}} p'w, \quad (4)$$

где p – заданный n -вектор, $\|p\| = 1$, назовем *линейной задачей апостериорного наблюдения*.

Вектор $w^* = w^*(y(\cdot))$ будем называть апостериорным решением задачи оптимального наблюдения, а $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}(y(\cdot))$ – оценкой апостериорного распределения.

Аппроксимируя систему (1) методом прямых, заменим ее на систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_t(s_1, t) = \bar{a}[x(s_2, t) - x(s_1, t)], \\ x_t(s_i, t) = \bar{a}[x(s_{i-1}, t) - 2x(s_i, t) + x(s_{i+1}, t)], \quad i = \overline{2, n-1}; \\ x_t(s_n, t) = \bar{a}[x(s_{n-1}, t) - (1 + h_s \mu(t))x(s_n, t)], \\ x(s_i, t^*) = x_1(s_i) + \gamma(s_i)w, \quad w \in W, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases} \quad (5)$$

где $h_s = l/(n-1)$ – период квантования пространственной переменной, n – натуральное число; $s_i = ih_s$, $\bar{a} = a^2/h_s^2$, $t \in T$; или в матричной форме:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(t^*) = x_1 + \Gamma \cdot w,$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} -\bar{a} & \bar{a} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{a} & -2\bar{a} & \bar{a} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a} & -2\bar{a} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{a} & -(1 + h_s \mu(t))\bar{a} \end{pmatrix}, \quad x_1 = (x_1(s_i), i = \overline{1, n}), \quad \Gamma = (\gamma(s_i), i = \overline{1, n}) = (\gamma_{ik}, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, n_w}).$$

Применяя формулу трапеций, аппроксимируем измерительное устройство (2) и получим

$$y(t) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) x(s_i, t) + \xi(t), \quad t \in T_h, \quad (6)$$

где $c(s_1, t) = c(s_i, t)/2$, $c(s_n, t) = c(s_n, t)/2$, $t \in T_h$.

Если известно апостериорное распределение \widehat{W} параметра w начального состояния системы (5) (апостериорное распределение \widehat{X}_0 начального состояния системы (5)), то

можно отыскать текущее распределение $\widehat{W}(\tau)$ параметра w начального состояния системы для позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$ (апостериорное распределение $\widehat{X}_0(\tau)$ текущего состояния $x(\tau)$):

$$\widehat{X}_0(\tau) = F(\tau, t_*) \widehat{X}_0 = \left\{ x \in R^n : x(s_i, \tau) = \sum_{j=1}^n f(s_i, \tau; s_j, t_*) x_0(s_j), x_0(s_j) \in \widehat{X}_0, j = \overline{1, n} \right\}.$$

Здесь $F(t, t_*) = F(t)F^{-1}(t_*)$, $F(t)$, $t \in T$, – фундаментальная $n \times n$ -матрица решений системы (5); $\dot{F} = AF$, $F(0) = E$.

С учетом вида множества $\widehat{X}_0(\tau)$ сигнал измерительного устройства (6) для параметра $w \in W$ начального состояния системы (5) и функции ошибок $\xi(t)$, $t \in T_h$, примет вид

$$y(t) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) (x_1(s_j) + \gamma(s_j)w) + \xi(t), t \in T_h. \quad (7)$$

Следовательно, при измеренном сигнале $y^*(t)$, $t \in T_h$, множество \widehat{W} состоит из тех и только тех параметров $w \in R^n$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\xi_* \leq y^*(t) - h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) (x_1(s_j) + \gamma(s_j)w) \leq \xi^*, t \in T_h; w \in W.$$

Обозначим $\xi_*(t) = \xi_* - y^*(t) + h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) x_1(s_j)$, $\xi^*(t) = \xi^* - y^*(t) + h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) x_1(s_j)$, $d'(t) = -h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \sum_{j=1}^n f(s_i, t; s_j, t_*) \gamma(s_j)$, $t \in T_h$. В результате задача оптимального наблюдения примет следующий вид:

$$\begin{aligned} p'w &\rightarrow \max, \\ \xi_*(t) &\leq d'(t)w \leq \xi^*(t), t \in T_h, \\ d_* &\leq w \leq d^*. \end{aligned} \quad (8)$$

2. Основные элементы двойственного метода. Для решения задач типа (8) будем использовать динамическую реализацию двойственного метода [4]. Приведем ее основные элементы.

1) регулярная опора $K_{on} = \{T_{on}, J_{on}\}$, $T_{on} \subset T_h$, $J_{on} \subset J$, $|T_{on}| = |J_{on}|$; 2) опорная матрица $D_{on} = (d_j(t), j \in J_{on}, t \in T_{on})$; 3) функция потенциалов $v(t)$, $t \in T_h$: $v(t) = 0$, $t \in T_h = T_h \setminus T_{on}$; $v'_{on} = v'(T_{on}) = (v(t), t \in T_{on}) = p'_{on} D_{on}^{-1}$, $p_{on} = p(J_{on}) = (p_j, j \in J_{on})$; если $K_{on} = \emptyset$, то $v(t) = 0$, $t \in T_h$; 4) вектор оценок $\Delta = \Delta(J) = (\Delta_j, j \in J)$: $\Delta'_n = (\Delta_j, j \in J_n = J \setminus J_{on}) = p'_n - v'_{on} D_{on}^n$, $\Delta'_{on} = (\Delta_j, j \in J_{on}) = 0$, где $D_{on}^n = (d_j(t), j \in J_n, t \in T_{on})$, $p_n = p(J_n) = (p_j, j \in J_n)$; если $K_{on} = \emptyset$, то $\Delta = p$; 5) вектор псевдопараметров начального состояния κ и функция псевдоошибок $\zeta(t)$, $t \in T_h$. Сначала определим $\kappa_n = \kappa(J_n)$: $\kappa_j = d_{*j}$, если $\Delta_j < 0$; $\kappa_j = d_{*j}^*$, если $\Delta_j > 0$; $\kappa_j \in [d_{*j}, d_{*j}^*]$, если $\Delta_j = 0$; $j \in J_n$; и $\zeta_{on} = \zeta(T_{on})$: $\zeta(t) = \xi_*(t)$, если $v(t) < 0$; $\zeta(t) = \xi^*(t)$, если $v(t) > 0$; $\zeta(t) \in [\xi_*(t), \xi^*(t)]$, если $v(t) = 0$; $t \in T_{on}$. $\kappa_{on} = \kappa(J_{on})$ найдем из уравнения $\sum_{j \in J_{on}} d_j(t) \kappa_j = \zeta(t) - \zeta_0(t)$,

$t \in T_{on}$, где $\zeta_0(t) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \eta_0(s_i, t)$, $t \in T_{on}$; $\eta_0(t) = (\eta_0(s_i, t), i = \overline{1, n})$, $t \in T$, – псевдосостояние

измерительного устройства – решение системы (1) с начальным условием $x(t_*) = \Gamma \kappa^0$, где $\kappa^0 = (\kappa_{on}^0 = 0, \kappa_n^0 = \kappa_n)$. Функцией псевдоошибок назовем функцию $\zeta(t) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, t) \eta(s_i, t)$, $t \in T_h$, где $\eta(t) = (\eta(s_i, t), i = \overline{1, n})$, $t \in T$, – псевдосостояние измерительного устройства – решение системы (1) с начальным условием $x(t_*) = \Gamma \kappa$; б) множества точек минимума и максимума функции псевдоошибок $T_0^- = \{t \in \overline{T}_h = T_h \setminus \{t_*, t^*\} : \zeta(t) < \zeta(t - h_t), \zeta(t) < \zeta(t + h_t)\}$ и $T_0^+ = \{t \in \overline{T}_h : \zeta(t) > \zeta(t - h_t), \zeta(t) > \zeta(t + h_t)\}$; $T_0 = T_0^- \cup T_0^+$.

Двойственный метод [4] построения апостериорного решения задачи оптимального наблюдения (8) является итеративным. Он начинается с произвольной опоры $K_{оп}^1$ и заканчивается построением оптимальной опоры $K_{оп}^0$. Итерация представляет замену «старой» опоры $K_{оп}$ на «новую» $\overline{K}_{оп}$, при которой выполняется соотношение $p' \overline{\kappa} \leq p' \kappa$.

К началу каждой итерации сохраняем в памяти ЭВМ следующую информацию: 1) опоры $K_{оп}$; 2) матрицу $D_{оп}$; 3) опорные значения функции потенциалов $v_{оп}$; 4) вектор оценок Δ ; 5) вектор псевдопараметров начального состояния κ ; 6) множества T_0^-, T_0^+ ; 7) значение матричной функции $F(t)$, $t \in T_0 \cup T_{on} \cup \{t_*, t^*\}$.

Основные выкладки итераций двойственного метода, используемого для решения задач типа (8), в данной статье не приводятся, с ними можно ознакомиться в [4, 5]. В конце каждой итерации после построения новой опоры $\overline{K}_{оп}$ видоизменяем информацию 2) – 7).

Двойственный метод, на итерациях которого преобразуется информация 1) – 7), конечен, если на его итерациях встречаются только регулярные опоры [4].

3. Квазидекомпозиция фундаментальной матрицы. Для предлагаемого метода оптимального наблюдения в реальном времени для больших значений n решающую роль играет быстрое вычисление значений фундаментальной матрицы $F(t)$, $t \in T_h$. Опишем метод квазидекомпозиции для решения этой задачи.

Из вида измерительного устройства (7) следует, что если $c(s_i, t) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, $t \in T_h$, то необходимо знать i -ю строку фундаментальной матрицы. Так как фундаментальная матрица $F(t)$, $t \in T_h$, является симметричной, то ее строку можно вычислить за одно интегрирование системы из n обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ниже опишем процедуру квазидекомпозиции i -й строки фундаментальной матрицы $f(t) = (f_1(t) \ f_2(t) \ \dots \ f_n(t)) = (f_{i1}(t) \ f_{i2}(t) \ \dots \ f_{in}(t))$, $t \in T_h$ (с остальными строками необходимо поступать аналогичным образом).

Элементы $f(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{f}_1 = \overline{a}(f_2 - f_1), \dot{f}_i = \overline{a}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}), i = \overline{2, n-1}; \quad (9)$$

$$\dot{f}_n = \overline{a}(f_{n-1} - (1 + h_s v(t)) f_n), f_i(t_*) = 0, i = \overline{1, n-1}, f_n(t_*) = 1.$$

Запишем функцию $f(t)$, $t \in T_h$, в виде $f(t) = (\alpha_0(t) \in R, f^1(t) \in R^m, \alpha_1(t) \in R, f^2(t) \in R^m, \dots, \alpha_{r-1}(t) \in R, f^r(t) \in R^m, \alpha_r(t) \in R)$, $t \in T_h$, где $\alpha_q(t) = f_{q(m+1)+1}(t)$, $q = \overline{0, r}$; $f^q(t) = (f_i^q(t), i = \overline{1, m}) = (f_{p+i}(t), i = \overline{1, m})$, $q = \overline{1, r}$; $t \in T_h$; выберем числа m , $p = (q-1)(m+1) + 1$, $r = (n-1)/(m+1)$. Из матрицы коэффициентов уравнений (9) следует, что, зная значения функций $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}$, $t \in T_h$, можно интегрирование системы порядка n заменить на параллельное интегрирование r систем порядка m :

$$\begin{aligned} \dot{f}_1^q &= \bar{a}(\alpha_{q-1}(t) - 2f_1^q + f_2^q), \dot{f}_i^q = \bar{a}(f_{i-1}^q - 2f_i^q + f_{i+1}^q), \quad i = \overline{2, m-1}; \\ \dot{f}_m^q &= \bar{a}(f_{m-1}^q - 2f_m^q + \alpha_q(t)), f_i^q(t^*) = f_{p+i}(t^*), \quad i = \overline{1, m}, t \in T_h, q = \overline{1, r}; \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\dot{f}^q = Qf^q + \alpha^q(t), \quad f^q(t^*) = (f_{p+i}(t^*), i = \overline{1, m}), \quad t \in T_h, q = \overline{1, r}, \quad (10)$$

$$\text{где } Q = \begin{pmatrix} -2\bar{a} & \bar{a} & 0 & \dots & 0 \\ \bar{a} & -2\bar{a} & \bar{a} & \dots & 0 \\ 0 & \bar{a} & -2\bar{a} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2\bar{a} \end{pmatrix}, \quad \alpha^q(t) = \begin{pmatrix} \bar{a}\alpha_{q-1}(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \bar{a}\alpha_q(t) \end{pmatrix}.$$

Аппроксимируем функции $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}$, $t \in T_h$, конечно-параметрическими функциями $\tilde{\alpha}_q(t)$, $q = \overline{0, r}$, $t \in T_h$. Обозначим через $\tilde{f}_i^q(t)$, $i = \overline{1, m}; q = \overline{1, r}; t \in T_h$, решения систем (10), в которых функции $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}; t \in T_h$, заменены на $\tilde{\alpha}_q(t)$, $q = \overline{0, r}; t \in T_h$.

Из непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить такие аппроксимации функций $\alpha_q(t)$, $q = \overline{0, r}; t \in T_h$, что выполняются неравенства: $|\alpha_q(t) - \tilde{\alpha}_q(t)| \leq \varepsilon$, $q = \overline{0, r}; |f_i^q(t) - \tilde{f}_i^q(t)| \leq \varepsilon$, $q = \overline{1, r}; i = \overline{1, m}; t \in T_h$.

Функцию $\tilde{f}(t) = (\tilde{\alpha}_0(t), \tilde{f}^1(t), \tilde{\alpha}_1(t), \tilde{f}^2(t), \dots, \tilde{\alpha}_{r-1}(t), \tilde{f}^r(t), \tilde{\alpha}_r(t))$, $t \in T_h$, назовем *квазидеконпозицией* функции $f(t)$, $t \in T_h$.

Таким образом, процедура квазидеконпозиции фундаментальной матрицы $F(t)$, $t \in T_h$, сводящаяся к квазидеконпозиции ее строк, позволяет параллельное интегрирование n систем порядка n заменить на параллельное интегрирование $n \cdot r$ систем порядка m .

4. Оптимальное наблюдение в реальном времени. Пусть $\tau \in T_h$ – текущий момент времени, $y_\tau(\cdot) = (y(t), t \in T_h(\tau))$, $T_h(\tau) = \{t^*, t^* + h_t, \dots, \tau\}$ – совокупность измерений, проведенных к моменту времени τ , $Y(\tau)$ – множество всех возможных сигналов $y_\tau(\cdot)$. Множество $\widehat{W}(\tau) = \widehat{W}(\tau, y_\tau(\cdot))$ будем называть *текущим распределением параметра w* для позиции $(\tau, y_\tau(\cdot))$. Ему соответствует текущее распределение $\widehat{X}_0(\tau) = \widehat{X}_0(\tau, y_\tau(\cdot))$ начального состояния.

Семейство задач $\hat{\alpha}(\tau, y_\tau(\cdot)) = p'w^0(\tau, y_\tau(\cdot)) = \max p'w$, $w \in \widehat{W}(\tau)$, зависящих от выходных сигналов $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau)$ измерительного устройства и моментов $\tau \in T_h$, называется *задачей позиционного наблюдения*.

Функционал

$$w^0(\tau, y_\tau(\cdot)), \quad y_\tau(\cdot) \in Y(\tau), \quad \tau \in T_h, \quad (11)$$

будем называть *решением задачи оптимального позиционного наблюдения* (позиционным решением задачи оптимального наблюдения).

Зная позиционное решение задачи оптимального наблюдения, можно получать информацию о поведении исследуемого объекта по ходу измерений. Для этого достаточно в каждый текущий момент времени $\tau \in T_h$, получив очередное измерение $y(\tau)$, составить вектор $y_\tau(\cdot)$, подставить его в (11) и получить оценку $\hat{\alpha}(\tau, y_\tau(\cdot))$ текущего распределения $\widehat{W}(\tau)$.

Построение позиционного решения (11) в замкнутой форме невозможно для нетривиальных случаев. Поэтому для нахождения позиционного решения задачи оптимального наблюдения используем принцип оптимального наблюдения в реальном времени. При этом функционал (11)

не строится заранее, а необходимые оценки вычисляются в процессе наблюдения по мере поступления измерений.

Пусть проведено наблюдение за системой (1) на промежутке $T_h(\tau)$, построен функционал (11). Введем следующие обозначения: $y_\tau^*(\cdot)$ – записанный сигнал измерительного устройства; $w^*(\tau) = w^*(\tau, y_\tau^*(\cdot))$, $\hat{\alpha}^*(\tau) = \hat{\alpha}^*(\tau, y_\tau^*(\cdot))$ – экстремальное состояние и оценка для текущей позиции $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$. Реализациями позиционного решения задачи оптимального наблюдения назовем функции $w^*(\tau)$, $\hat{\alpha}^*(\tau)$, $\tau \in T_h$.

Опишем метод оптимального наблюдения в реальном времени, в котором при каждом $\tau \in T_h$ функции $w^*(\tau)$, $\hat{\alpha}^*(\tau)$ строятся за время, не превосходящее h_t , т. е. в режиме реального времени. Устройство, выполняющее эту работу, называется *оптимальным эстиматором*.

Оптимальный регулятор работает следующим образом. До начала процесса наблюдения эстиматор строит оценку $\alpha^*(t_* - 0)$ по решению $w^*(t_* - 0)$ задачи $\alpha^*(t_* - 0) = p'w^*(t_* - 0) = \max p'w, w \in W$, сохраняет в памяти ЭВМ оптимальную опору $K_{on}^0(t_* - 0)$ для последующих операций.

Пусть оптимальный эстиматор проработал в моменты $t_*, t_* + h_t, \dots, \tau$, вычислив при этом векторы $w^*(t)$, $x^*(t)$ и оценки $\hat{\alpha}^*(t)$, $t \in T_h(\tau)$ на основе реализовавшихся сигналов $y_\tau^*(\cdot)$. В момент $\tau + h_t$ эстиматору становится известен сигнал $y^*(\tau + h_t)$ измерительного устройства, и он должен быстро подсчитать значения $w^*(\tau + h_t)$, $x^*(\tau + h_t)$, $\hat{\alpha}^*(\tau + h_t)$.

По предположению, в предыдущий момент τ оптимальный эстиматор уже решил задачу

$$\begin{aligned} p'w &\rightarrow \max; \\ \xi_*(t) &\leq d'(t)w \leq \xi^*(t), \quad t \in T_h(\tau), \\ d_* &\leq w \leq d^*. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом он сохранил в памяти ЭВМ оптимальную опору задачи $K_{on}^0(\tau)$ и соответствующую ей информацию 2) – 7).

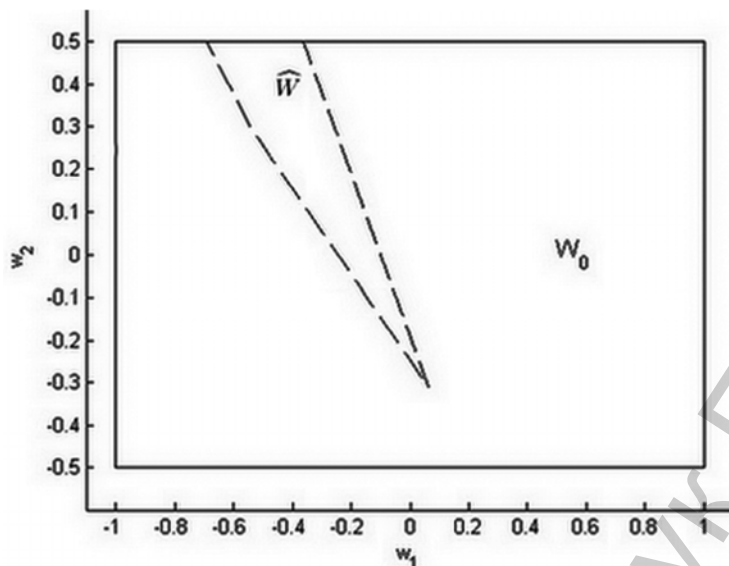
В момент $\tau + h_t$ оптимальный эстиматор должен решить задачу

$$\begin{aligned} p'w &\rightarrow \max; \\ \xi_*(t) &\leq d'(t)w \leq \xi^*(t), \quad t \in T_h(\tau), \\ d_* &\leq w \leq d^*, \\ \xi_*(\tau + h_t) &\leq d'(\tau + h_t)w \leq \xi^*(\tau + h_t), \end{aligned} \quad (13)$$

которая отличается от задачи (12) наличием дополнительного ограничения в момент $\tau + h_t$.

Для решения задачи (13) в качестве начальной опоры $K_{on}(\tau + h_t)$ возьмем оптимальную опору $K_{on}^0(\tau)$ задачи (12). Тогда $v_{on}(\tau + h_t | K_{on}(\tau + h_t)) = v_{on}(\tau | K_{on}^0(\tau))$; $\Delta(\tau + h_t | K_{on}(\tau + h_t)) = \Delta(\tau | K_{on}^0(\tau))$; $\kappa(\tau + h_t | K_{on}(\tau + h_t)) = \kappa(\tau | K_{on}^0(\tau))$; $\zeta(t | K_{on}(\tau + h_t)) = \zeta(t | K_{on}^0(\tau))$, $t \in T_h(\tau)$; $\zeta(\tau + h_t | K_{on}(\tau + h_t)) = h_s \sum_{i=1}^n c(s_i, \tau + h_t) \eta(s_i, \tau + h_t)$, где $\xi_*(t) \leq \zeta(t | K_{on}(\tau + h_t)) \leq \xi^*(t)$, $t \in T_h(\tau)$.

Если выполняются неравенства $\xi_*(\tau + h_t) \leq \zeta(\tau + h_t | K_{on}(\tau + h_t)) \leq \xi^*(\tau + h_t)$, то $K_{on}^0(\tau)$ является оптимальной опорой задачи (13). Информацию 1) – 7), сохраненную для момента τ , пересохраняем для момента $\tau + h_t$. Иначе оптимальную опору $K_{on}^0(\tau + h_t)$ построим, используя двойственный метод, основные элементы которого описаны в п. 2.



Априорное и апостериорное распределения

5. Пример. Рассмотрим пример наблюдения за тепловым процессом в стержне на промежутке $T = [0, 3]$. Математическая модель исследуемой системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_t &= 0,125x_{ss}, \quad (s, t) \in \Omega; \\ x_s(0, t) &= 0, \quad x_s(1, t) = -0,01x(1, t), \quad t \in T; \\ x(s, 0) &= w_1 + w_2s, \quad s \in S; \end{aligned}$$

где $\Omega = S \times T$, $S = [0, 1]$; $T_h = \{0, h_t, 2h_t, \dots, 3 - h_t, 3\}$, $h_t = (3 - 0) / N$, N – натуральное число, w_1, w_2 – неизвестные параметры.

Пусть априорное распределение неизвестных параметров (в данном примере оно совпадает с априорным распределением начального состояния, так как $x_1(s) = 0$) W определяется соотношениями: $|w_1| \leq 1$, $|w_2| \leq 0.5$. Измерительное устройство измеряет температуру на правом конце стержня $x_n(t)$ с ограниченной ошибкой $|\xi(t)| \leq 0,25$, $t \in T_h$, т. е. в дискретные моменты времени $t \in T_h$ выдает сигнал $y(t) = x_n(t) + \xi(t)$.

Предположим, что неизвестное нам (истинное) начальное состояние системы равно

$$x(s, 0) = -0,5 + 0,25s, \quad s \in S;$$

т. е. $w_1 = -0,5$, $w_2 = 0,25$, а реализовавшаяся (но не известная нам) функция ошибки измерительного устройства имеет вид: $\xi(t) = 0,25 \cos(t / 2)$.

На рисунке приведены априорное множество W_0 , граничные точки апостериорного множества $\hat{W}(3)$, построенного по результатам наблюдения на отрезке $[0, 3]$. Граничные точки получены путем нахождения двойственным методом экстремальных состояний по направлениям $p = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\varphi = i\pi / 18$, $i = \overline{0, 36}$.

Получены следующие результаты апостериорного решения двойственным методом для двух противоположных направлений: для вектора $p = (1, 0)$ оценка равна $\hat{\alpha}^* = -0,399244$, экстремальное начальное состояние принимает вид $x^* = -0,399244 + 0,149244s$; для $p = (-1, 0)$ $\hat{\alpha}^* = 0,693658$, $x^* = -0,693658 + 0,5s$.

Заключение. Предложенный метод оптимального наблюдения в реальном времени за тепловым процессом в стержне основан на динамической реализации двойственного метода [4]

и процедуре квазидекомпозиции, что позволяет быстро строить оценки текущего состояния теплового процесса. Полученные результаты могут быть обобщены на другие задачи оптимального наблюдения за системами с распределенными параметрами, а также могут быть использованы при оптимальном управлении системами с распределенными параметрами в условиях неопределенности.

Литература

1. Калман Р. // Тр. 1. Конгресса ИФАК. – М., 1961. С. 521 – 547.
2. Красовский Н. Н. // Прикл. мат. мех. 1964. Т. 28, № 1. С. 3 – 14.
3. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М., 1975.
4. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1984.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Дмитрук Н. М. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2002. № 2. С. 35 – 46.

D. S. KUZMENKOV

OPTIMAL OBSERVATION OF PARABOLIC SYSTEM

Summary

An optimal observation problem of a thermal process in the rod in conditions of uncertainty is considered. The differential equation of parabolic type describing the process is approximated by large-scale differential equations. This problem is solved by a method of quasidecomposition, the algorithm of operation of the optimal estimator forming in real time estimations of a current state of a thermal process is described.

ФІЗІКА

УДК 539.12

А. А. БАБИЧ¹, Н. В. КАРПЕНКО^{1,2}, А. А. ПАНКОВ¹, А. В. ЦИТРИНОВ¹

**ИДЕНТИФИКАЦИЯ НОВЫХ ТЯЖЕЛЫХ Z' -БОЗОНОВ В ПРОЦЕССАХ
 e^+e^- -АННИГИЛЯЦИИ С ПРОДОЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННЫМИ ПУЧКАМИ**

¹Филиал Международного центра теоретической физики им. А. Салама,
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
²Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 19.06.2009)

Введение. Важной частью физических программ экспериментов на ускорительных комплексах следующего поколения Большого адронного коллайдера (LHC) и планируемом Международном линейном электрон-позитронном коллайдере (ILC) является поиск эффектов и сигналов «новой» физики, выходящих за рамки Стандартной модели (СМ). Это обусловлено прежде всего тем, что в рамках СМ, наряду с ее безусловными успехами в описании имеющихся экспериментальных данных, невозможно разрешить целый ряд фундаментальных проблем (см., например, [1]). Поэтому в научном мире широко распространено мнение, что СМ не является окончательной теорией, а рассматривается как низкоэнергетический предел некой более фундаментальной гипотетической теории.

В настоящее время активно развиваются несколько теоретических направлений (суперструны, дополнительные пространственные измерения, техницвет, составные модели и др.), в рамках которых возможно разрешить некоторые проблемы СМ. Здесь следует отметить, что всякая теория может рассматриваться как реальная физическая, только если ее можно экспериментально проверить. С точки зрения эксперимента наиболее привлекательным феноменологическим следствием большинства разрабатываемых моделей является предсказание существования новых нейтральных Z' -бозонов [2]. К сожалению, пока отсутствуют экспериментальные доказательства существования Z' -бозонов [3]. Современные ограничения на массу Z' -бозонов, полученные из экспериментов на коллайдере Tevatron [3], соответствуют масштабу масс $M_{Z'} \geq 1$ ТэВ. В этом случае возможность поиска Z' -бозонов на ILC с энергией 0,5 ТэВ состоит в измерении их косвенных проявлений, в частности, эффектов смешивания и пропагаторных эффектов. Современные ограничения на параметр $Z-Z'$ смешивания составляет $\leq 10^{-3}$, поэтому эти эффекты в работе не учитываются.

Определяющим в поиске эффектов новой физики является выбор процессов и наблюдаемых к ним. Уникальными возможностями для поиска Z' обладает реакция парного рождения фермионов в электрон-позитронной аннигиляции:

$$e^+ + e^- \rightarrow f + \bar{f}, \quad (1)$$

где $f = e, \mu, \tau, c, b$. Основным достоинством именно линейного e^+e^- -коллайдера ILC является высокая точность измерения большого количества наблюдаемых. Количество наблюдаемых увеличивается в немалой степени из-за того, что появляется возможность проведения экспериментов с поляризованными пучками [4, 5]. Таким образом, на ILC можно будет получать очень точную информацию о параметрах Z' -бозонов (константах связи с фермионами

и бозонами и его массе $M_{Z'}$). Следует подчеркнуть, что во многом физические программы по поиску и детальному исследованию свойств новых калибровочных бозонов на адронном коллайдере LHC и e^+e^- -коллайдере ILC взаимно дополняют друг к друга.

Процессу (1), как «инструменту» проверки СМ, а также поиска эффектов нестандартной физики, посвящена обширная литература (см., например, обзоры [2]). В частности, в работе [6] уже обсуждались возможности поиска и установления природы (модели) дополнительных калибровочных бозонов в процессах (1) с помощью интегральных наблюдаемых. При этом рассматривался лишь ограниченный набор моделей Z' -бозонов. В отличие от ранее выполненного анализа [6] в данной работе решается более общая задача по разделению и идентификации эффектов, предсказываемых различными классами моделей с расширенным калибровочным сектором (E_6 , LR, ALR и др.). При этом используемые здесь дифференциальные поляризационные наблюдаемые обеспечивают более высокую (в сравнении с интегральными наблюдаемыми) чувствительность процессов к параметрам (константам связи и массам) Z' -бозонов.

1. Дифференциальные поляризационные наблюдаемые. Дифференциальное сечение для s -канальных поляризационных процессов (1) ($f \neq e, t$) в пределе безмассовых фермионов ($m_f \ll \sqrt{s}$) может быть представлено в виде [7]:

$$\frac{d\sigma(P^-, P^+)}{dz} = \frac{D}{4} \left[(1 - P_{\text{eff}}) \left(\frac{d\sigma_{LL}}{dz} + \frac{d\sigma_{LR}}{dz} \right) + (1 + P_{\text{eff}}) \left(\frac{d\sigma_{RR}}{dz} + \frac{d\sigma_{RL}}{dz} \right) \right], \quad (2)$$

где $z = \cos\theta$, θ есть угол между направлениями движения начального электрона и конечного фермиона f в системе центра масс фермионной пары; индексы L, R обозначают спиральность фермионов. В выражении (2) используются следующие комбинации поляризаций:

$$D = 1 - P^- P^+, \quad P_{\text{eff}} = \frac{P^- - P^+}{1 - P^- P^+}, \quad (3)$$

где P^- и P^+ – степени продольных поляризаций e^- и e^+ соответственно.

Поляризационное дифференциальное сечение процесса рассеяния Баба $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, содержащее вклады от амплитуд с обменом промежуточными бозонами в s - и t -каналах, можно представить в виде [8, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(P^-, P^+)}{dz} = & \frac{(1 + P^-)(1 - P^+)}{4} \frac{d\sigma_R}{dz} + \frac{(1 - P^-)(1 + P^+)}{4} \frac{d\sigma_L}{dz} + \\ & \frac{(1 + P^-)(1 + P^+)}{4} \frac{d\sigma_{RL,t}}{dz} + \frac{(1 - P^-)(1 - P^+)}{4} \frac{d\sigma_{LR,t}}{dz}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\frac{d\sigma_L}{dz} = \frac{d\sigma_{LL}}{dz} + \frac{d\sigma_{LR,s}}{dz}, \quad \frac{d\sigma_R}{dz} = \frac{d\sigma_{RR}}{dz} + \frac{d\sigma_{RL,s}}{dz}. \quad (5)$$

Спиральные сечения

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{LL}}{dz} = \frac{2\pi\alpha_{\text{e.m.}}^2}{s} |G_{LL,s} + G_{LL,t}|^2, \quad \frac{d\sigma_{RR}}{dz} = \frac{2\pi\alpha_{\text{e.m.}}^2}{s} |G_{RR,s} + G_{RR,t}|^2, \\ \frac{d\sigma_{LR,t}}{dz} = \frac{d\sigma_{RL,t}}{dz} = \frac{2\pi\alpha_{\text{e.m.}}^2}{s} |G_{LR,t}|^2, \quad \frac{d\sigma_{LR,s}}{dz} = \frac{d\sigma_{RL,s}}{dz} = \frac{2\pi\alpha_{\text{e.m.}}^2}{s} |G_{LR,s}|^2 \end{aligned} \quad (6)$$

выражаются через спиральные амплитуды $G_{\alpha\beta,i}$ ($\alpha, \beta = L, R$)

$$G_{LL,s} = u \left(\frac{1}{s} + \frac{g_L^2}{s - M_Z^2} + \frac{g_L'^2}{s - M_{Z'}^2} \right), \quad G_{LL,t} = u \left(\frac{1}{t} + \frac{g_L^2}{t - M_Z^2} + \frac{g_L'^2}{t - M_{Z'}^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
G_{RR,s} &= u \left(\frac{1}{s} + \frac{g_R^2}{s - M_Z^2} + \frac{g_R'^2}{s - M_{Z'}^2} \right), & G_{RR,t} &= u \left(\frac{1}{t} + \frac{g_R^2}{t - M_Z^2} + \frac{g_R'^2}{t - M_{Z'}^2} \right), \\
G_{LR,s} &= t \left(\frac{1}{s} + \frac{g_R g_L}{s - M_Z^2} + \frac{g_R' g_L'}{s - M_{Z'}^2} \right), & G_{LR,t} &= s \left(\frac{1}{t} + \frac{g_R g_L}{t - M_Z^2} + \frac{g_R' g_L'}{t - M_{Z'}^2} \right),
\end{aligned} \quad (7)$$

где $u, t = -s(1 \pm z)/2$, $g_R = \theta_W$ и $g_L = -2\theta_W$, θ_W – угол Вайнберга. Спиральные амплитуды (7) записаны в приближении $M_Z \ll \sqrt{s} \ll M_{Z'}$.

Поляризационное дифференциальное сечение (2) для s -канальных лептонных каналов $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$ ($l = \mu, \tau$) получается из формулы (4) удалением из него t -канальных вкладов. А при оценке сечений процессов парного рождения c - и b -кварков в амплитудах (7) необходимо учесть электрические заряды конечных фермионов и их константы связи с Z - и Z' -бозонами, отличные от электронных, а также цветовой фактор $N_C \approx 3(1 + \alpha_s / \pi)$.

Константы связи Z' -бозонов с фермионами определяются выбором соответствующей модели. В том случае, когда калибровочная группа модели отличается от соответствующей группы СМ на дополнительный фактор $U(1)'$, лагранжиан взаимодействия нейтральных токов в базе собственных состояний массовой матрицы можно представить в виде:

$$-L = J_{em}^\mu A_\mu + J_1^\mu Z_{1\mu} + J_2^\mu Z_{2\mu}, \quad (8)$$

где соответствующие константы связи включены в выражения для нейтральных токов. Они имеют следующий вид: $e = \sqrt{4\pi\alpha_{em}}$, $g_1 = e/s_W c_W$, $g_2 = g_1 s_W$ (для E_6 и LR моделей) и $g_2 = g_1 / \sqrt{1 - 2s_W^2}$ (для ALR модели); кроме того здесь $c_W = \cos\theta_W$. Формулы для нейтральных токов выражаются через проекционные операторы $P_{L,R} = (1 \mp \gamma_5)/2$:

$$J_i^\mu = \sum_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \left[g_{iL}^f P_L + g_{iR}^f P_R \right] \psi_f = \sum_f \bar{\psi} \gamma^\mu \left(v_i^f - a_i^f \gamma_5 \right) \psi_f, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Обозначим через Z и Z' собственные состояния операторов полей слабых калибровочных бозонов. Тогда константы связи $Z\bar{f}f$ в СМ имеют вид $g_L^f = (I_{3L}^f - Q^f s_W^2) \cdot g_1$, $g_R^f = -Q^f s_W^2 \cdot g_1$.

Константы связи Z' с фермионами $Z'\bar{f}f$ для E_6 модели приведены в таблице, где $A = \frac{\cos\beta}{2\sqrt{6}}$; $B = \frac{\sqrt{10}}{12} \sin\beta$, а угол β определяет ориентацию генератора $U(1)'$ в E_6 групповом пространстве. В частности, для трех популярных моделей ψ , η и χ значение параметра $\cos\beta$ равно 0, $-\sqrt{3}/8$ и 1 соответственно.

Для лево-правой модели LR нейтральные токи, связанные с Z'_{LR} -бозоном, могут быть записаны как:

$$J_{LR}^\mu = \alpha_{LR} J_{3R}^\mu - \frac{1}{2\alpha_{LR}} J_{B-L}^\mu, \quad (10)$$

где J_{3R}^μ – третья компонента $SU(2)_R$ изоспина, а L и B представляют собой лептонное и барионное квантовые числа. В LR модели левые и правые фермионы являются $SU(2)_R$ -дублетами и синглетами, соответственно. Модельный параметр α_{LR} определяется как

$$\alpha_{LR} = \sqrt{\frac{c_W^2}{s_W^2} \frac{g_R^2}{g_L^2}} - 1, \quad \text{где } g_L = e/s_W, \text{ а } g_R \text{ есть } SU(2)_R \text{ калибровочная константа связи. В общем}$$

случае параметр α_{LR} может изменяться в интервале $1/\sqrt{2} \leq \alpha_{LR} \leq 1,52$ при $s_W^2 = 0,23$, что

на языке констант связи соответствует неравенству $\frac{1}{2}g_L^2 \leq g_R^2 \leq g_L^2$. Чаще всего в литературе LR модель рассматривается в случае равных левых и правых констант связи, ($g_R = g_L$), который реализуется при максимальном значении α_{LR} . Фермионные константы связи $Z'_{LR} \bar{f}f$ приведены в таблице. Заметим, что в частном случае, когда параметр $\alpha_{LR} = \sqrt{2/3} \approx 0,82$, эти константы связи совпадают с соответствующими константами для χ модели ($\cos\beta = 1$) из E_6 .

Альтернативная лево-право-симметричная модель (ALR) представляет собой частный случай лево-право-симметричной модели, возникающей при определенном способе нарушения E_6 симметрии. В этой модели фермионам приписываются необычные квантовые числа, что приводит к специфическим константам связи Z' -бозона.

Кроме моделей, основанных на расширенных калибровочных группах, в анализе будет использоваться также так называемая «последовательная стандартная модель» (PCM), в которой Z' имеет такие же фермионные константы связи, как Z в SM.

Т а б л и ц а. Левые и правые константы связи фермионов первого поколения SM с Z' -бозонами ($g_{Z'} = 1/c_W$ для E_6 и LR моделей, $g_{Z'} = 1/(s_W c_W \sqrt{1-2s_W^2})$ для ALR модели)

E ₆ модель				
фермионы (f)	ν	e	u	d
$g_L^{f'}/g_{Z'}$	$3A+B$	$3A+B$	$-A+B$	$-A+B$
$g_R^{f'}/g_{Z'}$	0	$A-B$	$A-B$	$-3A-B$
LR модель				
$g_L^{f'}/g_{Z'}$	$\frac{1}{2\alpha_{LR}}$	$\frac{1}{2\alpha_{LR}}$	$-\frac{1}{6\alpha_{LR}}$	$-\frac{1}{6\alpha_{LR}}$
$g_R^{f'}/g_{Z'}$	0	$\frac{1}{2\alpha_{LR}} - \frac{\alpha_{LR}}{2}$	$-\frac{1}{6\alpha_{LR}} + \frac{\alpha_{LR}}{2}$	$-\frac{1}{6\alpha_{LR}} - \frac{\alpha_{LR}}{2}$
ALR модель				
$g_L^{f'}/g_{Z'}$	$-\frac{1}{2} + s_W^2$	$-\frac{1}{2} + s_W^2$	$-\frac{1}{6} s_W^2$	$-\frac{1}{6} s_W^2$
$g_R^{f'}/g_{Z'}$	0	$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} s_W^2$	$\frac{1}{2} - \frac{7}{6} s_W^2$	$\frac{1}{3} s_W^2$

2. Обнаружение Z' -бозонов. Для изучения потенциальных возможностей коллайдера ILC по поиску эффектов Z' -бозонов мы используем стандартный χ^2 анализ [10]. Введем относительное отклонение наблюдаемой O от предсказаний SM:

$$\Delta O = \frac{O(SM + Z') - O(SM)}{O(SM)}. \quad (11)$$

В качестве наблюдаемых O в (11) в представленном анализе будут использоваться поляризационные дифференциальные сечения (2) и (4), т. е. $O = d\sigma(P^-, P^+)/dz$. Для получения ограничений на массы Z' -бозонов необходимо сравнить отклонения наблюдаемых, вызванные присутствием Z' -бозонов, с экспериментальными погрешностями для дифференциальных сечений. Для этой цели строим χ^2 в виде:

$$\chi^2(O) = \sum_f \sum_{\{P^-, P^+\}} \sum_{\text{bins}} \left(\frac{\Delta O^{\text{bin}}}{\delta O^{\text{bin}}} \right)^2, \quad (12)$$

где через δO мы обозначили экспериментальную относительную погрешность, состоящую из статистической и систематической ошибок, взятых в квадратурах, и определяемую в рамках SM. В правой части выражения (12) суммирование берется по всем конечным фермионным

состояниям f , возможным комбинациям начальных поляризаций $\{P^-, P^+\}$, а также угловым бинам, на которые разбита вся кинематическая область, определяемая областью изменения $\cos\theta$. В частности, для рассеяния Баба угловой интервал определяется величиной $|\cos\theta| < 0,9$ и делится на девять эквидистантных бинов с шириной $\Delta z = 0,2$. При этом выбираются все 4 комбинации знаков поляризации $(P^-, P^+) = (|P^-|, -|P^+|)$; $(-|P^-|, |P^+|)$; $(|P^-|, |P^+|)$; $(-|P^-|, -|P^+|)$. Для s -канальных процессов используется более широкий интервал $|\cos\theta| < 0,98$, а количество бинов здесь на один больше. В то же время количество поляризационных конфигураций здесь меньше, а именно: $(P^-, P^+) = (|P^-|, -|P^+|)$ и $(-|P^-|, |P^+|)$. В количественном анализе при оценке ограничений на массу Z' -бозона взяты следующие значения для степеней поляризации начальных пучков: $|P^-| = 0,8$ и $|P^+| = 0,5$. Эффективности регистрации конечных фермионных состояний ε взяты на уровне: $\varepsilon = 95\%$ для лептонов l^+l^- ($l = e, \mu, \tau$); $\varepsilon = 60\%$ для $\bar{b}b$ кварковых пар; $\varepsilon = 35\%$ для $\bar{c}c$ -кварков. При оценке статистической погрешности δO^{stat} величина интегральной светимости L_{int} принимается равной 100 фбн^{-1} . Что касается систематической погрешности δO^{syst} , то мы предполагаем, что она возникает за счет имеющихся неопределенностей в измерении интегральной светимости $\delta L_{\text{int}} / L_{\text{int}} = 0,5\%$, эффективности регистрации конечной $\bar{f}f$ пары $\delta\varepsilon / \varepsilon = 0,5\%$, и наконец, степени продольной электронной и позитронной поляризаций $\delta P^- / P^- = \delta P^+ / P^+ = 0,2\%$ соответственно.

Учет радиационных поправок для s -канальных процессов выполнен на основе программы ZEFIT, которая использовалась одновременно с программой ZFITTER [11] при $m_{\text{top}} = 175 \text{ ГэВ}$ и $m_{\text{H}} = 120 \text{ ГэВ}$. Кроме того, для усиления сигнала от Z' -бозонов необходимо исключить события с излучением жестких фотонов путем наложения ограничений на энергию фотонов $\Delta = E_\gamma / E_{\text{beam}} = 0,9$, численное значение которой соответствует энергии линейного коллайдера с $\sqrt{s} = 0,5 \text{ ТэВ}$. Учет радиационных поправок для процесса рассеяния Баба осуществляется на основе формализма квантовоэлектродинамических структурных функций [12].

Условие

$$\chi^2 \leq \chi_{\text{CL}}^2 \quad (13)$$

позволяет определить нижнюю границу для массы Z' -бозонов, выше которой эффекты Z' -бозонов статистически неразличимы от предсказаний СМ. При этом выбираем $\chi_{\text{CL}}^2 = 3,84$, что соответствует 95%-ому уровню достоверности при одном свободном параметре.

Ограничения на массу $M_{Z'}$, полученные из неравенства (13) с использованием дифференциальных распределений конечных фермионов в процессе (1) для поляризованных и неполяризованных e^+e^- -пучков, представлены в виде гистограмм на рис. 1 для шести типичных моделей Z'_{SSM} , Z'_{ψ} , Z'_{η} , Z'_{χ} , Z'_{LR} и Z'_{ALR} . В дальнейшем эти ограничения на $M_{Z'}$ будем называть «порогом обнаружения Z' -бозонов». Из рис. 1 видно, что при использовании поляризационных наблюдаемых возникает возможность увеличить чувствительность процесса (1) и соответствующий порог обнаружения Z' по сравнению с неполяризованным случаем. Соответствующее увеличение порога обнаружения на массу Z' -бозонов $M_{Z'}$ составит 20–25%. Кроме того, для сравнения приведены ограничения на массы $M_{Z'}$, полученные из процесса прямого резонансного рождения Z' -бозона и его последующего распада в лептонную пару [13]. Из сравнения потенциальных возможностей коллайдеров ЛНС и ИЛС по поиску нового нейтрального промежуточного бозона можно заключить, что лептонный коллайдер ИЛС дает лучшие ограничения на массу Z' для моделей Z'_{SSM} , Z'_{ALR} , Z'_{χ} , Z'_{LR} , в то время как адронный коллайдер ЛНС наиболее чувствителен к Z'_{ψ} - и Z'_{η} -бозонам. Таким образом, коллайдеры ЛНС и ИЛС дают взаимодополняющую информацию о Z' -бозонах.

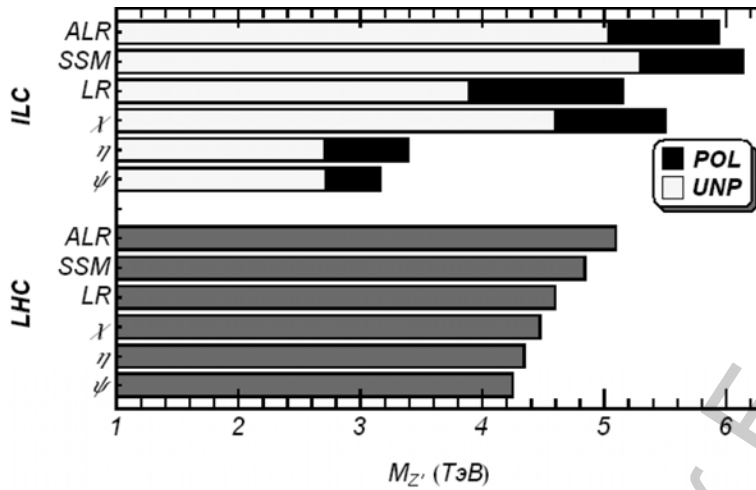


Рис. 1. Порог обнаружения Z' -бозонов для различных моделей (уровень достоверности 95%), полученный из совместного анализа процессов (1) для поляризованных и неполяризованных e^+e^- -пучков на Международном линейном коллайдере ILC, а также из процесса Дрелла–Яна $pp \rightarrow l^+l^- + X$ (уровень достоверности 5σ) на Большом адронном коллайдере LHC

4. Идентификация Z' -бозонов. Вполне вероятно, что тяжелые промежуточные Z' -бозоны могут стать первым проявлением эффектов «новой» физики на LHC в процессе Дрелла–Яна. В этом разделе мы будем предполагать, что Z' -бозон уже обнаружен в протон-протонных столкновениях на LHC в виде пика или «плеча» в распределении по инвариантным массам лептонных пар в процессе Дрелла–Яна. Мы хотели бы установить природу найденного Z' на e^+e^- ILC. Иными словами, мы будем следовать гипотезе, согласно которой Z' -бозон уже обнаружен, и тем самым SM исключена на определенном уровне достоверности. Кроме того, предполагается, что полученные экспериментальные данные согласуются с какой-либо моделью Z' , т. е. данная модель дает наилучший фит. Целью настоящего анализа является оценка интервала масс Z' -бозона, для которых данная модель Z' (называемая далее как «правильная» модель) может быть отделена статистически от других конкурирующих моделей (которые мы назовем «тестируемыми» моделями), при любых разрешенных значениях масс Z' -бозонов, принадлежащих тестируемым моделям. Таким образом, мы определим область масс, где «правильная» модель может быть идентифицирована на заданном уровне достоверности, а граничные значения этой области назовем «порогом идентификации». Для демонстрации процедуры определения порога идентификации на $M_{Z'}$ рассмотрим конкретный пример, в котором «правильной» моделью является E_6 модель для некоторых фиксированных значений $\cos\beta$ и $M_{Z'}$. Для определенности в качестве тестовой модели выберем LR модель. По аналогии с (11) определим относительное отклонение наблюдаемой O от предсказаний E_6 модели:

$$\Delta O = \frac{O(\text{LR}) - O(E_6)}{O(E_6)}. \quad (14)$$

Функция χ^2 имеет такой же вид, что и (12), лишь экспериментальная погрешность в этом случае определяется в рамках модели E_6 . Неравенство, которое определяет «область неразличимости» (confusion region) моделей E_6 и LR, по форме совпадает с формулой (13).

На рис. 2 изображена «область неразличимости» E_6 и LR моделей (уровень достоверности 95%) на плоскости модельных параметров α_{LR} и $\cos\beta$ для $M_{Z'} = 1, 2, 3$ и 4 ТэВ, полученная из совместного анализа поляризационных лептонных процессов ($f = \mu, \tau$) в предположении, что экспериментальные данные согласуются с E_6 моделью для некоторого значения $\cos\beta$.

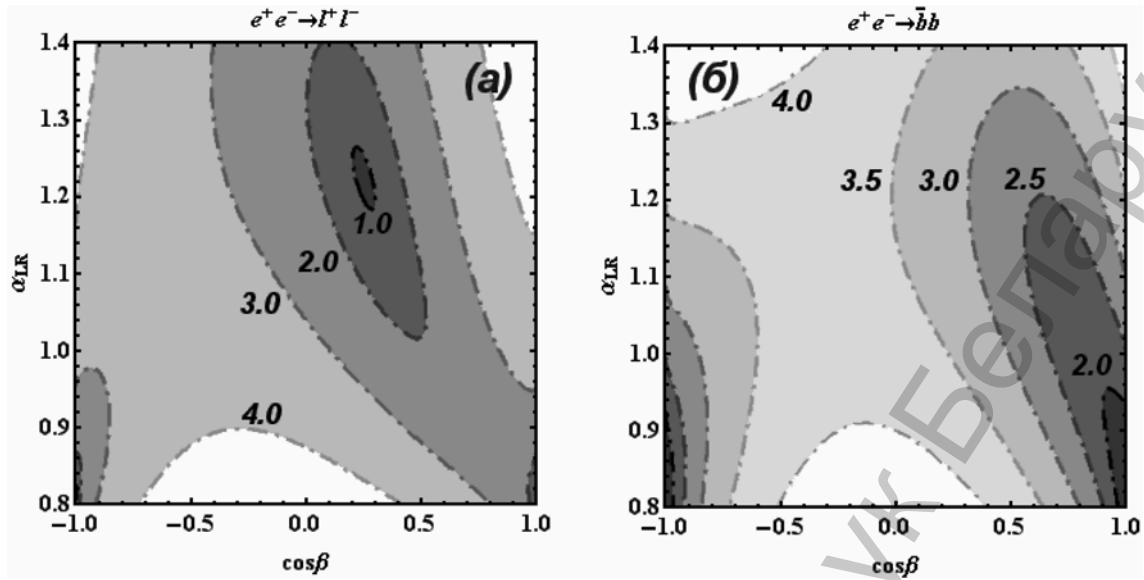


Рис. 2. Области неразличимости для E_6 и LR моделей на плоскости модельных параметров $(\cos\beta, \alpha_{LR})$, полученные из поляризационного процесса $e^+e^- \rightarrow l^+l^-$ ($l = \mu, \tau$) при $\sqrt{s} = 0,5$ ТэВ, $L_{int} = 100$ фб $^{-1}$, $|P^-| = 0,8$, $|P^+| = 0,5$ и $M_{Z'} = 1; 2; 3$ и 4 ТэВ (а) и процесса $e^+e^- \rightarrow \bar{b}b$ при $M_{Z'} = 2,0; 2,5; 3,0; 3,5$ и $4,0$ ТэВ (б)

Тонированные области указывают на те пространства модельных параметров, для которых модель E_6 не может быть статистически отделена от модели LR. Разные оттенки областей соответствуют разным массам Z' -бозонов. Белым цветом изображены области модельных параметров, для которых эффекты от Z' -бозонов в LR модели могут быть надежно отделены от таких же эффектов, предсказываемых моделью E_6 , исходя из критерия (13).

Из рис. 2, а видно, что в лептонных каналах существуют три области неразличимости моделей, которые не исчезают ни при каких значениях масс Z' -бозонов, $M_{Z'} \geq \sqrt{s}$. Все они соответствуют случаям, при которых правые и левые лептонные константы связи Z' -бозонов численно совпадают в обеих моделях с точностью до знака. Эти решения реализуются при $(\cos\beta, \alpha_{LR}) = (\pm 1, \sqrt{2/3})$ и $(1/4, \sqrt{3/2})$. Одна из областей расположена в правом нижнем углу рис. 2, а и соответствует χ модели в классе моделей E_6 и LR, как это отмечалось ранее. При уменьшении $M_{Z'}$ размеры областей неразличимости моделей становятся также все меньше и практически исчезают при $M_{Z'} \sim 1$ ТэВ и $\cos\beta = \pm 1$. Однако область неразличимости в центральной части рисунка сохраняется при любых $M_{Z'} \geq \sqrt{s}$. Это значит, что с помощью только лептонных каналов осуществить полное разделение эффектов, индуцируемых Z' -бозонами из классов моделей E_6 и LR (и тем самым идентифицировать какую-либо Z' -модель из класса E_6) не представляется возможным.

Вместе с тем, как показано на рис. 2, б, в процессе парного рождения b -кварков количество областей неразличимости моделей уменьшается на одну. Этот факт свидетельствует о том, что совместный фит наблюдаемых для разных конечных фермионных состояний позволит существенно редуцировать размер областей неразличимости моделей. Поэтому в представленном ниже полном количественном анализе выполняется совместный фит одновременно всех лептонных и кварковых процессов, содержащихся в χ^2 -функции (12), для ΔO , определяемого выражением (14).

По сути, исчезновение области неразличимости E_6 и LR моделей для каких-то $M_{Z'}$ и для всех возможных значений модельного параметра α_{LR} означает, что данная E_6 модель может быть статистически отделена от всего класса LR моделей и, тем самым, идентифицирована. Более того, полное отсутствие области неразличимости E_6 и LR моделей для каких-то $M_{Z'}$

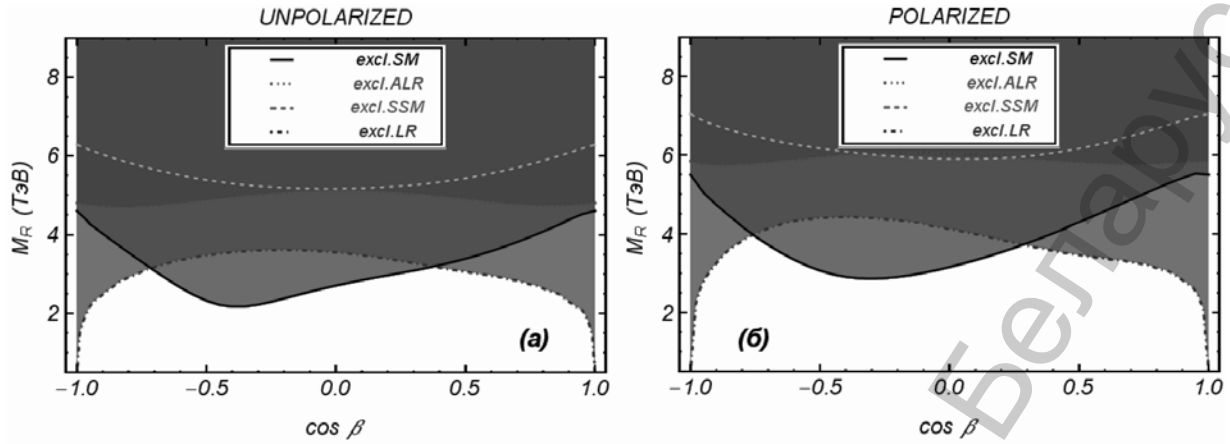


Рис. 3. Области масс Z'_{E_6} -бозонов, для которых гипотезы с конкурирующими моделями SSM, LR, ALR, SM статистически исключаются с уровнем достоверности 95% из неполяризованных (а) и поляризованных (б) экспериментов. Область идентификации E_6 модели показана белым цветом.

и для всех возможных значений обоих модельных параметров, $\cos\beta$ и α_{LR} , означает *идентификацию всего класса моделей E_6* .

На рис. 3 изображены области масс Z' -бозонов для E_6 модели, для которых гипотезы о конкурирующих моделях Z'_{SSM} , Z'_{LR} и Z'_{ALR} могут быть статистически исключены. Верхние границы этих областей обозначены через $M_{Z'}^{excl}(LR)$, $M_{Z'}^{excl}(ALR)$ и $M_{Z'}^{excl}(SSM)$. Отметим, что в случае LR исключается целый класс моделей, определяемый всей областью изменения параметра α_{LR} . Кроме того, необходимо исключить также гипотезу со SM. Последнее условие обеспечивает требуемой статистической значимостью гипотезу об обнаружении эффектов Z'_{E_6} -бозонов. Порог идентификации какой-то произвольно выбранной модели из класса E_6 (для фиксированного $\cos\beta$) определяется из критерия $M_{Z'}^{ID} = \min\{M_{Z'}^{excl}(LR), M_{Z'}^{excl}(ALR), M_{Z'}^{excl}(SSM), M_{Z'}^{excl}(SM)\}$. Из рис. 3 видно, что идентификация Z' моделей из класса E_6 определяется исключением SM и LR модели. Как и ожидалось, в окрестности $\cos\beta \approx \pm 1$ идентифицировать E_6 не представляется возможным, так как χ модель присутствует в обоих классах моделей E_6 и LR. Таким образом, для моделей Z' -бозонов, с параметрами $-0,7 < \cos\beta < 0,3$, принадлежащих классу E_6 , порог обнаружения является порогом их идентификации.

Заключение. В данной работе предложен подход по разделению сигналов, индуцируемых новыми нейтральными калибровочными бозонами, предсказываемыми различными классами теорий с расширенным калибровочным сектором, в процессах аннигиляционного рождения лептонных и кварковых пар. Данный подход базируется на использовании дифференциальных поляризованных наблюдаемых, обеспечивающих более высокую (в сравнении с интегральными наблюдаемыми) чувствительность процессов к параметрам Z' -бозонов. Показано, что поляризованные эксперименты на линейном электрон-позитронном коллайдере ILC с энергией 0,5 ТэВ позволят однозначно идентифицировать модели, предсказывающие существование Z' -бозонов с массами $M_{Z'} < 2-4$ ТэВ, а также значительно улучшить соответствующие оценки, ожидаемые из неполяризованных экспериментов. В работах [14–16] обсуждалась возможность идентификации моделей Z' -бозонов на LHC с помощью асимметрии вперед-назад. Показано, что не все модели Z' могут быть идентифицированы, например, модели χ и ALR. Порог идентификации остальных моделей лежит в интервале 1,0–1,5 ТэВ, что заметно ниже соответствующего предельного значения, полученного в работе для коллайдера ILC.

Литература

1. Емельянов В. М. Стандартная модель и ее расширения. М., 2007. С. 16–320.
2. Hewett J. L. and Rizzo T. G. // Phys. Rept. 1989. Vol. 183. P. 193; Leike A. // Phys. Rept. 1999. Vol. 317. P. 143.
3. Aaltonen T. et al. [CDF Collaboration] // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99. P. 171802; Hooper R. J. [D0 Collaboration] // Int. J. Mod. Phys. A. 2005. Vol. 20. P. 3277.
4. Brau J. (ED.) et al. [ILC Collaboration], «ILC Reference Design Report – Executive Summary», arXiv:0712.1950 [physics. acc-ph].
5. Moortgat-Pick G. A. et al. // Phys. Rept. 2008. Vol. 460. P. 131.
6. Babich A. A., Karpenko N. V., Pankov A. A., Tsytrinov A. V. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2009. Vol. 12, N 1. P. 30–38.
7. Pankov A. A. and Paver N. // Phys. Rev. D. 2005. Vol. 72. P. 035012.
8. Pankov A. A. and Paver N. // Eur. Phys. J. C. 2003. Vol. 29. P. 313.
9. Pankov A. A., Paver N. and Tsytrinov A. V. // Phys. Rev. D. 2006. Vol. 73. P. 115005.
10. Amsler C. et al. // Phys. Lett. B. 2008. Vol. 667. Is. 1–5. P. 1–1340.
11. Bardin D. Y., Christova P., Jack M., Kalinovskaya L., Olchevski A., Riemann S. and Riemann T. // Comput. Phys. Commun. 2001. Vol. 133. P. 229.
12. Nicrosini O., Trentadue L. // Radiative Corrections for e^+e^- Collisions / Ed. J. H. Kühn. Berlin, 1989. P. 25; QED Structure Functions, Ann Arbor, MI, 1989, ed. G. Bonvicini // AIP Conf. Proc. N 201. New York, 1990. P. 12.
13. Osland P., Pankov A. A., Paver N. and Tsytrinov A. V. // Phys. Rev. D. 2008. Vol. 78. P. 035008.
14. Dittmar M., Nicollerat A. S., Djouadi A. // Phys. Lett. B. 2004. Vol. 583. P. 111–120.
15. Cousins R., Mumford J., Valuev V. CMS-NOTE-2005-022.
16. Petriello F. and Quackenbush S. // Phys. Rev. D. 2008. Vol. 77. P. 115004.

A. A. BABICH, N. V. KARPENKO, A. A. PANKOV, A. V. TSYTRINOV

IDENTIFYING NEW HEAVY Z' BOSONS IN e^+e^- ANNIHILATION PROCESSES WITH LONGITUDINAL POLARIZED BEAMS

Summary

The method to distinguish the signals induced by new gauge neutral Z' bosons within different classes of theories with an extended gauge sector in the annihilation processes of fermion pair production is developed. This method is based on the polarized differential observables which yield higher sensitivity to Z' parameters with respect to the integrated ones. Polarized experiments performed at the International Linear Collider with an energy of 0,5 TeV will allow one to identify unambiguously the E_6 models (besides χ -model) predicted Z' bosons with masses $M_{Z'} < 2 - 4$ TeV, and substantially improve the expected bound obtained from unpolarized experiments.

УДК 530.12

А. Н. ТАРАСЕНКО, А. К. ГОРБАЦЕВИЧ

**МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ РАСЧЕТА ГРАВИТАЦИОННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
 ОТ РАДИАЛЬНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ИСТОЧНИКА В МЕТРИКЕ ШВАРЦШИЛЬДА**

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 26.06.2009)

Введение. Поиск гравитационных волн остается актуальной задачей, не решенной до настоящего времени. Для ее успешного решения нужно знать такие характеристики гравитационного излучения, как частота, интенсивность, поляризация и др. К наиболее перспективным источникам в смысле регистрации гравитационного излучения относятся двойные компактные объекты (нейтронная звезда – нейтронная звезда, нейтронная звезда – черная дыра, черная дыра – черная дыра). Заметим, что излучение частиц, движущихся во внешнем гравитационном поле, успешно моделировалось уже в 1970-е годы [1], однако непосредственный перенос использовавшихся при этом методов на двойные системы не реализуем по следующим причинам: во-первых, тензор энергии-импульса двойной системы достаточно сложно разложить по сферическим гармоникам; во-вторых, это потребовало бы численного решения большого числа дифференциальных уравнений в частных производных, что вряд ли возможно без использования суперкомпьютеров.

В данной работе предлагается метод расчета гравитационного излучения движущегося в пространстве Шварцшильда компактного источника, основанный на использовании функции Грина, свободный от указанных выше трудностей. Для его проверки рассчитано гравитационное излучение точечной частицы, падающей радиально в черную дыру. Показано, что результаты расчета находятся в хорошем соответствии с известными результатами, полученными другими методами.

1. Возмущения гравитационного поля. Для описания гравитационных волн в пространстве Шварцшильда с метрикой

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r_g / r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1)$$

рассмотрим малое возмущение h_{ik} фоновой метрики $g_{ik}^{(0)}$ (1):

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}. \quad (2)$$

Из уравнений Эйнштейна следуют уравнения для h_{ik} :

$$\frac{1}{2} \left(h_{i;k;l}^l + h_{k;i;l}^l - h_{ik;l}^{;l} - h_{;i;k} - g_{ik}^{(0)} (h^{lm}_{;l;m} - h_{;l}^l) \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \quad (3)$$

Для решения этих уравнений используется мультиполярное разложение [2]. Поле h_{ik} раскладывается на сумму мультиполей, каждое из которых характеризуется определенной четностью и двумя числами l, m . Компоненты h_{ik} для каждого мультиполя можно выразить через одну функцию Ψ , удовлетворяющую волновому уравнению с потенциалом. В частности, для четных возмущений это уравнение имеет следующий вид:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + V^{(e)}(r_*) \right) \Psi^{(e)} = S^{(e)}, \quad (4)$$

где $r_* = r + r_g \ln(r/r_g - 1)$ – так называемая «черепашья координата» [3], индекс (e) указывает на величину, относящуюся к четным возмущениям, $V^{(e)}$ – потенциал Зерилли:

$$V^{(e)} = \frac{(r - r_g) \left(r^3 \Lambda (\Lambda - 2)^2 + 3r_g r^2 (\Lambda - 2)^2 + 9r_g^2 r (\Lambda - 2) + 9r_g^3 \right)}{r^4 ((\Lambda - 2)r + 3r_g)^2}, \quad (5)$$

$\Lambda = l(l + 1)$, а источник $S^{(e)}$ задается следующим выражением:

$$S^{(e)} = \frac{8\pi G}{c^4 \Lambda r^2 ((\Lambda - 2)r + 3r_g)} \left(2r^4 (r - r_g) \left(T'_{00} - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^2 T'_{11} \right) + \right. \\ \left. r(r - r_g)^2 ((\Lambda - 4)r + r_g) T_{11} - \frac{r^3 \left(r^2 (\Lambda^2 - 6\Lambda + 8) + 2r_g r (4\Lambda - 17) + 27r_g^2 \right)}{(\Lambda - 2)r + 3r_g} T_{00} + \right. \\ \left. 4r(r - r_g)^2 \Lambda T_1 - (r - r_g) ((\Lambda - 2)r + 3r_g) \Lambda T_2 + 4r^2 (r - r_g)^2 T_3 \right). \quad (6)$$

Здесь штрих означает производную по r . Уравнение (4) называется уравнением Зерилли.

Величину $S^{(e)}$ представим в следующем виде:

$$S^{(e)} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(A^{AB} T_{AB}^{lm} + B^{AB} (T_{AB}^{lm})' + 2A^A T_A^{lm} + A^2 T_2^{lm} + A^3 T_3^{lm} \right), \quad (7)$$

где $A, B = 0, 1$, а коэффициенты A^{AB} , B^{AB} , A^A , A^2 , A^3 очевидным образом определяются из соотношения (6).

Величины T_{AB}^{lm} , T_A^{lm} , T_2^{lm} , T_3^{lm} строятся из тензора энергии-импульса источника поля. В частности,

$$T_{AB}^{lm} = \int Y_{lm}^* T_{AB} d\Omega, \quad (8)$$

где Y_{lm} – сферические гармоники, а $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ – элемент площади на единичной сфере.

В обычном подходе для нахождения поля гравитационной волны нужно решить уравнение Зерилли с конкретным источником. Полученное решение позволяет найти все интересующие характеристики гравитационного излучения. В частности, поле волны на бесконечности, которое удобно записывать в так называемой радиационной калибровке, в которой единственными ненулевыми компонентами h_{ik} будут

$$h_{22} = -h_{33} = h_+, \quad h_{23} = h_\times, \quad (9)$$

где система координат выбирается декартовой, а ось x^1 направлена вдоль распространения сферической волны.

Амплитуды гравитационных волн обеих поляризаций (h_+, h_\times) выражаются через функции $\Psi^{(e)}$, $\Psi^{(o)}$ следующим образом [2]:

$$h_+ - ih_\times = \frac{1}{r} \sum_{l,m} \sqrt{\Lambda(\Lambda - 2)} {}_{-2}Y_{lm} \left(\Psi^{(e)} + i\Psi^{(o)} \right). \quad (10)$$

Здесь ${}_{-2}Y_{lm}$ – сферические гармоники со спиновым весом -2 [2, 4].

Амплитуда $h_+ - ih_\times$ определяет все интересующие характеристики гравитационного излучения, в том числе мощность излучения и ее распределение по направлениям. Эти величины

выражаются через псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля τ^{ik} [5]. В частности, энергия, излученная в единицу времени в единичный телесный угол (величина, аналогичная силе света в оптике), определяется следующим выражением:

$$\frac{dE}{cdtd\Omega} = r^2 \tau^{01} = \frac{c^4 r^2}{16\pi G} \left| \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (h_+ - ih_\times) \right|^2. \quad (11)$$

2. Функция Грина. Под функцией Грина $G^{ik}(x, x')$ будем понимать поле $h_+ - ih_\times$, созданное источником в виде дельта-функции:

$$T_{ik}(x) = \frac{c^4}{8\pi G} \delta_i^{(p} \delta_k^{q)} \frac{\delta(x - x')}{\sqrt{-g^{(0)}}}. \quad (12)$$

Здесь индексы p, q относятся к точке x' , а не x , поэтому такое равенство возможно. Для нахождения функции Грина необходимо решить уравнение, описывающее данный тип возмущений с источником (12), а затем с помощью (10) найти соответствующую компоненту функции Грина.

В частности, для нахождения компонент G^{AB} нужно решить уравнение Зерилли. Для этого введем двумерную функцию Грина $G^{(e)}(x^A, x'^A)$ уравнения Зерилли:

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + V^{(e)}(r_*) \right) G^{(e)}(x^A, x'^A) = -\delta(ct - ct') \delta(r_* - r_*'). \quad (13)$$

Для нахождения функции Грина нужно указать граничные условия, которым она удовлетворяет. В данном случае ими будут условия излучения: $G^{(e)}(x^A, x'^A)$ должна иметь вид расходящейся волны при $r_* \rightarrow +\infty$, и сходящейся волны при $r_* \rightarrow -\infty$. Запишем двумерную функцию Грина в виде интеграла Фурье:

$$G^{(e)}(x^A, x'^A) = \int G_\omega^{(e)}(r_*, r_*') e^{-i\omega c(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (14)$$

Одномерная функция Грина $G_\omega^{(e)}(r_*, r_*')$ может быть выражена через пару решений u, v однородного уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \omega^2 - V^{(e)}(r_*) \right) u = 0 \quad (15)$$

следующим образом:

$$G_\omega^{(e)}(r_*, r_*') = \frac{1}{W} \begin{cases} u(r_*)v(r_*'), & r_* < r_*' \\ u(r_*')v(r_*), & r_* > r_*' \end{cases}. \quad (16)$$

Здесь $W = W(u, v) = u(r_*)v'(r_*) - v(r_*)u'(r_*)$ – вронскиан решений u, v .

Чтобы удовлетворить поставленным граничным условиям, решения u и v нужно выбрать в виде соответственно in- и ur-мод [1]. Последние определяются как решения уравнения (15), удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} u^{(e)in} &\approx e^{-i\omega r_*}, & r_* &\rightarrow -\infty, \\ u^{(e)ur} &\approx e^{i\omega r_*}, & r_* &\rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (17)$$

Вронскиан этих решений выражается через амплитуду прохождения $T^{(e)}$:

$$W(u^{(e)in}, u^{(e)ur}) = \frac{2i\omega}{T^{(e)}}. \quad (18)$$

Зная двумерную функцию Грина, можно решить уравнение Зерилли с источником (6), строящимся из тензора энергии-импульса (12). В результате найдем G^{AB} :

$$G^{AB} = -\frac{1}{rr'(r'-r_g)} \sum_{l,m} \sqrt{\Lambda(\Lambda-2)} Y_{lm}^* Y_{lm} \times \left(\left(A^{AB} - \left(1 - \frac{r_g}{r'}\right) \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{B^{AB}}{1 - r_g/r'} \right) \right) G^{(e)}(x^A, x'^A) - \frac{B^{AB}}{1 - r_g/r'} \frac{\partial G^{(e)}(x^A, x'^A)}{\partial r_*} \right). \quad (19)$$

Аналогичное выражение можно получить и для остальных компонент функции Грина, однако в задаче об излучении при радиальном движении они нам не понадобятся.

3. Излучение при радиальном движении. Рассмотрим свободную частицу, радиально падающую в шварцшильдовскую черную дыру вдоль оси z ($\theta=0$). Уравнения движения частицы следуют из уравнения геодезической:

$$u^0 = \frac{cdt'}{ds} = \frac{\tilde{E}}{1 - r_g/r'}, \quad u^1 = \frac{dr'}{ds} = -\sqrt{\tilde{E}^2 - 1 + \frac{r_g}{r'}}, \quad u^2 = u^3 = 0. \quad (20)$$

Здесь s – интервал, отсчитываемый вдоль мировой линии частицы от некоторой точки, $\tilde{E} = \text{const}$ – интеграл движения, соответствующий энергии частицы и в случае ее инфинитного движения равный $(1 - v_\infty^2/c^2)^{-1/2}$, где v_∞ – скорость частицы на бесконечности, $u^i = dx'^i/ds$ – 4-скорость частицы, чьи ковариантные компоненты

$$u_i = \left(\tilde{E}, \frac{1}{1 - r_g/r'} \sqrt{\tilde{E}^2 - 1 + \frac{r_g}{r'}}, 0, 0 \right). \quad (21)$$

Для нахождения излучения запишем поле произвольного источника в виде интеграла от функции Грина (12):

$$h_+(x) - ih_\times(x) = \frac{8\pi G}{c^4} \int G^{ik}(x, x') T_{ik}(x') \sqrt{-g^{(0)}} d^4 x'. \quad (22)$$

Подставляя сюда тензор энергии-импульса точечной частицы массы m_0

$$T_{ik} = m_0 c^2 \int \frac{\delta(x - \xi(s))}{\sqrt{-g^{(0)}}} u_i u_k ds, \quad (23)$$

а также соотношение (21) для 4-скорости, получим:

$$h_+ - ih_\times = \frac{8\pi G}{c^2} \int \left(\tilde{E}^2 G^{00} + \frac{1}{(1 - r_g/r')^2} \left(\tilde{E}^2 - 1 + \frac{r_g}{r'} \right) G^{11} \right) \frac{1 - r_g/r'}{\tilde{E}} c dt'. \quad (24)$$

Здесь переменная интегрирования была заменена на t' с учетом явного выражения для u^0 (20).

Дальнейшие вычисления существенно упрощаются, если учесть, что, во-первых, источник (23) является четным, поэтому нечетного излучения не будет; во-вторых, из его аксиальной симметрии следует, что излучение будет сосредоточено на мультиполях с $m=0$. Поэтому в ряде (19) нужно оставить только члены с $m=0$.

Введем амплитуду $a_{\omega l}$, которую определим следующим образом:

$$h_+ - ih_\times = \frac{4\sqrt{2}\pi G m_0}{c^2 r} \sum_l {}_{-2}Y_{l0} \int \frac{1}{\omega} a_{\omega l} e^{i\omega(r-ct)} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (25)$$

Тогда для $a_{\omega l}$ можно получить следующее выражение:

$$a_{\omega l} = -\frac{i}{\tilde{E}} \sqrt{\frac{2l+1}{2\pi}} \sqrt{\frac{\Lambda-2}{\Lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r'-r_g}{r'((\Lambda-2)r'+3r_g)} \left(r' T^{(e)} u^{(e)in'} + \frac{r'^2 \Lambda (\Lambda-2) + 4r_g r' (\Lambda-3\tilde{E}^2 + 1) - 3r_g^2}{2r'((\Lambda-2)r'+3r_g)} T^{(e)} u^{(e)in} \right) e^{i\omega c t'} c dt'. \quad (26)$$

Через величины $a_{\omega l}$ выражается спектральная плотность энергии, излученной в единичный телесный угол, а также полной излученной энергии:

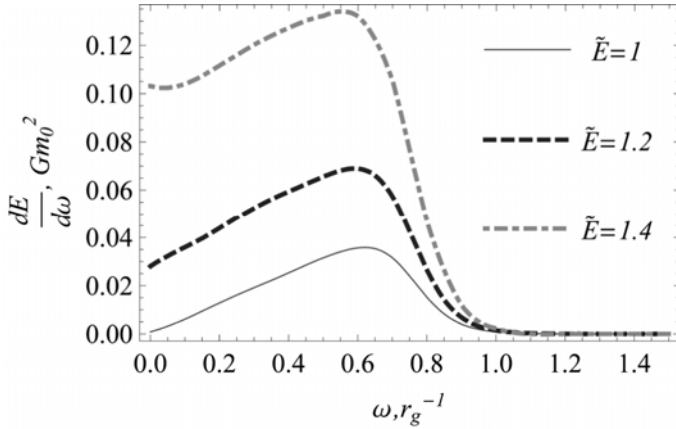


Рис. 1. Спектр квадрупольного излучения для $\tilde{E} = 1, 1.2, 1.4$

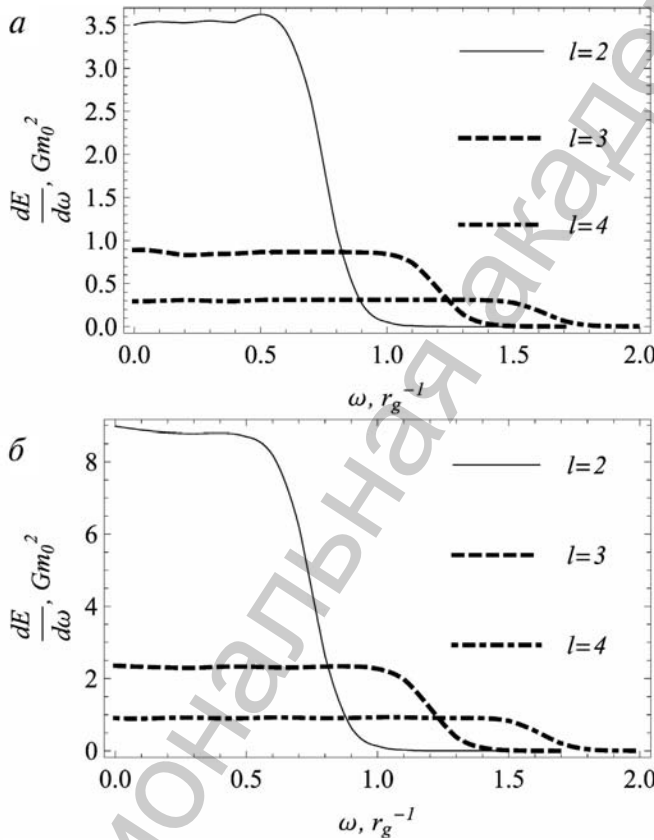


Рис. 2. Спектр излучения для $\tilde{E} = 4$ (а) и $\tilde{E} = 6$ (б) при $l = 2, 3, 4$

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} = 2Gm_0^2 \left| \sum_l -2Y_{l0} a_{\omega l} \right|^2, \quad (27)$$

$$\frac{dE}{d\omega} = 2Gm_0^2 \sum_l |a_{\omega l}|^2.$$

Сделаем несколько замечаний по поводу вычисления интеграла (26). Дело в том, что он расходится на нижнем пределе вследствие того, что квадрупольный момент частицы неограниченно растет при $t \rightarrow -\infty$. Для нахождения интеграла нужно выделить его конечную часть, связанную с излучением, и отбросить осциллирующий вклад. Для малых значений энергии частицы ($\tilde{E} \sim 1$) и для относительно больших ее значений ($\tilde{E} \gtrsim 2$) мы использовали разные методы регуляризации. Первый заключается во введении в подынтегральное выражение множителя $e^{-\alpha^2 (t'-t_1)^2}$, где t_1 – характерное время падения частицы на черную дыру, а α – достаточно малое число. Вторым методом регуляризации состоит в том, чтобы разбить область интегрирования на две части, и для первой области $-\infty < t < t_2$, где t_2 достаточно мало, подынтегральное выражение заменить на его асимптотическое выражение. Полученный интеграл находится аналитически в виде неполных гамма-функций. Регуляризация заключается в этом случае в отбрасывании первообразной на нижнем пределе.

Найдем численно спектр излучения частицы, падающей в черную дыру с различным \tilde{E} . На рис. 1, 2 показаны найденные в этой работе спектры. Сравним их с результатами из [6]. Прежде всего отметим, что спектры имеют качественно сходное поведение, а именно: при $\tilde{E} \geq 4$ спектр плоский вплоть до некоторой критической частоты. При частотах,

больших критической, спектр экспоненциально спадает. Кроме того, результаты хорошо согласуются и количественно. Действительно, как показывает расчет, критическая частота примерно совпадает с частотой первой квазинормальной моды черной дыры с заданным l , что соответствует выводам [7]. Сравнивая значения максимумов в спектрах, получим, что результаты согласуются с [6] с погрешностью, не превышающей 15%.

Выводы. В работе, во-первых, получено выражение для функции Грина (19). Во-вторых, найдено выражение для излучения частицы при радиальном движении в явном виде (26). И наконец, в качестве итога численного моделирования можно сказать, что метод расчета излучения с помощью функции Грина проверен для радиально падающей частицы.

Отметим, что возможности расчета излучения с помощью функции Грина шире, чем это было продемонстрировано. В частности, этот метод пригоден для расчета излучения более сложных компактных источников. Однако и задача об излучении свободно падающей точечной частицы имеет смысл. Это связано с тем, что одним из видов излучения компактной системы является излучение, возникающее за счет движения ее центра масс, а его можно с большой точностью моделировать как излучение точечной частицы без спина.

Литература

1. Novikov I. D., Frolov V. P. Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments. Dordrecht: the Netherlands Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 113–119, 91–94.
2. Nagar A., Rezzolla L. // Class. Quant. Grav. 2005. Vol. 22. R167-R192. arXiv: gr-qc/0502064v4.
3. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. М., 1977.
4. Гальцов Д. В. Частицы и поля в окрестности черных дыр. М., 1986.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., 1973. С. 437–439.
6. Ruffini R. // Phys Rev D. 1973. Vol. 7. P. 972–976.
7. Cardoso V., Lemos J. // Phys. Lett. B. 2002. Vol. 538. P. 1–5. arXiv: gr-qc/0202019v2.

A. N. TARASENKO, A. K. GORBATSIEVICH

GREEN'S FUNCTION APPROACH TO THE CALCULATION OF THE GRAVITATIONAL RADIATION OF A PARTICLE RADially MOVING IN THE SCHWARZSCHILD SPACE-TIME

Summary

In the present work the Green's function method is used to calculate the gravitational radiation of an arbitrary source moving in the vicinity of a Schwarzschild black hole. An explicit expression for some components of the Green's function is obtained. The general method is applied to calculate the gravitational radiation of a free particle radially falling into the black hole. An explicit expression for the gravitational wave amplitude is obtained. The emission of the radially falling particle is modeled numerically. The results are shown to be in agreement with the results of the earlier works.

УДК 539.213:539.216.2

С. С. ГРАБЧИКОВ, О. И. ПОТУЖНАЯ, М. У. ШЕЛЕГ

**ВЛИЯНИЕ РЕЖИМОВ ИМПУЛЬСНОГО И РЕВЕРСИРОВАННОГО
ЭЛЕКТРОЛИЗА НА ФАЗОВЫЙ И ХИМИЧЕСКИЙ СОСТАВ
ПЛЕНОК СПЛАВОВ Co-P И Co-Ni-P**

ГНПО «Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению»

(Поступила в редакцию 19.02.2009)

В настоящее время весьма актуальной является проблема создания высокопроизводительного, легко и оперативно управляемого технологического процесса формирования гальванических покрытий с заданной структурой и физическими свойствами. Один из наиболее перспективных путей решения этой проблемы – использование нестационарных режимов электролиза – импульсного и реверсированного. Данные методы позволяют значительно увеличить количество технологических параметров, эффективно влияющих на проведение процесса электролиза, и тем самым расширить возможности управления свойствами осаждаемых покрытий. Согласно данным работ [1, 2], для покрытий, полученных в условиях импульсного электролиза, характерно существенное расширение спектра осадков по химическому составу и структуре, улучшение физико-технических характеристик за счет более равномерного нанесения покрытий по поверхности подложки, снижение пористости и внутренних напряжений, стабилизация свойств и структуры по толщине осадков. Все вышеперечисленные результаты получены при изучении процессов электроосаждения металлов и сплавов в кристаллическом состоянии. Вместе с тем, исследования влияния режимов нестационарного электролиза на химический состав, структуру и физические свойства аморфных пленок весьма ограничены. В связи с этим, в данной работе основное внимание было уделено изучению влияния режимов импульсного и реверсированного электролиза на фазовый и химический состав, микроструктуру аморфных пленок сплавов Co-P и Co-Ni-P.

Методика эксперимента. Пленки сплавов Co-P и Co-Ni-P, содержащие 8–32 ат.% P, 0–50 ат.% Ni, были получены из сернокислых растворов с добавками гипофосфита натрия в условиях стационарного, импульсного и реверсированного электролиза (с импульсами прямоугольной формы). Осаждение пленок проводили с помощью потенциостата ПИ-50.1.1 на медные полированные подложки и ситалловые подложки с напыленными подслоями золота. В режиме постоянного тока его плотность (D_k) составляла 10–50 мА/см². В режиме нестационарного электролиза плотность прямых импульсов тока ($D_k^{пр}$) изменялась от 10 до 150 мА/см², плотность обратных импульсов тока ($D_k^{обр}$) – 5–25 мА/см², длительности прямых импульсов тока ($t^{пр}$) – 0,5–0,00005 с, обратных импульсов тока ($t^{обр}$) – 0,005 с и паузы ($t^п$) – 0,1–0,00005 с соответственно. Скважность в импульсном режиме электролиза ($Q = T / t_{имп}$, где T – период, $t_{имп}$ – длительность импульсов) варьировалась от 1,01 до 21. Частота следования импульсов тока (f) изменялась от 1 до 10 000 Гц. Толщина пленок (d) составляла 0,5–10 мкм.

Исследования фазового состава выполнены на рентгеновском дифрактометре «ДРОН-3М» в $Co_{K\alpha}$ излучении. Химический состав пленок определен на Оже-спектрометре фирмы «Perkin-Elmer» РНИ-660 и с помощью рентгеновского спектрального анализатора «RONTEC EDWIN» с точностью измерения 0,5 ат.%. Микроструктура пленок изучена на просвечивающем электронном микроскопе (ПЭМ) «LEO-906E» при увеличениях 30 000–240 000^x и атомно-силовом

микроскопе (АСМ) «Femtoscan-001» с радиусом кривизны зонда 10 нм. Толщина пленок определена с помощью интерферометра МИИ-4 и металлографическим методом на оптическом микроскопе «Carl Zeiss» mhp-100.

Экспериментальные результаты и их обсуждение.

Импульсный электролиз. Характерные рентгеновские спектры пленок сплавов Co–P различного состава, полученных в условиях стационарного и импульсного электролиза представлены на рис. 1. Для образцов обоих типов с уменьшением плотности катодного тока и ростом концентрации атомов металлоида осуществляется переход из кристаллического в аморфное состояние. При этом в кристаллических пленках наблюдалась различная текстура. В образцах, осажденных при постоянном токе, ярко выраженная текстура [002] решетки гексагонального плотноупакованного кобальта. В образцах, осажденных при импульсном токе присутствовала лишь слабо выраженная текстура [100] и [002], что объясняется подавлением роста кристаллов при осаждении в условиях импульсного электролиза и хаотическим расположением зерен. Для пленок, полученных в импульсном режиме электролиза (при $f = 100$ Гц, $Q = 2$), область формирования аморфной фазы простирается по плотности импульсов прямого тока от 5 до 80 mA/cm^2 , при этом концентрация фосфора изменяется от 29–30 до 9–10 ат.%. Следует отметить, что в режиме стационарного электролиза аморфная фаза формируется в интервале значений $D_k = 5\text{--}40 \text{ mA/cm}^2$, при этом переход в аморфное состояние осуществляется в области концентраций 11–12 ат.% P ($D_k \sim 40 \text{ mA/cm}^2$).

Обобщенные результаты исследований влияния величины прямого тока на фазовый и химический состав аморфных пленок сплавов Co–P, осажденных при постоянном и импульсном токах, представлены на рис. 2. Как это видно, импульсный режим электролиза позволяет расширить диапазон получаемых покрытий по химическому составу и область существования аморфной фазы по нижней границе содержания P на 2–3 ат.% и по верхней границе на 4–5 ат.%, по сравнению со стационарным режимом осаждения. Наряду с этим импульсный электролиз расширяет интервал плотностей катодного тока, при которых формируются сплавы, обладающие аморфной структурой. Аналогичные результаты исследований влияния импульсного режима электролиза на фазовый и химический состав были получены и на аморфных пленках сплавов Co–Ni–P.

Полученные экспериментальные результаты связаны с особенностями механизма совместного восстановления ионов металлов и гипофосфита в условиях импульсного электролиза.

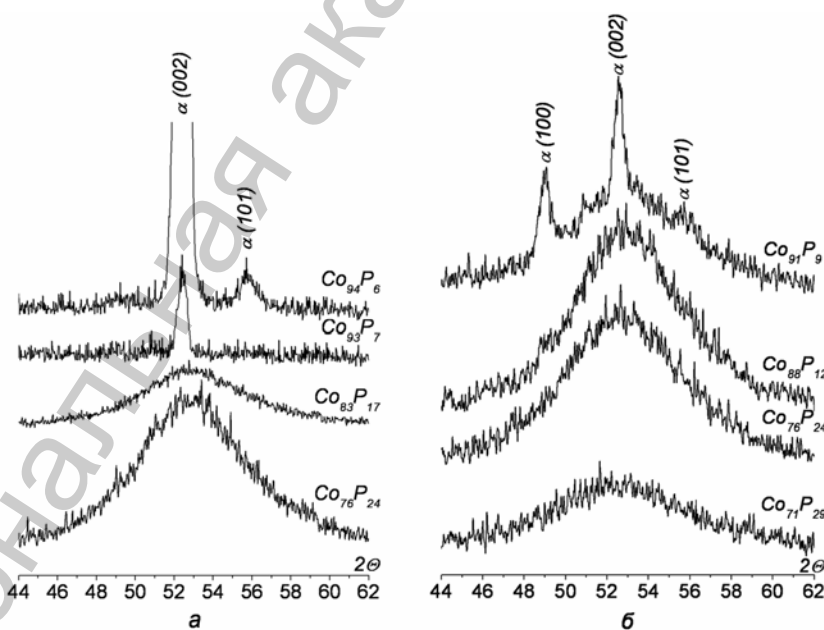


Рис. 1. Рентгеновские спектры пленок сплавов Co–P, полученные в условиях стационарного (а) и импульсного (б) электролиза

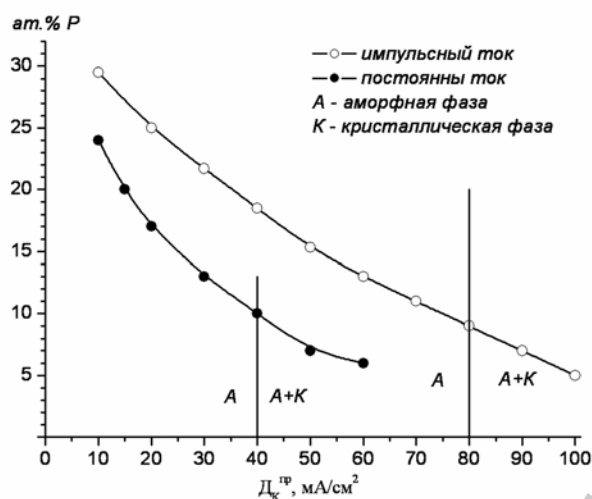


Рис. 2. Зависимости химического и фазового состава пленок сплавов Co–P от режимов электролиза и плотности катодного тока (при $f = 100$ Гц, $Q = 2$)

Данный режим обеспечивает более высокие мгновенные значения плотности тока по сравнению с режимом стационарного электролиза, вследствие чего разряд ионов происходит при более отрицательных значениях потенциала, что, в свою очередь, увеличивает скорость процесса зародышеобразования, способствует формированию более однородных микроструктур и, соответственно, изменению физических свойств покрытий. Амплитуда и длительность импульсов тока оказывает влияние на концентрационную поляризацию – при высоких значениях плотностей и длительностей импульсов тока происходит концентрационное истощение прикатодного пространства и фронт диффузии разряжающихся ионов удаляется от катода. Уменьшение до определенных пределов длительностей импульсов обычно снижает концентрационные расслоения и способствует формированию более однородных по составу и строению покрытий. Однако, при уменьшении времени импульсов ниже определенного значения (для сернокислых электролитов никелирования $t_{имп} \leq 3$ мкс) [1], в связи с резким повышением сопротивления ванны электролиз практически прекращается. Поэтому верхняя граница выбранного нами частотного интервала ограничивалась значением 10 000 Гц.

За время паузы между импульсами тока происходит полное либо частичное выравнивание концентрации ионов в прикатодном пространстве, снижение диффузионных затруднений разряда ионов гипофосфита, а также пассивирование поверхности катода. В зависимости от частоты импульсов тока образуется сплошная или несплошная пассивная пленка. Механизм формирования пленок при этом определяется конкуренцией нескольких процессов, связанных с продолжением либо прекращением роста на старых участках пленки, пассивацией поверхности и образованием новых зародышей.

Другим важным параметром импульсного режима электролиза, существенно влияющим на химический состав аморфных пленок, является скважность. Как видно из табл. 1, с ростом величины Q от 1,01 до 21 содержание фосфора и никеля в аморфных пленках Co–Ni–P увеличивается от 16,2 и 10,8 до 29,5 и 48,5 ат.% соответственно, а кобальта уменьшается от 73,0 до 22,0 ат.%. Следует отметить, что наиболее значительные изменения химического состава наблюдались в диапазоне величин $Q = 1,01–5,0$, при более высоких значениях Q изменения по составу не так значительны. Повышение содержания фосфора в пленках Co–Ni–P с увеличением длительности паузы, как уже говорилось, обусловлено снижением диффузионных ограничений разряда ионов гипофосфита натрия и градиентов концентраций в прикатодном пространстве. Увеличение концентрации никеля в пленках Co–Ni–P с ростом величины Q может быть связано с более высокой катодной поляризацией аморфных сплавов на основе Ni–P, чем сплавов на основе Co–P [3]. Во время паузы происходит релаксация выведенной из равновесия системы электрод–электролит и, как следствие, разряд псевдоемкости электрода на реакцию выделения

более электроположительного компонента [1]. Поэтому с ростом величины Q , т. е. с ростом паузы, потенциал электрода становится электроположительнее, что создает условия для замедления кинетики разряда ионов никеля.

Таблица 1. Зависимость химического состава пленок сплавов Co–Ni–P от скважности режимов импульсного электролиза ($D_K^{pp} = 30 \text{ mA/cm}^2$, $f = 100 \text{ Гц}$)

Q	Co, ат.%	Ni, ат.%	P, ат.%
1,01	73,0	10,8	16,2
1,4	61,9	16,5	21,6
3	54,4	22,7	22,9
5	45,0	29,8	25,2
11	31,9	42,6	25,5
21	22,0	48,5	29,5

Реверсированный электролиз. Данный режим нестационарного электролиза отличается от рассмотренного выше наличием импульсов обратного тока. Действие этих импульсов может приводить либо к частичному растворению поверхности покрытия, либо к частичной ее пассивации. Роль каждого из этих механизмов определяется природой осаждаемого металла и величиной поляризации катода.

Зависимости химического и фазового состава аморфных пленок Co–Ni–P от плотности прямого катодного тока (при постоянном значении соотношения $D_K^{pp} / D_K^{обр} = 4$) представлены на рис. 3. С изменением величины D_K^{pp} от 20 до 100 mA/cm^2 концентрация фосфора в пленках уменьшается от 26,5 до 16,2 ат.%, что свидетельствует о значительном влиянии анодного цикла на механизм восстановления ионов гипофосфита, поскольку в импульсном режиме электролиза при аналогичных изменениях плотностей катодного тока содержание фосфора уменьшалось от 25 до 5 ат.% и при $D_K^{pp} = 100 \text{ mA/cm}^2$ пленки имели кристаллическую структуру. В пленках Co–Ni–P, осажденных на реверсированном токе, формирование кристаллической фазы наблюдалось только при $D_K^{pp} \geq 130\text{--}140 \text{ mA/cm}^2$. Более высокая рабочая плотность тока при осаждении аморфных сплавов в реверсированном режиме допустима, по сравнению с импульсным режимом электролиза, вследствие активации процесса совместного восстановления ионов металлов и фосфора за счет периодической деполяризации электродов, а также снижения степени их поляризации при каждой перемене полярности. Таким образом, реверсированный режим

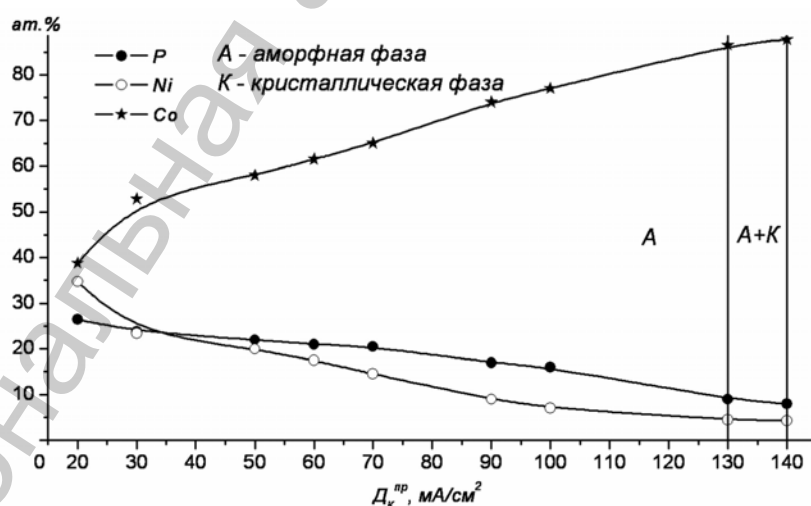


Рис. 3. Зависимости химического и фазового состава пленок сплавов Co–Ni–P от плотности прямых импульсов тока при $D_K^{pp} / D_K^{обр} = 4$

осаждения позволяет использовать более широкие диапазоны рабочих плотностей прямого тока при получении аморфных покрытий сплавов Co–P и Co–Ni–P.

Плотность прямого тока также оказывает определенное влияние на соотношение между атомами основного металла в пленках сплавов Co–Ni–P: с ростом величины D_k^{pp} наблюдается замещение никеля на кобальт (рис. 3). С увеличением плотности прямого тока перераспределение парциальных скоростей разряда ионов происходит в пользу основного металла (поскольку ионы примеси разряжаются на предельном токе) [1], поэтому количество кобальта увеличивается по сравнению с количеством никеля. Преимущественное выделение Co объясняется тем, что Co тормозит переход метастабильной формы никеля в стабильную, из-за чего содержание Ni в осадке понижается [4].

Величина плотности обратных импульсов тока играет значительную роль в механизме восстановления ионов гипофосфита. Как видно из табл. 2, с ростом величины $D_k^{обp}$ от 4 до 20 mA/cm^2 концентрация фосфора в пленках Co–Ni–P увеличивается от 21 до 32 ат.% (при постоянном значении $D_k^{pp} = 40 \text{ mA}/\text{cm}^2$). Следует отметить, что аморфные пленки с такой высокой концентрацией фосфора не удавалось получить в режимах импульсного и стационарного электролиза. Наряду с ростом концентрации фосфора в пленках Co–Ni–P происходит постепенное увеличение концентрации никеля (табл. 2), которое можно объяснить кинетическими затруднениями анодного растворения никеля из-за его пассивации в анодном цикле электролиза и, следовательно, более низкой анодной устойчивостью кобальта, по сравнению с никелем [5]. Например, образцы, осажденные при значениях $D_k^{обp} = 4 \text{ mA}/\text{cm}^2$, характеризовались химическим составом $\text{Co}_{62}\text{Ni}_{17}\text{P}_{21}$, а образцы, осажденные при $D_k^{обp} = 20 \text{ mA}/\text{cm}^2$, – $\text{Co}_{35}\text{Ni}_{33}\text{P}_{32}$. Из сопоставления табл. 1 и 2 видно, что характер изменения зависимостей химического состава аморфных пленок сплавов Co–Ni–P от величин Q и $D_k^{обp}$ однотипен. Этот результат свидетельствует о преимущественной роли пассивации поверхности аморфных пленок за время паузы и циклов обратного тока при нестационарном электролизе.

Т а б л и ц а 2. Зависимость химического состава пленок сплавов Co–Ni–P от плотности обратных импульсов тока ($D_k^{pp} = 40 \text{ mA}/\text{cm}^2$)

$D_k^{обp}$	Co, ат.%	Ni, ат.%	P, ат.%
4	62,0	17	21
5	54,8	21,3	23,9
7	53,5	21,4	25,1
10	48,5	25,4	26,1
20	35,0	33,0	32,0

Микроструктура аморфных пленок. Как известно [6], микроструктура аморфных электролитически осажденных пленок сплавов переходный металл–металлоид имеет сеточный тип строения с размером структурных неоднородностей от нескольких десятков до сотен ангстрем. В настоящее время сеточная микроструктура рассматривается как универсальный структурный дефект, природа которого связана с флуктуациями плотности и химического состава вещества [7]. Наличие этих флуктуаций оказывает существенное влияние на многие макроскопические свойства аморфных пленок, в том числе, коэрцитивную силу, магнитную проницаемость, упругие константы, прочностные свойства и т. д. В связи с этим степень однородности либо дефектности аморфных пленок можно оценивать по величинам флуктуаций плотности вещества и размерам структурных неоднородностей. Результаты атомной силовой микроскопии (АСМ) и растровой электронной микроскопии (РЭМ) [3], полученные на аморфных пленках, синтезированных в условиях стационарного электролиза, позволили нам интерпретировать механизм формирования сеточной микроструктуры в рамках модели островкового зарождения и роста аморфных пленок и показать, что с ростом величин плотностей катодного тока и катодной поляризации увеличиваются дисперсность структурных неоднородностей и степень однородности.

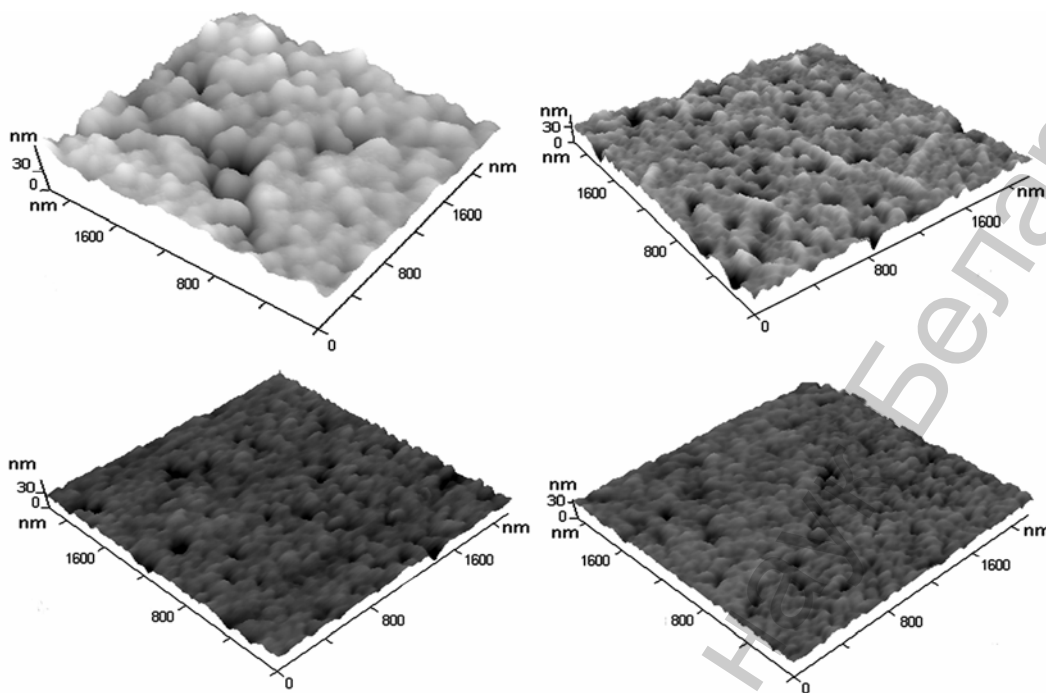


Рис. 4. Трехмерное АСМ представление поверхностей аморфных пленок Co–P, полученных при постоянном токе (а) и в условиях импульсного электролиза при частотах 10 Гц (б), 1000 Гц (в) и 10 000 Гц (г)

Важную роль в изучении природы сеточной микроструктуры могут сыграть исследования аморфных пленок, полученных в условиях нестационарного электролиза, поскольку данные режимы осаждения позволяют значительно влиять на условия зарождения и роста, величину катодной поляризации, и тем самым оказывать воздействие на механизм формирования, дисперсность структурных неоднородностей аморфных пленок. Приведенные на рис. 4 и 5 результаты АСМ и просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) свидетельствуют, что при осаждении при импульсном токе происходит формирование более однородных по своему строению аморфных пленок Co–P и Co–Ni–P с образованием более мелких структурных неоднородностей по сравнению с образцами, осажденными при постоянном токе [3]. Это связано с тем, что при использовании режимов импульсного тока величина катодного перенапряжения достигает больших значений, чем при осаждении при постоянном токе, а с ростом перенапряжения на катоде скорость образования зародышей на подложке увеличивается и их размер уменьшается [2]. Следует отметить, что морфология поверхности аморфных пленок Co–P, полученных в условиях нестационарного электролиза (рис. 4, б, в, г), имеет более гладкий вид, а форма структурных образований менее вытянутую форму в направлении, перпендикулярном плоскости подложки, чем пленок, осажденных в стационарном режиме (рис. 4, а). Это связано с тем, что за счет частичной пассивации поверхности растущих зародышей во время паузы между импульсами тока происходит сглаживание рельефа поверхности, образование новых зародышей, реализуются более благоприятные условия для формирования мелкодисперсных и высокооднородных структур, чем в режимах постоянного тока. Временная пауза играет также позитивную роль для снижения концентрационной поляризации прикатодного пространства и повышения устойчивости плоского фронта роста осадков, так как неустойчивый фронт роста осадков способствует преимущественному росту на вершинах зерен, формированию пористых, текстурированных структур. При увеличении частоты импульсов тока скорость изменения катодного перенапряжения возрастает, что приводит к увеличению скорости образования зародышей и их количества, снижению количества внедренного водорода в сплав. С данными эффектами, по-видимому, связаны изменения микроструктуры аморфных пленок Co–P и Co–Ni–P, происходящие с ростом частоты импульсов тока: измельчение структурных неоднородностей в 1,5–2 раза.

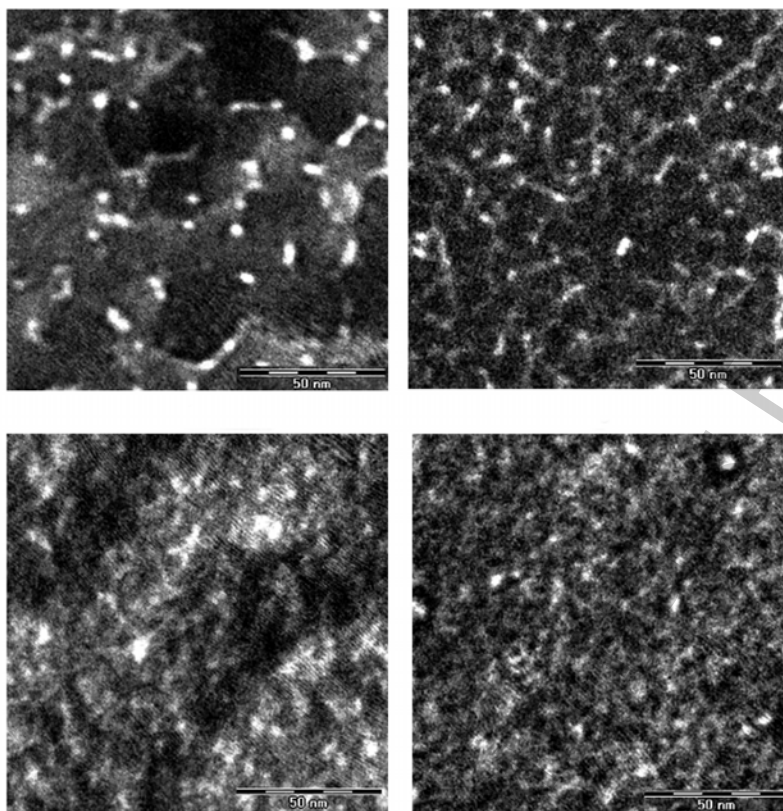


Рис. 5. Электронномикроскопические снимки аморфных пленок Co–Ni–P, полученных при постоянном (а) и импульсном токах на частотах 1 (б), 100 (в), 1000 Гц (г)

Выводы. Использование импульсного и реверсированного режимов электролиза при получении пленок сплавов Co–P и Co–Ni–P позволяет:

- расширить концентрационные области синтезируемых покрытий до 32 ат.% P;
- снизить границу концентрационного перехода в аморфное состояние на 2–3 ат.% P;
- варьировать химический состав в широких диапазонах путем изменения параметров $D_k^{пр}$, $D_k^{обр}$, $t^{пр}$, $t^{обр}$, $t^{л}$: по фосфору от 15 до 32 ат.%, по основному металлу от 20 до 50 ат.%;
- синтезировать аморфные сплавы с более однородной сеточной микроструктурой, характеризующейся в 1,5–2 раза более мелкими структурными неоднородностями по сравнению с образцами, осажденными при постоянном токе.

Показано, что с ростом частоты импульсного тока от 1 до 1000 Гц в аморфных пленках сплавов Co–P и Co–Ni–P происходит измельчение сеточной микроструктуры – продольный размер структурных неоднородностей уменьшается от 80–200 до 40–100 Å.

Литература

1. Костин Н. А., Кублановский В. С., Заблудовский В. А. Импульсный электролиз. Киев, 1989. С. 168.
2. Полукаров Ю. М., Гринина И. Г. // Итоги науки и техники. Серия Электрохимия. 1985. Т. 22. С. 3–60.
3. Грабчиков С. С. Аморфные электролитически осажденные металлические сплавы. Минск, 2006.
4. Федотьев Н. П., Бибииков Н. Н., Вячеславов П. М., Грилихес С. Я. Электролитические сплавы. М., 1962.
5. Овчинникова С. Н., Маслий А. И., Болдырев В. В. // Электрохимия. 2006. Т. 42. № 8. С. 1–8.
6. Лими А., Гилмер Г., Диркс А. // Актуальные проблемы материаловедения. М., 1983. С. 240 – 273.
6. Staundinger A., Nakahara S. // Thin Solid films. 1977. Vol. 45, N 1. P. 125 – 130.
7. Юдин В. В., Матюхин А. В., Плотников В. С. // Поверхность. Физика, химия, механика. 1985. № 12. С. 54 – 60.

INFLUENCE OF PULSE AND REVERSE ELECTROLYSIS MODES ON THE PHASE AND CHEMICAL COMPOSITION OF Co-P AND Co-Ni-P ALLOYS

Summary

In this article the influence of pulse and reverse electrolysis modes on the phase and chemical composition and microstructure of Co-P and Co-Ni-P alloy films was studied.

During film deposition of Co-P and Co-Ni-P alloys in the pulse and reverse modes, concentration areas of the amorphous phase of synthesized covers to 32 at.% P extend, the limit of a transition from the crystal into the amorphous state decreases at 2–3 at.% P. When varying the values of the densities of direct and reverse currents, the duration of direct and reverse current pulses and pauses allows changing the chemical composition of Co-P and Co-Ni-P alloy films in a wide range: phosphorus from 15 to 32 at.%, base metal of 20 to 50 at.%. With increasing frequency pulse currents from 1 to 1000 Hz in amorphous films there occurs grinding of the grid microstructure, the longitudinal size of structural inhomogeneities decreases from 80–200 and 40–100 Å.

Use of the modes of pulse and reverse electrolysis enables to synthesize amorphous alloys with a uniform grid microstructure characterized by a factor of 1.5–2 smaller structural inhomogeneities, as compared to the samples deposited at constant current.

Национальная академия наук Беларуси

УДК 534.535

А. Е. АНИСИМОВА, Г. В. КУЛАК

АКУСТООПТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ

Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина

(Поступила в редакцию 06.05.2009)

Введение. Исследование брэгговской дифракции света на ультразвуке представляет научный и практический интерес для создания устройств обработки оптической информации и управления лазерным излучением [1, 2]. В работах [3–4] отмечена перспективность использования несогласованных структур для управления оптическим излучением, когда средний показатель преломления испытывает скачок на границах слоя. В [5] показано, что несогласованные структуры на основе известных акустооптических кристаллов теллура (Te), парателлуриита (TeO_2), кварца (SiO_2), германата висмута ($\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$) и др. могут быть использованы для создания нетрадиционных акустооптических (АО) устройств, использующих как прошедшие, так и отраженные дифрагированные волны. Амплитудные, фазовые и поляризационные характеристики световых волн, дифрагированных на ультразвуке рассмотрены в работах [6, 7]. Установлено, что *s*- и *p*- составляющие падающего на АО ячейку света испытывают дифракцию на разных фазовых решетках с отличающимися индексами фазовой модуляции, что приводит к качественному различию в поведении амплитуд и фаз дифрагированных волн. В [8] исследованы амплитудно-фазовые особенности АО дифракции в гиротропной среде. Показано, что наличие в гиротропной среде, возмущенной ультразвуком, двух связанных фазовых решеток фотоупругости обусловлено вращением плоскостей поляризации дифрагированных волн.

Теоретические результаты и обсуждение. В настоящей работе изучены энергетические, поляризационные и угловые особенности брэгговской АО дифракции в несогласованных структурах из изотропных материалов. Учтено влияние френелевского отражения дифрагированных волн нулевого и первого порядка от границ трехслойной структуры покрытие – модулированный слой – подложка (рис. 1).

В случае неколлинеарного АО взаимодействия ультразвуковая волна (УЗВ) распространяется вдоль границ слоя из оптически изотропного материала, включая кубические кристаллы. УЗВ с вектором смещения $U = U_0 \exp[i(Kz - \Omega t)]$ ($K = \Omega / v$, Ω – циклическая частота, v – фазовая скорость УЗВ) возбуждается вдоль оси *Z* и заключена в пространстве между плоскостями $x = 0$ и $x = h$ в пределах слоя. Продольная УЗВ создает периодическое в пространстве и времени изменение тензора диэлектрической проницаемости $\Delta \epsilon_{ik}$, которое связано с упругими деформациями $U_{ik} = (1/2)(\nabla_k U_i + \nabla_i U_k)$ и фотоупругими постоянными p_{ijkl} известными соотношениями: $\Delta \epsilon_{ij} = -\epsilon_2^2 p_{ijkl} U_{kl}$, где ϵ_2 – диэлектрическая проницаемость плоскопараллельного слоя. Начало системы координат *XYZ* расположено на верхней границе слоя, а ось *OY* перпендикулярна плоскости падения, причем модулированный слой занимает пространство между плоскостями $x = 0$ и $x = h$.

Предположим, что плоская световая волна с частотой $\omega \gg \Omega$ и волновым вектором $\mathbf{k}_1 = \mathbf{e}_x k_{1x} + \mathbf{e}_y k_{1y}$ ($\mathbf{e}_x \parallel OX$, $\mathbf{e}_y \parallel OY$ – единичные векторы, $k_{1x} = kn_1 \cos \varphi_1$, $k_{1z} = kn_1 \sin \varphi_1$; $k = \omega / c$, $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$) имеет линейную *s*- или *p*-поляризацию по отношению к плоскости падения *XZ* и падает на грань

$x=0$ под углом φ_1 к ее нормали. Угол преломления $\varphi_2 = \arcsin(\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2} \sin \varphi_1)$ равен углу Брэгга $\varphi_2 = \varphi_B = \arcsin(K/2k_2)$, где $k_2 = kn_2$ ($n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$). Волновое уравнение, описывающее поведение световой волны, приведено в работах [3, 5].

Решение волнового уравнения для дифрагированного поля электромагнитной волны в слое можно записать в виде [3]:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m(x) \exp[i(k_{mz}z - \omega_m t + \pi m/2)], \quad (1)$$

где $k_{mz} = k_{0z} + mK$, $\omega_m = \omega + m\Omega$.

При $k_{0z} \approx K/2$ из совокупности (1) дифрагированных волн выделяются две наиболее существенные, соответствующие брэгговскому режиму, дифракции с дифракционными порядками $m=0$ и $m=-1$ [3, 5]. Брэгговский режим дифракции теоретически возможен при значении параметра Клейна–Кука $Q \geq 1$ ($Q = \lambda_0 h / n_2 \Lambda^2$), где λ_0 – длина световой волны в вакууме [6–8]. С учетом этого система уравнений связанных волн имеет вид:

$$\frac{d^2 A_0}{dx^2} + k_{0x}^2 A_0 - ik_2^2 \eta_{\perp} A_{-1} = 0, \quad \frac{d^2 A_{-1}}{dx^2} + k_{-1x}^2 A_{-1} + ik_2^2 \eta_{\perp} A_0 = 0, \quad (2)$$

где $k_{0x} = (k_2^2 - k_{0z}^2)^{1/2}$, $k_{-1x} = (k_2^2 - k_{-1z}^2)^{1/2}$, $k_{0z} = k_2 \sin \varphi_2$, $k_{-1z} \approx k_2 \sin \varphi_2$; $\eta_{\perp} = n_2^2 p_{\text{эф}}^{\perp} U / (2 \cos \varphi_2)$, где $p_{\text{эф}}^{\perp}$ – эффективная фотоупругая постоянная, ответственная за рассеяние s -поляризованной волны; U – амплитуда деформации УЗВ. В случае дифракции волны p -поляризации в выражении (2) следует η_{\perp} заменить на $\eta_{\parallel} = n_2^2 p_{\text{эф}}^{\parallel} U / (2 \cos \varphi_2)$, где $p_{\text{эф}}^{\parallel}$ – эффективная фотоупругая постоянная, ответственная за рассеяние p -поляризованной волны.

Постоянные распространения дифрагированных волн в слое находим из решения характеристического (дисперсионного) уравнения системы уравнений (2). Решение дисперсионного уравнения представимо в виде [3, 5]:

$$k_{xy}^{\pm} = k_2 \sqrt{(1 - n_1^2 / n_2^2 \sin^2 \varphi_1) \pm \eta_{\perp}}. \quad (3)$$

Сшивая напряженности электрического и магнитного полей в слое (см. [3, 5]), а также в областях $x < 0$ и $x > h$, находим коэффициенты отражения и пропускания (относительные интенсивности) дифрагированных волн на границах слоя. Решение системы восьми алгебраических уравнений можно найти в замкнутой форме. Для падающей световой волны s -поляризации амплитудные коэффициенты отражения ($r_{0,1}$) и пропускания ($t_{0,1}$) дифрагированных волн даются соотношениями:

$$r_{0,1} = \Delta_{0,1}^r / \Delta, \quad t_{0,1} = \Delta_{0,1}^t / \Delta, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= 4e_{3+}e_{3-}(\alpha_{1+}\alpha_{1+}^+\alpha_{3+}\alpha_{3+}^+e_{2+}e_{2-}^* + \alpha_{1-}\alpha_{1-}^+\alpha_{3-}\alpha_{3-}^+e_{2+}e_{2-} - \\ &\alpha_{1+}\alpha_{1-}^+\alpha_{3+}\alpha_{3-}^+e_{2+}e_{2-}^* - \alpha_{1-}\alpha_{1+}^+\alpha_{3-}\alpha_{3+}^+e_{2+}e_{2-}^*), \\ \Delta_0^r &= 2e_{3+}e_{3-}[(\alpha_{1-}\alpha_{1+}^+ + \alpha_{1+}\alpha_{1-}^+)(\alpha_{3+}\alpha_{3+}^+e_{2+}e_{2-}^* + \alpha_{3-}\alpha_{3-}^+e_{2+}e_{2-}) - \\ &(\alpha_{1-}\alpha_{1-}^+ + \alpha_{1+}\alpha_{1+}^+)(\alpha_{3+}\alpha_{3-}^+e_{2+}e_{2-}^* + \alpha_{3-}\alpha_{3+}^+e_{2+}e_{2-}^*)], \\ \Delta_1^r &= 4e_{3+}e_{3-}[(b_1^+ - b_1^-)(\alpha_{3+}\alpha_{3-}^+e_{2+}e_{2-} - \alpha_{3+}\alpha_{3+}^+e_{2+}e_{2-}^*) - \\ &(b_1^+ + b_1^-)(\alpha_{3-}\alpha_{3+}^+e_{2+}e_{2-}^* - \alpha_{3+}\alpha_{3-}^+e_{2+}e_{2-}^*)], \\ \Delta_{0,1}^t &= \pm 8e_{3+}[b_3^+(\alpha_{1+}\alpha_{3+}^+e_{2+}^* - \alpha_{1-}\alpha_{3-}^+e_{2-}^*) \pm b_3^-(\alpha_{1+}\alpha_{3+}^+e_{2+}^* - \alpha_{1-}\alpha_{3-}^+e_{2-}^*)]. \end{aligned}$$

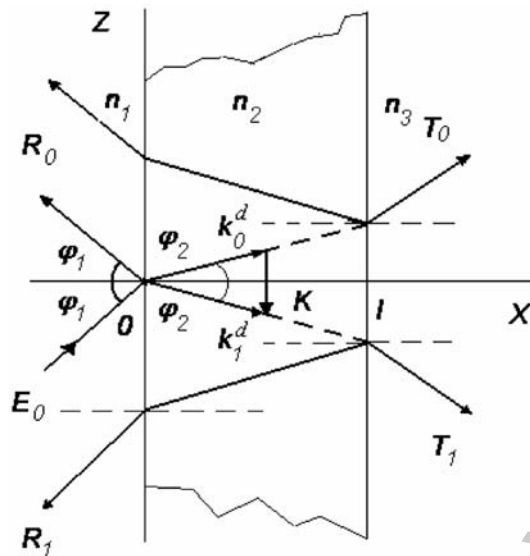


Рис. 1. Схема акустооптического взаимодействия в оптически изотропном плоскопараллельном слое

Здесь введены обозначения: $\alpha_{(1,3)\pm}^{\pm} = (1 \pm b_{1,3}^{\pm})$, $b_{1,3}^{\pm} = k_{xs}^{\pm} / (kn_{1,3} \cos \varphi_{1,3})$, $e_{2\pm} = \exp(ik_{xs}^{\pm}h)$, $e_{3\pm} = \exp(ik_{3z}^{0,-1}h)$, $k_{3z}^{0,-1} = (k^2 n_3^2 - k_{0z,-1z})^{1/2}$; знак * обозначает комплексное сопряжение. При исследовании дифракции волн p -поляризации следует в (4) выполнить замены: $\eta_{\perp} \rightarrow \eta_{\parallel}$, $n_{1,2,3} \cos \varphi_{1,2,3} \rightarrow 1/n_{1,2,3} \cos \varphi_{1,2,3}$. При наличии френелевского отражения ($n_1 \neq n_2 \neq n_3$) и ультразвука ($U \neq 0$) выполняется соотношение: $R_0 + R_1 + T_0 + T_1 = 1$, где $R_{0,1} = |r_{0,1}|^2$ – энергетические коэффициенты отражения дифрагированных мод нулевого и первого порядка, $T_{0,1} = (n_3/n_1) |t_{0,1}|^2$ – соответствующие энергетические коэффициенты пропускания. В отсутствие ультразвука ($U = 0$) формулы (4) переходят в формулы Эйри для коэффициентов отражения R_0 и пропускания T_0 плоскопараллельного слоя ($R_1 = T_1 = 0$) [9]. Для прозрачных сред при отсутствии френелевского отражения отличные от нуля относительные интенсивности дифрагированных волн даются соотношениями: $T_0 = \cos^2(\pi n_2^3 p_{\text{эф}}^{\perp} U h / 2\lambda_0)$, $T_1 = \sin^2(\pi n_2^3 p_{\text{эф}}^{\parallel} U h / 2\lambda_0)$ [1, 2].

Численные расчеты проводились для плоскопараллельного слоя из плавленого кварца (SiO_2) в случае дифракции s - и p -поляризованного излучения He-Ne – лазера с длиной волны $\lambda_0 = 0,6328$ мкм на продольной УЗВ. Предполагалось, что слой материала ($n_2 = 1,457$) граничит с воздухом ($n_1 = n_3 = 1$). Амплитуда тензора деформаций $U = (2I_a / \rho v_L^3)^{1/2}$, где I_a – интенсивность УЗВ, v_L – фазовая скорость продольной УЗВ, ρ – плотность кристалла. Эффективные фотоупругие постоянные $p_{\text{эф}}^{\perp} = p_{12} = 0,27$, $p_{\text{эф}}^{\parallel} = p_{11} = 0,121$ [1].

Зависимость энергетического коэффициента пропускания T_1 от амплитуды деформации U и толщины слоя h представлена на рис. 2, а. Из рисунка следует, что с изменением U и h происходят периодические изменения коэффициента пропускания дифрагированной волны 1-го порядка. При толщине слоя $h = 1,5$ мм и амплитуде деформации $U = 0,0013$ достигается максимальная эффективность дифракции $T_{1\text{max}} = 0,98$. Зависимость энергетического коэффициента отражения R_1 от U и h представлена на рис. 2, б. При этом также имеют место периодические изменения отражательной способности дифрагированной волны 1-го порядка. При толщине слоя $h = 1,5$ мм и амплитуде деформации $U = 0,0019$ достигается коэффициент отражения $R_{1\text{max}} \approx 0,038$. Рассмотренные особенности АО взаимодействия объясняются дифракцией света на УЗВ и френелевским отражением на границах слоя, приводящим к возникновению наряду с прошедшими и отраженными дифракционными порядков.

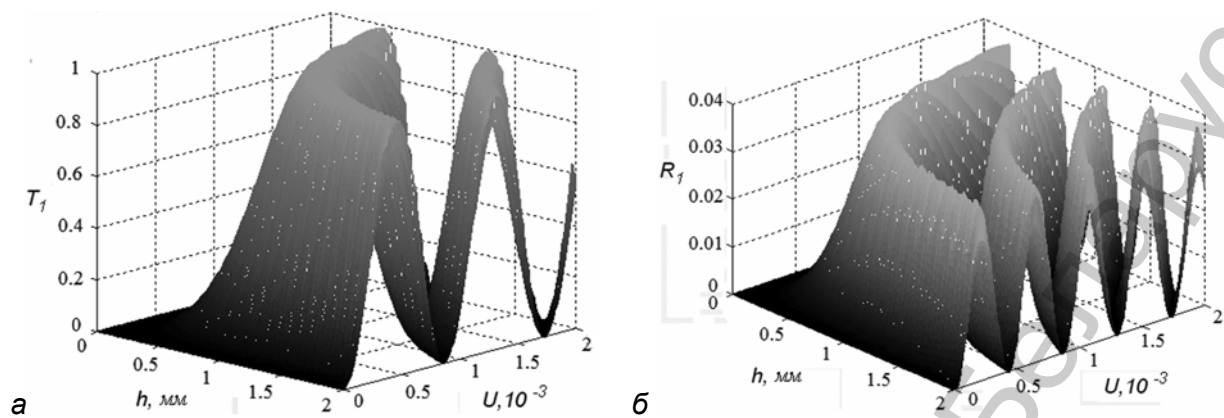


Рис. 2. Зависимость энергетического коэффициента пропускания T_1 (а) и отражения R_1 (б) от амплитуды деформации U и толщины слоя h ($f_0 = 1$ ГГц, $\lambda_0 = 0,6328$ мкм; структура: воздух – SiO_2 – воздух)

На рис. 3, а приведена зависимость коэффициента пропускания T_1 от амплитуды деформации U и угла падения света φ_1 . При этом полагалось, что выполняются условия брэгговского синхронизма для световой волны, дифрагированной в слое $\varphi_2 = \varphi_B = \arcsin(\lambda_0 f / 2n_2 v)$ и $\varphi_1 = \arcsin[(n_2 / n_1) \sin \varphi_B]$. Углу падения света $\varphi_1 \approx 2^\circ$ соответствует частота ультразвука $f = 8,7$ ГГц. Значительные осцилляции коэффициента пропускания T_1 обусловлены сложными интерференционными эффектами при многократном отражении света в слое и дифракционным отражением от фронтов ультразвуковой решетки в слое. Аналогичным образом изменяется коэффициент отражения R_1 дифрагированной волны (рис. 3, б). При этом максимальное значение $R_{1\max} = 0,04$ достигается при $U = 0,0001$ и $\varphi_1 = 0,75^\circ$.

Селективные свойства брэгговской дифракции могут быть изучены, положив $\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) \approx \sin \varphi_1 + \cos(\varphi_1)\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ – угловая отстройка от угла Брэгга φ_B . При этом из-за высокой избирательности T_1 и R_1 от угла падения φ_1 может быть достигнута узкая полоса брэгговской дифракции $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 \approx (2v n_2 / f_0)\Delta\varphi$, где λ_0 – длина волны, соответствующая точному брэгговскому синхронизму. Например, при $h = 1$ мм, $T_1 = 0,96$, $\varphi_1 = 0,02$ ширина полосы $\Delta\lambda = 0,58$ нм. Данные особенности дифракции могут быть использованы при создании узкополосных АО фильтров и анализаторов спектра с перестраиваемой длиной волны.

Зависимости, аналогичные рассмотренным выше для коэффициентов пропускания (T_1) и отражения (R_1), имеют место также для падающей световой волны p -поляризации. При этом, однако, максимальные значения коэффициентов T_1 и R_1 достигаются при больших амплитудах деформации U и толщинах слоя h . Например, при $h = 1,5$ мм, $U = 0,0024$ коэффициент пропускания $T_{1\max} = 0,86$; при $h = 1,5$ мм, $U = 0,0012$ коэффициент отражения $R_{1\max} = 0,032$. Данная особенность дифракции объясняется существенной анизотропией фотоупругости

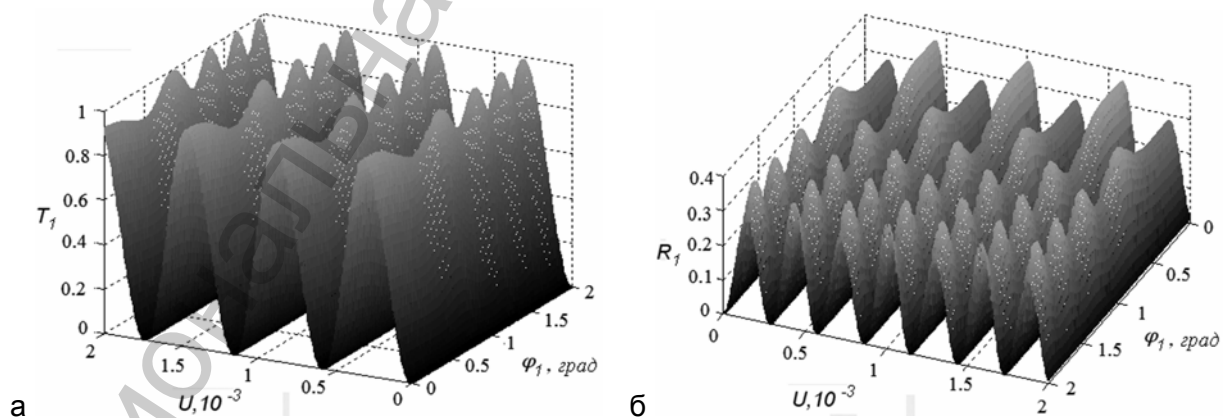


Рис. 3. Зависимость энергетического коэффициента пропускания T_1 (а) и отражения R_1 (б) от амплитуды деформации U и угла падения света φ_1 ($h = 1,5$ мм, $\lambda_0 = 0,6328$ мкм; структура: воздух – SiO_2 – воздух)

кристаллов SiO_2 . Очевидно, что при падении на слой световой волны с произвольным азимутом поляризации будет наблюдаться поворот плоскостей поляризации дифрагированных волн, обусловленный не только анизотропией фотоупругости [6, 7], но и особенностями поляризационных эффектов при френелевском отражении световой волны [9].

Заключение. Таким образом, максимальная эффективность дифракции для прошедших и отраженных световых волн достигается изменением интенсивности ультразвука, толщины слоя и угла падения света. Узкая полоса пропускания перестраиваемого АО фильтра обусловлена в основном высокой избирательностью коэффициента пропускания и отражения дифрагированной волны при изменении угла падения света. Полученные результаты могут найти применение при конструировании акустооптических устройств обработки сигнальной информации, использующих прошедшие и отраженные дифрагированные волны.

Литература

1. Балакший В. И., Парыгин В. Н., Чирков Л. Е. Физические основы акустооптики. М., 1985.
2. Яковкин И. Б., Петров Д. В. Дифракция света на акустических поверхностных волнах. Новосибирск, 1979.
3. Kong J. A. // J. Opt. Soc. Am. 1977. Vol. 67, N 6. P. 825 – 829.
4. Максименко С. А. // Квант. электрон. 1995. Т. 22, № 7. С. 733 – 737
5. Кулак Г. В. // Опт. и спектр. 1994. Т. 76, № 6. С. 1027 – 1029.
6. Балакший В. И., Кулиш Т. Г., Хасан Д. А. // Опт. и спектр. 1993. Т. 74, В. 6. С. 1175 – 1183.
7. Balakshy V. I., Hassan J. A. // Optical Engineering. 1993. Vol. 32, N 4. P. 476 – 751.
8. Кулак Г. В., Ропот П. И. // ЖПС. 2004. Т. 71, № 4. С. 512 – 515.
9. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973.

A. E. ANISIMOVA, G. V. KULAK

ACOUSTOOPTICAL INTERACTION IN THE PLANE-PARALLEL SLAB

Summary

The participants of Bragg diffraction of light by ultrasound in the uncoordinated plane-parallel slab from fused quartz for *s*- and *p*- incident wave polarization have been investigated. It is shown that maximal transmission and reflected diffracted waves is reached by changing the ultrasonic intensity, slab thick and light incident angle. It is established that a narrow strip of switch over the acoustooptical filter under diffraction in the slab is conditioned by the Fresnel reflection of light on its boundaries.

УДК 681.327.26:681.327.7

А. К. ЕСМАН, В. К. КУЛЕШОВ, Г. Л. ЗЫКОВ

БУФЕРИЗАЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ В НАНОСЕКУНДНОМ ДИАПАЗОНЕ

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 02.07.2009)

Развитие информационной индустрии неразрывно связано с решением практических задач по передаче и обработке все большего количества данных с более высокой скоростью. Производительность вычислений сегодня значительно превосходит скорость обмена информацией между активными элементами вычислительных систем. Совершенствование современных мощных микропроцессоров связано с развитием средств оперативного управления высокоскоростными потоками оптических данных внутри кремниевых микросхем, так как по мере увеличения плотности интеграции полупроводниковых элементов и тактовой частоты микропроцессоров возрастают и требования к суммарной пропускной способности каналов обмена данными между отдельными элементами внутри микропроцессора. Важнейшим условием управления оптическими сигналами в компьютерной микросхеме является оперативная буферизация в наносекундном диапазоне [1–3].

В системах коммуникационных сетей для связи между отдельными компонентами успешно используется технология оптоволоконных соединений. Достигнутые к настоящему времени тактовые частоты в оптических волокнах и волноводах могли существенно повысить производительность современных вычислительных систем. Однако традиционные оптоволоконные элементы связи и планарные волноводы не могут быть использованы, когда речь идет о коммуникациях и буферном хранении данных внутри микросхем, так как они имеют большие габариты и не совместимы с интегральной кремниевой технологией. Практическое коммерческое использование оптических коммуникационных элементов в микросхемах возможно, если их площадь значительно меньше одного квадратного миллиметра, а изготовление их будет совместимо с существующими современными интегральными технологиями [2, 3].

В [1] рассматриваются ультрамедленные оптические структуры с переменной групповой скоростью как перспективные варианты построения полностью оптических буферных устройств. Однако существенное снижение скорости передачи информации в когерентных атомных средах ограничивает максимальную частоту следования цифровых данных в них, которая определяет быстродействие и емкость оптического буфера [4].

В данной работе рассматривается метод управляемой задержки оптических данных в наносекундном диапазоне и его схемотехническая реализация в интегральном исполнении на основе последовательно оптически связанных волноводных кремниевых резонаторных структур микронных размеров. Для вариации временем задержки оптических сигналов в таких структурах можно использовать два широко распространенных механизма влияния на коэффициент преломления кремния: термооптический эффект и эффект плазменной дисперсии. В современных высокопроизводительных системах обработки информации, как правило, используется плазменная дисперсия, суть которой заключается в зависимости оптических свойств кристалла кремния от концентрации свободных носителей заряда, которая может изменяться как оптически, так и электрически.

Численное моделирование спектральных резонансных характеристик двух оптически связанных резонаторных структур проводилось на основе двумерных уравнений Даламбера [5] в декартовых координатах для прямых волноводов:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{n_W^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

и в цилиндрических координатах для резонаторных структур:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} - \frac{n_R^2}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где x , y и ρ , ϕ – пространственные переменные в декартовых и цилиндрических координатах, n_W и n_R – эффективный коэффициент преломления в материале входного и выходного прямых волноводов и оптически связанных резонаторных структур, c – скорость света в вакууме, t – время.

Расчеты производились в областях распространения электромагнитного излучения, на границах которых волновая функция приравнялась нулю, а сигнал во входном прямом волноводе резонаторной структуры задавался в виде:

$$E_z(x_0 = 0, y, t) = E_0 \exp\left(-\frac{(y - y_0)^2}{a^2}\right) \sin(2\pi ft). \quad (3)$$

Распределение компоненты электромагнитного поля E_z в области взаимодействия входного прямого волновода и резонаторной структуры вычислялось следующим образом:

$$E_z(\rho, \phi, t) = E_1 \exp\left(-\frac{((\rho - \rho_0) \cos(\phi))^2}{a^2}\right) \sin(2\pi ft), \quad (4)$$

где E_0 – амплитуда входного сигнала, E_1 – амплитуда выходного сигнала из входного прямого волновода в резонаторную структуру, f – несущая частота, значения x_0 , y_0 , ρ_0 , ($\phi_0 = 0$) и a задают форму и пространственное положение оптических сигналов.

Расчеты проводились для следующих параметров:

- длина входного и выходного прямых волноводов – 11 мкм;
- коэффициенты связи: входного прямого волновода с первой резонаторной структурой $k_1 = 0,224$ и $k_1 = 1$, между резонаторными структурами $k_2 = 0,02-0,5$, между второй резонаторной структурой и выходным прямым волноводом $k_3 = 0,2-0,4$;
- толщина волноводов и резонаторных структур – 0,5 мкм;
- радиус резонаторных структур – 5–20 мкм;
- мощность излучения во входном прямом волноводе $E_0 = 1$ мВт.

Для оценки тактовой частоты следования оптических цифровых данных через рассматриваемую структуру были рассчитаны временные зависимости амплитуды оптического сигнала для трех различных радиусов (рис. 1) и различных коэффициентов связи при $k_1 = 1$ (рис. 2). Время установления амплитуды оптического сигнала на выходе двух оптически связанных резонаторных структур с радиусами колец 5, 10 и 20 мкм и коэффициентами связи $k_1 = k_3 = 0,224$ и $k_2 = 0,02$ составляет 0,11, 0,22 и 0,44 нс (рис. 1), что соответствует 300 прохождениям оптических сигналов по этим структурам независимо от их радиуса. Ширина спектральной резонансной характеристики (правая шкала рис. 1) рассматриваемой резонаторной структуры по уровню 0,5 при указанных временах установления амплитуды оптического сигнала равняется $2,87 \times 10^{-3}$, $1,34 \times 10^{-3}$ и $0,67 \times 10^{-3}$ нм для радиусов колец 5, 10 и 20 мкм соответственно.

Для установившихся значений амплитуды оптических сигналов в указанных резонаторных структурах с коэффициентами связи $k_1 = k_3 = 0,224$ и $k_2 = 0,02$ были рассчитаны зависимости ширины спектральной резонансной характеристики по уровням 0,5 и 0,1 от их радиуса (рис. 3).

При изготовлении кремниевого оптического буферного устройства для задержки оптических сигналов в наносекундном диапазоне можно достичь реального изменения концентрации свободных носителей на величину $5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ [6], что позволяет изменять коэффициент прелом-

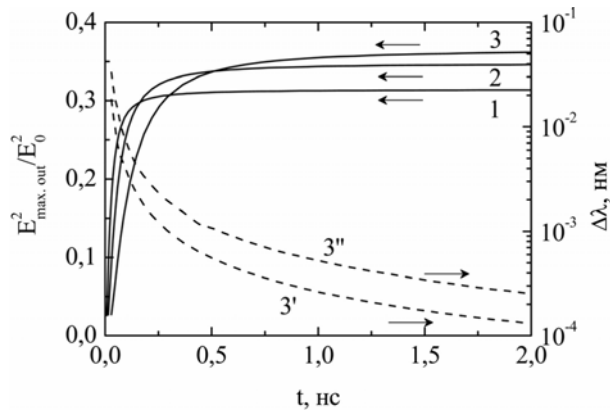


Рис. 1. Временные зависимости: отношений максимальных значений интенсивностей выходного и входного сигналов (левая шкала), полученные для двух оптически связанных резонаторных кремниевых структур с радиусами 5 (1), 10 (2) и 20 (3) мкм; ширины спектральной резонансной характеристики по уровням 0,5 (3') и 0,1 (3'') (правая шкала) для радиуса 20 мкм

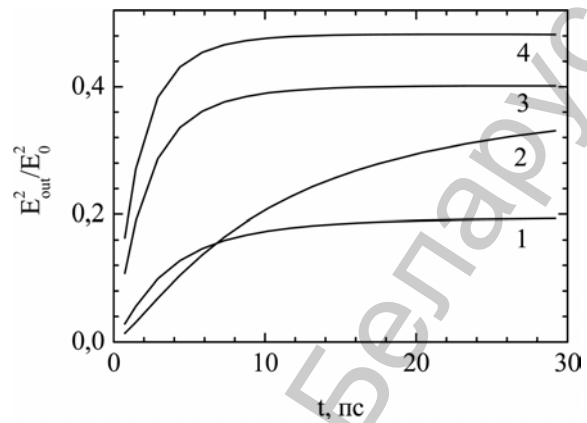


Рис. 2. Временные зависимости значений отношений максимальных интенсивностей выходного и входного сигналов, полученные для двух оптически связанных резонаторных кремниевых структур с радиусом 10 мкм и коэффициентами связи: $k_2 = 0,2$ и $k_3 = 0,4$ (1), $k_2 = 0,2$ и $k_3 = 0,2$ (2), $k_2 = 0,4$ и $k_3 = 0,4$ (3), $k_2 = 0,5$ и $k_3 = 0,4$ (4)

ления на величину $\Delta l \approx 0,004$. На рис. 4 представлены положения спектральных резонансных характеристик двух оптически связанных резонаторных структур с $n = 3,483$ и $n = 3,4833$, которые рассчитаны для резонансной длины волны λ_m , равной 1519,74327 нм.

Анализ полученных результатов показывает, что при высоких частотах передачи цифровой оптической информации необходимо использовать резонаторные структуры с большими значениями коэффициентов связи между ними. Так, при коэффициентах связи $k_1 = 1$, $k_2 = 0,5$ и $k_3 = 0,4$ почти половина интенсивности входного оптического излучения проходит через две оптически связанные резонаторные структуры. Потому величина амплитуды оптического сигнала на выходе цепочки, состоящей из 30 таких оптически связанных структур, будет достаточной для достоверного считывания информации современными серийно выпускаемыми фотоприемниками при мощности входного сигнала 1 мВт. А задержка оптических цифровых данных составляет 0,5 нс при частоте их передачи 17 ГГц. Если требуется задержка оптических сигналов, частота следования которых находится в диапазоне 2,3–0,7 ГГц, то величина коэффициентов связи

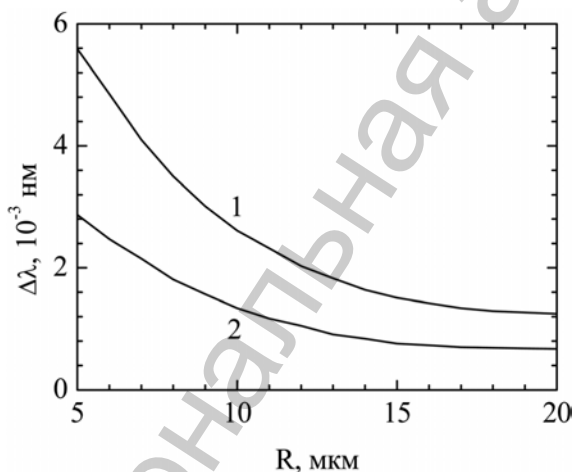


Рис. 3. Зависимость ширины спектральной резонансной характеристики $\Delta\lambda$ по уровням 0,1 (1) и 0,5 (2) двух оптически связанных резонаторных структур от их радиуса

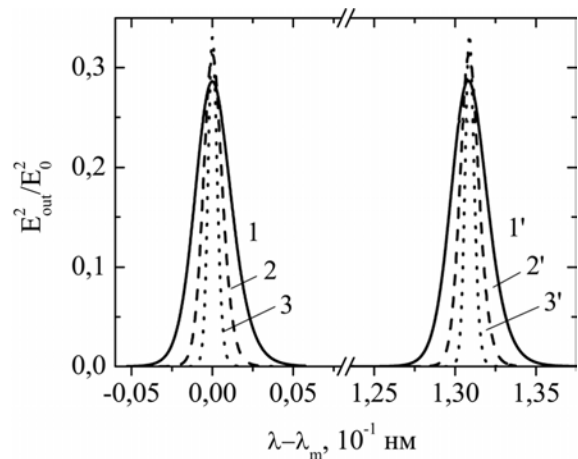


Рис. 4. Спектральные резонансные характеристики двух оптически связанных резонаторных структур, выполненных из кремния, с радиусами 5 (1, 1'), 10 (2, 2') и 20 (3, 3') мкм при коэффициентах преломления $n = 3,483$ (1, 2, 3) и $n = 3,4833$ (1', 2', 3')

выбирается соответственно: $k_1 = k_3 = 0,224$ и $k_2 = 0,02$. Время задержки оптических сигналов тогда будет составлять 0,7–3,0 нс и потребуется всего лишь 14 резонаторных структур, следовательно, площадь, занимаемая ими, уменьшится в два раза.

В работе рассмотрен оптический буфер, выполненный из тридцати последовательно расположенных, оптически связанных волноводных кремниевых резонаторных структур микронных размеров с периодом 20 мкм. Показано, что такой оптический буфер обеспечивает задержку цифровых сигналов на 0,5 нс, при занимаемой им площади порядка 0,02 мм². Максимальная частота следования оптических сигналов при этом может составлять 17 ГГц, а для оптической буферизации данных, передаваемых на более низких частотах, требуется меньшее количество слабо связанных кремниевых резонаторных структур. Меняя концентрацию свободных носителей заряда в материале волноводов оптическим или электрическим путем, можно изменять как величину времени задержки оптического сигнала, так и значение его несущей частоты.

Таким образом, появляется возможность интегрировать такие оптические буферы в компьютерные чипы и тем самым существенно повысить производительность вычислительных систем за счет максимальной загрузки процессоров. Более того, рассмотренная буферизация оптических сигналов в наносекундном диапазоне может быть также использована и для маршрутизации передаваемых цифровых данных как сверхкомпактный оптический телекоммуникационный компонент.

Литература

1. Sedgwick F. G., Chang–Hasnain C. J., Ku P. C., Tucker R. S. // Electronics Letters. 2005. Vol. 41, N 24. P. 1347–1348.
2. Marino A. M., Pooser R. C., Boyer V., Lett P. D. // Nature. 2009. Vol. 457. P. 859–862.
3. Xia F., Sekaric L., Vlasov Y. // Nature Photonics. 2007. Vol. 1. P. 65–71.
4. Matsko A., Strekalov D., Maleki L. // Optics Express. 2005. Vol. 13, N 6. P. 2210–2223.
5. Логгинов А. С., Майоров А. Ш. // Журнал радиоэлектроники. 2007. № 3. С. 17–21.
6. Бресслер М. С., Гусев О. Б., Теруков Е. И. // ФТТ. 2004. Т. 46, вып. 1. С. 18–20.

A. K. ESMAN, V. K. KULESHOV, G. L. ZYKOV

BUFFERING OF THE OPTICAL SIGNALS IN THE NANOSECOND RANGE

Summary

A buffering method of the digital optical data based on using a sequentially disposed optically coupled waveguide silicon cavity structures with micron sizes is proposed. Using the mathematical modeling, it is shown that the optical buffer provides a digital signals delay of 0.5 nsec, when it occupied the area of approximately 0.02 mm². In this case, the maximum frequency of the optical digital signals repetition can reach 17 GHz.

ІНФАРМАТЫКА

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

НЕПЕРЕСЕКАЮЩЕЕСЯ ОСТОВНОЕ ДЕРЕВО ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ДОПОЛНЕНИЯ ОСТОВНОГО ДЕРЕВА

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 29.12.2008)

Геометрический граф – это пара $(V(G), E(G))$, где $V(G)$ – множество различных точек на плоскости в общем положении, а $E(G)$ – множество замкнутых (вообще говоря, пересекающихся) прямолинейных отрезков, концы которых принадлежат множеству $V(G)$. Напомним, что семейство различных точек на плоскости находится в *общем положении*, если 1) никакие три из них не лежат на одной прямой; 2) среди проходящих через них прямых нет параллельных и 3) никакие три из этих прямых не пересекаются в точке, не принадлежащей семейству. Говорят, что два ребра геометрического графа *пересекаются*, если они имеют общую внутреннюю (для обоих) точку пересечения.

Поскольку множество точек на плоскости находится в общем положении, никакие три ребра геометрического графа не пересекаются в одной точке и ребро, соединяющее две вершины, не проходит через третью. Далее не делается никаких различий между вершинами (ребрами) абстрактного графа без петель и кратных ребер и точками (отрезками) геометрического графа, представляющего этот абстрактный граф на плоскости. Кроме того, геометрический граф, представляющий абстрактный граф, обладающий свойством P , будем просто называть геометрическим графом со свойством P . Например, геометрический остовный граф на множестве X – это остовный граф на X , ребрами которого являются прямолинейные отрезки с концами из X .

Одной из важных проблем топологической теории графов является проблема существования непересекающегося подграфа H со свойством P в геометрическом графе, которая имеет различные приложения, например, в проектировании СБИС, передаче информации и распознавании образов. В общем случае эта проблема является трудноразрешимой [1]. Однако, для некоторых частных случаев (см. [1–4]) существует положительное либо полиномиальное решение данной задачи. Так, в [2] было установлено, что в геометрическом графе, являющемся дополнением совершенного паросочетания, существует непересекающаяся гамильтонова цепь. Нами был получен критерий существования непересекающегося остовного дерева в геометрическом дополнении 2-фактора (см. [5]).

В этой статье мы исследуем геометрическое дополнение произвольного геометрического остовного дерева в полном графе K_n на n вершинах.

Пусть T – произвольное геометрическое остовное дерево в полном геометрическом графе K_n и $G = (V, E)$ – его геометрическое дополнение в K_n , т. е. две вершины в $G = (V, E)$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в T .

Еще Эрде́шем было показано, что полный граф, имеющий 2-раскраску ребер, обладает монохромным остовным деревом. В 1995 г. G. Karolyi, J. Pach и G. Toth [6] нашли красивое доказательство более сильного утверждения.

Т е о р е м а 1. *Если полный геометрический граф имеет 2-раскраску ребер, то в нем существует монохромное несамопересекающееся остовное дерево.*

Покажем, что отсюда непосредственно можно получить следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Геометрическое дополнение самопересекающегося остовного дерева обладает непересекающимся остовным деревом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T – самопересекающееся геометрическое остовное дерево в полном графе K_n и $G = (V, E)$ – его геометрическое дополнение в K_n . Раскрасим ребра дерева T в красный цвет, а ребра дополнения G – в синий. Тогда по теореме 1 в полном графе K_n с полученной 2-раскраской существует монохромное непересекающееся остовное дерево S . Но в силу того, что дерево T является остовным и самопересекающимся, ребра остовного дерева S должны быть синего цвета, т. е. дерево S должно лежать в геометрическом дополнении G . Теорема доказана.

Случай, когда данное остовное геометрическое дерево T в полном графе K_n является непересекающимся, значительно сложнее.

Далее мы будем дополнительно предполагать, что все вершины геометрического дерева T , а значит, полного геометрического графа K_n находятся в *выпуклом положении*, т. е. лежат на своей выпуклой оболочке. Без ограничения общности, можно считать, что они образуют множество вершин P_n правильного n -угольника и пронумерованы целыми числами от 1 до n по часовой стрелке, причем вершина с номером 1 имеет наименьшую x -координату.

Напомним некоторые свойства непересекающихся остовных деревьев, полного графа K_n , построенного на таком множестве точек P_n . (см. [7]).

1. Произвольное остовное дерево S имеет по крайней мере два ребра на границе P_n , т. е. два ребра типа $i(i+1)$, такие, что или вершина с номером i или вершина с номером $i+1$ является листом дерева S .

2. Для любых двух непересекающихся остовных деревьев T_1 и T_2 можно определить *расстояние* $d(T_1, T_2)$, равное минимальному числу ребер, которые нужно последовательно заменить в одном дереве, чтобы получить второе дерево, причем при каждой замене ребер дерево должно оставаться остовным и непересекающимся. Под *заменой* ребра в непересекающемся остовном дереве S понимается удаление одного ребра e и добавление другого ребра f , что обозначается кратко в виде: $S - e + f$. В результате такой операции над произвольным непересекающимся остовным деревом S получается так называемый *геометрический граф деревьев* D_n , множеством вершин которого является множество всех непересекающихся остовных деревьев геометрического полного графа K_n и два непересекающиеся остовные дерева T_1 и T_2 считаются *смежными*, если $d(T_1, T_2) = 1$, т. е. $T_2 = T_1 - e + f$ для некоторых ребер $e \in E(T_1)$ и $f \in E(T_2)$.

3. Отметим, что полученный геометрический граф деревьев D_n является *связным с диаметром*, не превышающим $2n - 4$.

В частности, отсюда следует

Л е м м а 1. *Если в геометрическом дополнении заданного непересекающегося остовного дерева T существует непересекающееся остовное дерево S , то расстояние между ними $d(T, S)$ должно быть не меньше $n - 1$:*

$$d(T, S) \geq n - 1. \quad (1)$$

Действительно, все ребра дерева T должны быть заменены и в силу связности геометрического графа деревьев D_n мы всегда последовательной процедурой замены ребер можем перейти от дерева T к дереву S .

4. Двумя особыми классами непересекающихся остовных деревьев в геометрическом графе деревьев D_n являются *звезды* и *цепи*.

Звезда S_i получается соединением вершины с номером i со всеми другими вершинами графа K_n . *Цепь* C_i получается объединением всех ребер на границе P_n , кроме одного ребра: $i(i+1)$. Пусть $T \in D_n$, и d_i – степень вершины с номером i в дереве T , а $ch(T)$ – число ребер T на границе P_n . Тогда имеют место следующие равенства:

$$d(T, S_i) = n - 1 - d_i$$

и

$$d(T, C_i) = \begin{cases} n - ch(T), & \text{если ребро } i(i+1) \in T, \\ n - 1 - ch(T), & \text{если ребро } i(i+1) \notin T. \end{cases}$$

Используя свойство 1, получаем, что для произвольной звезды S_i и произвольной цепи C_i справедливы неравенства $d(T, S_i) \leq n - 2$ и $d(T, C_i) \leq n - 2$. Сравнивая их с неравенством (1) леммы 1, немедленно приходим к следующему заключению.

Л е м м а 2. *В геометрическом дополнении любой звезды S_i и любой цепи C_i не существует непересекающегося остовного дерева.*

Далее, мы докажем более сильное утверждение. Для этого сначала введем некоторые определения.

О п р е д е л е н и е 1. Максимальное множество последовательных ребер $K = \{i(i + 1), (i + 1)(i + 2), \dots, (j - 1)j\}$ непересекающегося остовного дерева T , лежащих на границе P_n , назовем *компонентой на границе* дерева T . Кратко обозначим такую компоненту через: $K = \{i, j\}$.

Ребра $i(i + 1)$ и $(j - 1)j$ назовем *крайними* ребрами компоненты, остальные ребра – *промежуточными*, а вершины i и j – *концевыми* вершинами компоненты.

В силу свойства 1 непересекающееся остовное дерево T обладает по крайней мере одной компонентой на границе P_n .

О п р е д е л е н и е 2. Вершину l из множества P_n , не принадлежащую ни одной компоненте на границе дерева T , назовем *изолированной*. Будем говорить, что изолированная вершина l *лежит между компонентами* $K_1 = \{i, j\}$ и $K_2 = \{s, t\}$, если $j < l < s$.

О п р е д е л е н и е 3. *Длиной* $d(i, j)$ ребра ij , соединяющего вершины с номерами i и j , $i < j$, назовем число вершин на границе P_n , находящихся между вершинами $i - 1$ и j , т. е. $d(i, j) = j - i$.

В этих терминах сформулируем следующее утверждение.

Т е о р е м а 3. *Геометрическое дополнение непересекающегося остовного дерева T , вершины которого находятся в выпуклом положении, содержит непересекающееся остовное дерево тогда и только тогда, когда T обладает по крайней мере двумя различными компонентами на границе своей выпуклой оболочки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что непересекающееся остовное дерево T обладает только одной компонентой K на границе P_n . Не ограничивая общности, можно считать, что концевыми вершинами компоненты K на границе P_n являются вершины с номерами 1 и m .

Л е м м а 3. *Каждая из изолированных вершин с номерами $m + 1, \dots, n$ соединена единственным непересекающимся ребром дерева T с вершинами компоненты K .*

Докажем, что никакое ребро, концевые вершины которого являются изолированными, не принадлежит дереву T . Предположим противное: пусть ребро ij , $m + 1 \leq i < j \leq n$, где i и j – изолированные вершины, принадлежит дереву T . Если его длина равна $d(i, j) = 1$, то это противоречит тому, что дерево T обладает только одной компонентой. Пусть утверждение справедливо для всех ребер i длины $d(i, j) < k$, где $k \geq 2$. Покажем, что и в случае $d(i, j) = k$ у дерева T нет такого ребра ij . Поскольку $d(i, j) \geq 2$, то найдется изолированная вершина с номером k , таким, что $i < k < j$. В силу того, что дерево T непересекающееся и все вершины находятся в выпуклом положении, вершина k связана непересекающимся ребром дерева T с вершиной l , где $i \leq l \leq j$. Заметим, что $d(k, l) < d(i, j) = k$. Применяя теперь предположение индукции к ребру kl , получаем, что такого ребра у дерева T не существует.

Наконец, если бы существовали по крайней мере два ребра, инцидентные одной изолированной вершине j , то существовал бы цикл в остовном дереве T . Лемма 3 доказана.

Покажем теперь, что в геометрическом дополнении G непересекающегося остовного дерева T нет непересекающегося остовного дерева.

Предположим противное: пусть S – такое дерево. Тогда вершина 1 инцидентна некоторому ребру e_1 дерева S . Заметим, что вторая вершина ребра e_1 не может принадлежать компоненте K .

Для этого мы покажем, что справедливо более общее утверждение.

Л е м м а 4. *Ребро e , обе вершины которого принадлежат компоненте K , т. е. имеют номера из множества $\{1, \dots, m\}$, не может входить в дерево S .*

Мы воспользуемся индукцией по длине ребра e . В самом деле, если $d(e) = 1$, то ребро e входит в дерево T и, значит, не может лежать в его дополнении. Пусть утверждение справедливо

для всех ребер e с длиной $d(e) < k$, где $2 \leq k < m$. Покажем, что оно верно и для ребра e с длиной $d(e) = k$. Пусть $e = i(i+k)$ ребро дерева S и вершины с номерами i и $i+k$ принадлежат компоненте K . Поскольку $k \geq 2$, между вершинами i и $i+k$ на границе P_n лежит еще некоторая вершина j , такая, что $i < j < i+k$. Тогда в силу того, что дерево S непересекающееся и все вершины P_n находятся в выпуклом положении, вершина j должна быть соединена непересекающимся ребром f дерева S с некоторой вершиной $l \neq j$, такой, что $i \leq l \leq i+k$. Но это противоречит предположению индукции, поскольку $d(f) = d(j, l) < k$ и ребро f не может входить в дерево S . Значит, ребро $e = i(i+k)$ также не входит в дерево S . Лемма 4 доказана.

Таким образом, вторая вершина ребра e_1 дерева S должна быть изолированной и иметь номер i_1 из множества $\{m+1, \dots, n\}$: $e_1 = 1i_1$ (рис 1, а). По лемме 3 эта вершина i_1 в дереве T инцидентна некоторому ребру g_1 , второй конец которого – вершина j_1 – принадлежит компоненте K : $1 < j_1 \leq m$. Рассмотрим теперь некоторое ребро e_2 дерева S , инцидентное вершине j_1 . Во-первых, по лемме 4 его вторая вершина i_2 не может быть среди вершин компоненты; во-вторых, поскольку дерево S непересекающееся и все вершины P_n находятся в выпуклом положении, номер i_2 не может принадлежать множеству $\{i_1+1, \dots, n\}$. Наконец, вершина i_2 должна быть отлична от вершины i_1 , поскольку ребро $g_1 = i_1j_1$ принадлежит дереву T . Следовательно, номер i_2 принадлежит множеству $\{m+1, \dots, i_1-1\}$. Снова по лемме 3 вершина i_2 в дереве T инцидентна некоторому ребру g_2 , второй конец которого – вершина j_2 – принадлежит компоненте K , причем в силу того, что дерево T непересекающееся и все вершины P_n находятся в выпуклом положении: $j_1 < j_2 \leq m$. Продолжая эти рассуждения, мы на каком-то k -м шаге придем к ситуации, когда либо $j_k = m$ либо $i_k = m+1$. То есть, либо ребро $g_k = i_k m$, $i_k > m+1$, принадлежит дереву T , либо ребро $e_k = (m+1)j_{k-1}$, $j_{k-1} < m$, принадлежит дереву S . В первом случае, из того, что дерево T непересекающееся, следует, что вершина $(m+1)$ инцидентна ребру дерева T , второй конец которого принадлежит множеству $\{m+2, \dots, i_k\}$, что противоречит лемме 3. Во втором случае, вершина $(m+1)$ должна быть инцидентна в дереве T ребру $g_k = j_k(m+1)$, где $j_{k-1} < j_k < m$. Это невозможно в случае, когда $j_{k-1} = m-1$, иначе, вершина j_k должна быть инцидентна ребру дерева S , второй конец которого имеет номер из множества $\{j_k+1, \dots, m\}$, что противоречит лемме 4.

Таким образом, необходимость утверждения теоремы 3 доказана.

Докажем теперь достаточность утверждения теоремы 3, а именно, в случае, когда дерево T обладает по крайней мере двумя компонентами на границе P_n , его геометрическое дополнение G содержит непересекающееся остовное дерево. Доказательство проведем индукцией по числу r компонент.

Пусть дерево T обладает двумя ($r = 2$) различными компонентами K_1, K_2 на границе P_n . Без ограничения общности можно считать, что множество вершин $\{1, \dots, m\}$ принадлежит компоненте K_1 , а множество вершин $\{s, s+1, \dots, t\}$, где $s > m, t \leq n$, – компоненте K_2 . В силу связности дерева T существуют две возможности:

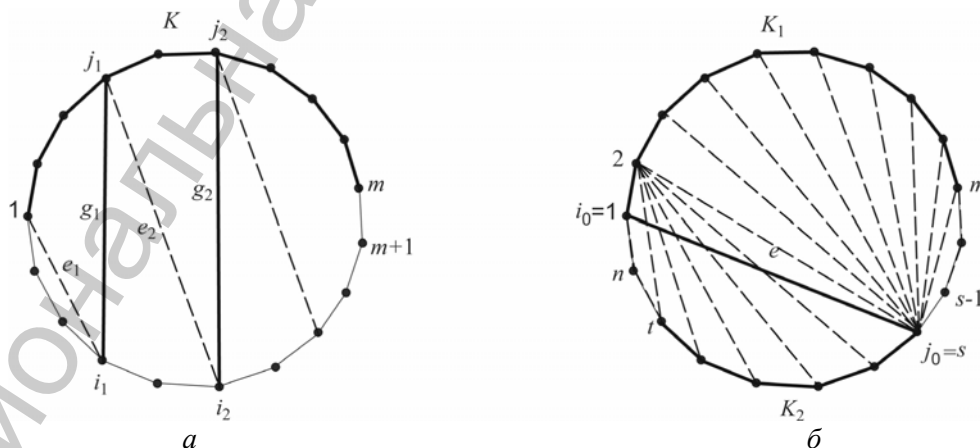


Рис. 1

1) две компоненты K_1 и K_2 соединены некоторым ребром $e = i_0j_0$, где $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ и $j_0 \in \{s, s+1, \dots, t\}$,

2) две компоненты K_1 и K_2 соединены цепью из нескольких непересекающихся ребер e_1, e_2, \dots, e_l , таких, что все промежуточные ребра цепи, e_2, \dots, e_{l-1} , имеют концевые вершины в изолированных точках, лежащих в силу леммы 3 в разных множествах $A = \{m+1, \dots, s-1\}$ и $B = \{t+1, \dots, n\}$, и два крайних ребра цепи, e_1, e_l , имеют одну из концевых вершин в (различных) компонентах, вторую – в одном из множеств A или B .

Тогда в силу того, что дерево T непересекающееся и отсутствия циклов в нем, в каждом из этих двух случаев все ребра $f = ij$, где $i \in \{1, \dots, m\}$ и $j \in \{s, s+1, \dots, t\}$, кроме ребра $e = i_0j_0$ (для первого случая), лежат в его геометрическом дополнении G . Поэтому, не ограничивая общности, достаточно показать, как при условии $e = i_0j_0 \in E(G)$ строится непересекающееся остовное дерево S в геометрическом дополнении G .

Будем различать два случая, в зависимости от которых будет строиться это дерево S .

I. По крайней мере у одной вершины из i_0 и j_0 существуют две смежные вершины дерева T , принадлежащие соответственно компоненте K_1 или K_2 . Пусть это будет вершина i_0 и вершины с номерами $i_0 - 1$ и $i_0 + 1$ принадлежат компоненте K_1 . Пусть также некоторая вершина j_1 смежна с вершиной j_0 в дереве T и принадлежит компоненте K_2 (заметим, что такая вершина всегда существует). Тогда нетрудно видеть, что непересекающееся остовное дерево S будет составлять следующее множество ребер:

$$S = \{j_1k \mid k = \overline{1, m}\} \cup \{(t+1)(t+2), \dots, (n-1)n, n1\} \cup \{m(m+1), \dots, (s-2)(s-1)\} \cup \\ \{1(j_0+2), \dots, 1t\} \cup \{ms, m(s+1), \dots, m(j_0-2)\},$$

плюс ребра $\{1j_0, 1(j_0+1)\}$ или $\{mj_0, m(j_0-1)\}$, в зависимости от того $j_1 = j_0 - 1$ или $j_1 = j_0 + 1$.

II. У вершины i_0 и у вершины j_0 существует только одна смежная вершина в дереве T , принадлежащие компонентам K_1 или K_2 соответственно, т. е. вершины i_0 и j_0 являются концевыми вершинами компонент K_1 или K_2 соответственно: $i_0 \in \{1, m\}$ и $j_0 \in \{s, t\}$. Заметим тогда, что ребро $e = i_0j_0$ дерева T не может совпадать ни с ребром $1t$ ни с ребром ms , поскольку иначе в дереве T существовало бы ребро с концевыми вершинами из множества $\{t, t+1, \dots, n, 1\}$ или из множества $\{m, m+1, \dots, s\}$ соответственно, что можно показать, как при доказательстве леммы 3, невозможно. Тогда в случае, когда $e = i_0j_0 = 1s$, нетрудно видеть, что непересекающееся остовное дерево S будет составлять множество ребер (рис. 1, б):

$$S = \{2k \mid k = \overline{s, t}\} \cup \{sk \mid k = \overline{3, m}\} \cup \{t(t+1), \dots, (n-1)n, n1\} \cup \{m(m+1), \dots, (s-2)(s-1)\},$$

а в случае, когда $e = i_0j_0 = mt$, нетрудно видеть, что непересекающееся остовное дерево S будет составлять множество ребер:

$$S = \{(m-1)k \mid k = \overline{s, t}\} \cup \{tk \mid k = \overline{1, m-2}\} \cup \{sm, t(t+1), \dots, (n-1)n\} \cup \{m(m+1), \dots, (s-2)(s-1)\}.$$

Пусть предположение индукции верно, когда число компонент дерева T на границе P_n меньше r и покажем теперь, что оно верно для числа компонент дерева T на границе P_n , равного r : $K_i, i = \overline{1, r}$. Пусть $|K_i| = m_i, i = \overline{1, r}$, и, без ограничения общности, $K_1 = \{1, m_1\}$.

Рассмотрим компоненту K_1 . Из связности дерева T следует, что а) либо существует некоторое ребро $e = i_0j_0$, связывающее некоторую вершину i_0 компоненты K_1 с некоторой вершиной другой компоненты K_i ; б) либо существует некоторая цепь из ребер e_1, e_2, \dots, e_l , промежуточные ребра которой, e_2, \dots, e_{l-1} , имеют концевые вершины в изолированных точках, а крайние ребра, e_1, e_l , имеют одну вершину в изолированной точке, а другую – в вершине компоненты K_1 или K_i , соответственно.

В случае а) прямая, определяемая ребром $e = i_0j_0$, разбивает множество n точек на два выпуклых подмножества из s и t точек соответственно, имеющих две общие точки i_0 и j_0 . Кроме того, в силу того, что дерево T непересекающееся, оно распадается на два остовных поддерева T_1 и T_2 для множеств из s и t точек соответственно и имеющих одно общее ребро $e = i_0j_0$. При этом

в силу того, что ребро $e = i_0j_0$ соединяет две компоненты, число компонент на границах выпуклых оболочек деревьев T_1 и T_2 будет меньше r .

Поэтому, если у обоих деревьев T_1 и T_2 число компонент на границах их выпуклых оболочек будет не меньше двух, то можно применить предположение индукции и построить остовные непересекающиеся деревья S_1 и S_2 в геометрических дополнениях T_1 и T_2 соответственно. Объединяя ребра деревьев S_1 и S_2 , мы получим непересекающийся остовный граф, имеющий $(s - 1) + (t - 1) = n$ ребер. Удаляя из него одно лишнее ребро, получим требуемое непересекающееся остовное дерево, которое лежит уже в геометрическом дополнении всего дерева T .

Пусть теперь у одного из деревьев T_1 или T_2 , скажем T_1 , на границе его выпуклой оболочки только одна компонента (заметим, что в силу того, что $r \geq 3$ и ребро e связывает две компоненты, два дерева T_1 и T_2 не могут одновременно обладать только одной компонентой на своих выпуклых оболочках). При этом возможны два случая: 1) ребро e является промежуточным ребром единственной компоненты дерева T_1 ; 2) ребро e является крайним ребром единственной компоненты дерева T_1 . В обоих случаях, по предположению индукции, существует непересекающееся остовное дерево S_2 в геометрическом дополнении T_2 .

Для случая 1) к дереву S_2 мы добавляем множество ребер $A = \{j_0k \mid k - \text{вершина, лежащая в } T_1 \text{ и отличная от } i_0 \text{ и } j_0\}$ (рис. 2, а). Нетрудно видеть, что в результате получим непересекающееся остовное дерево S в геометрическом дополнении дерева T .

Для случая 2) к дереву S_2 мы добавляем множество ребер $A = \{j_0k \mid k = \overline{i_0 + 1, m_1}\}$ и множество ребер $B = \{m_1k \mid k = \overline{m_1 + 1, j_0 - 1}\}$ (рис. 2, б). Нетрудно видеть, что все они не лежат в дереве T , и значит, в результате также получим непересекающееся остовное дерево S в геометрическом дополнении дерева T .

Наконец, рассмотрим случай б), когда компонента K_1 связана цепью из ребер с некоторой компонентой K_l . Возьмем первое ребро цепи $e_1 = i_0j_0$, где i_0 – вершина компоненты K_1 , а j_0 – изолированная вершина. Снова, прямая, определяемая ребром $e_1 = i_0j_0$, разбивает множество n точек на два выпуклых подмножества из s и t точек соответственно, имеющих две общие точки i_0 и j_0 . Кроме того, в силу того, что дерево T непересекающееся, оно распадается на два остовных поддерева T_1 и T_2 для множеств из s и t точек соответственно и имеющих одно общее ребро $e = i_0j_0$.

Если изолированная вершина j_0 не лежит между компонентами K_1 и K_2 или K_1 и K_l , то оба остовных дерева имеют число компонент в пределах от двух до $r - 1$, и, следовательно, можно применить предположение индукции и построить остовные непересекающиеся деревья S_1 и S_2 в геометрических дополнениях T_1 и T_2 соответственно. Объединяя ребра деревьев S_1 и S_2 , мы получим непересекающийся остовный граф, имеющий $(s - 1) + (t - 1) = n$ ребер. Удаляя из него одно лишнее ребро, получим требуемое непересекающееся остовное дерево, которое лежит в геометрическом дополнении всего дерева T .

Поэтому рассматривая оставшуюся возможность, положим для определенности, что вершина j_0 лежит между компонентами K_1 и K_2 . Тогда справедливо следующее утверждение.

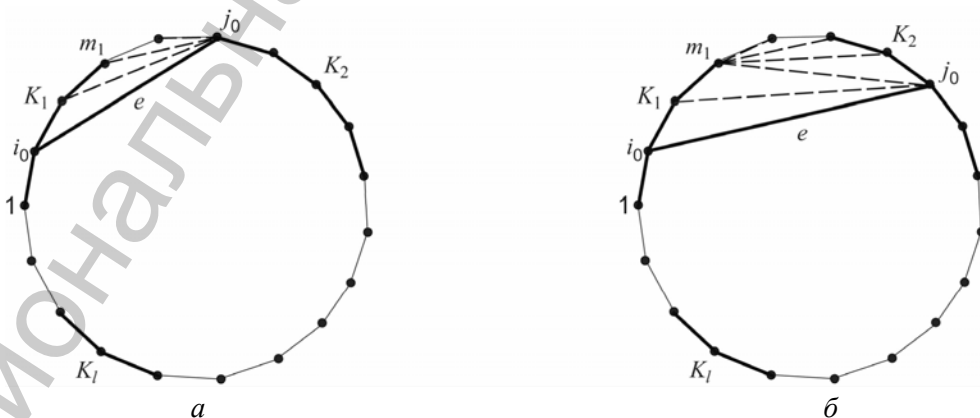


Рис. 2

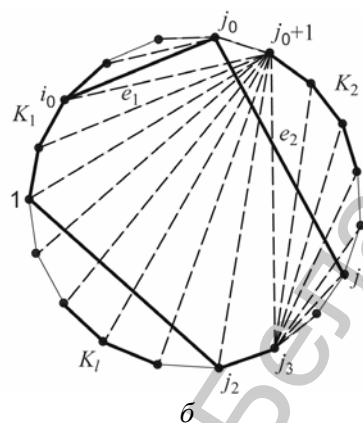
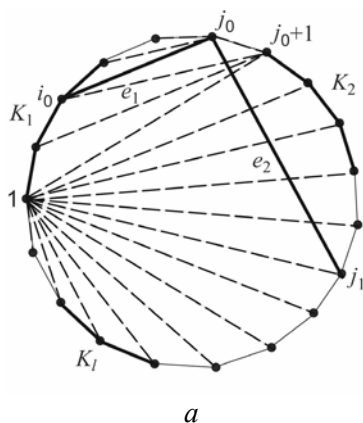


Рис. 3

Л е м м а 5. Геометрическое дополнение дерева T_2 обладает непересекающимся остовным деревом S_2 .

Действительно, рассмотрим следующее ребро цепи $e_2 = j_0j_1$. Существуют две возможности: 1) вершина 1 имеет степень 1 в дереве T ; 2) степень вершины 1 в дереве больше 1.

В первом случае нетрудно видеть, что непересекающееся остовное дерево S_2 будет составлять множество ребер (рис. 3, а):

$$S_2 = \{1k \mid k = \overline{j_0 + 1, n}\} \cup \{(j_0 + 1)k \mid k = \overline{2, i_0}\} \cup \{j_0(j_0 + 1)\}.$$

Во втором случае, кроме ребра $1j_2$ ($j_2 > j_1$) дерева T и, значит, T_2 . Поскольку в дереве нет циклов, то существует вершина j_3 , $j_1 < j_3 \leq j_2$, такая, что ребра j_3k , $k = \overline{j_1, j_3 - 1}$. Тогда нетрудно видеть, что непересекающееся остовное дерево S_2 будет составлять следующее множество ребер (рис. 3, б):

$$S_2 = \{j_3k, k = \overline{j_0 + 2, j_3 - 1}\} \cup \{(j_0 + 1)k \mid k = \overline{j_3, i_0}\} \cup \{j_0(j_0 + 1)\}.$$

Лемма 5 доказана.

Добавляя теперь в обоих случаях к непересекающемуся дереву S_2 множество ребер $A = \{j_0k \mid k = \overline{i_0 + 1, j_0 - 1}\}$, получим непересекающееся остовное дерево S в геометрическом дополнении дерева T . Тем самым шаг индукции, а значит, достаточность утверждения теоремы 3 доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Математические модели».

Литература

1. Kratochvil J., Lubiw A., Nesetril J. // SIAM J. Disc. Math. 1991. Vol. 4, N 2. P. 223–244.
2. Cerny J., Dvorak Z., Jelinek V., Kara J. // Disc. Appl. Math. 2007. Vol. 155, N 9. P. 1096–1105.
3. Kaneko A., Kano M., Suzuki K. // Comput. Geom.: Theory and Applications. 1999. Vol. 13, P. 253–261.
4. Abellanas M., Garcia G., Hernandez G., Noy M., Ramos P. // Disc. Appl. Math. 1999. Vol. 93. P. 141–148.
5. Бенедиктович В. И. // 3-ая научн. конф. «Теория расписаний и методы декомпозиции. Танаевские чтения», 2007 г. Минск, 2007. С. 15–19.
6. Karolyi G., Pach J., Toth G. // Disc. Comput. Geom. 1997. Vol. 18, N 3. P. 247–255.
7. Hernando M., Hurtado A., Marquez A., Mora M., Noy M. // Disc. Appl. Math. 1999. Vol. 93. P. 51–66.

V. I. BENEDIKTOVITCH

NON-CROSSING SPANNING TREE IN THE GEOMETRIC COMPLEMENT OF THE SPANNING TREE

Summary

In this article the existence criterion of a noncrossing spanning tree in the geometric complement of a spanning tree has been obtained.

УДК 612.172.4

М. В. ВОЙТИКОВА, А. П. ВОЙТОВИЧ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРЕДСЕРДНЫХ АРИТМИЙ ПРИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗЕ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАММЫ

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 25.09.2009)

Введение. Две опасные предсердные аритмии – фибрилляция предсердий (ФП) и флаттер предсердий (ФлП), называемый еще трепетанием предсердий – имеют различные механизмы образования. Для первого заболевания характерны множественные очаги образования хаотических волн возбуждения в ткани предсердия, для второго – образование замкнутого круга возбуждения (так называемое «re-entry»). В связи с этим актуальна задача автоматического определения эпизодов ФП, ФлП и синусового (нормального) ритма в ЭКГ пациента, поскольку указанные аритмии требуют различного лечения. Как правило, ФП требует кардиоверсии (кардиостимуляция электрошоком), в то время как флаттер предсердий лечится с применением радиочастотной абляции [1].

Для исключения риска неоправданного применения электрокардиостимуляции требуется надежный метод дискриминации ФП/ФлП для разделения пациентов по типу заболевания предсердных аритмий. Метод должен учитывать нестационарность сигнала ЭКГ, поскольку эпизоды синусового ритма, ФП и ФлП (рис. 1) могут перемежаться и их длительность может составлять несколько секунд. Традиционные методы дискриминации ФП/ФлП используют характерный признак ФлП в ЭКГ пациента, при котором наблюдается более регулярный и менее сложный ритм, чем при ФП. Как правило, эти методы используют несколько статистических параметров variability ритма сердца (BPC) для измерения сложности и регулярности ритма сердца при предсердных аритмиях [1]. Например, при ФП последовательность *RR*-интервалов (временные промежутки между последовательными *R*-волнами в ЭКГ пациента, рис. 1) имеет большее стандартное отклонение и меньшую корреляцию, чем при нормальном ритме, поэтому значения стандартного отклонения, автокорреляционной функции и гистограмму *RR*-интервалов используют для идентификации ФП. Однако для определения отличий ФП от других видов аритмий указанных выше параметров недостаточно.

В клинической практике BPC широко используется в качестве метода оценки функционального состояния пациента и прогнозирования течения болезни. Однако значимость такого метода может быть невелика, поскольку метод не подразумевает определение параметров BPC для ЭКГ, в которой перемежаются короткие эпизоды пароксизма ФП, ФлП и синусового ритма. Общеизвестно, что метод анализа BPC дает значительные погрешности при оценке функционального состояния пациента, особенно находящегося в экстремальной ситуации, если длительность ряда *RR*-интервалов не превышает 100 измерений (т. е. менее 1–1,5 мин) [1].

В настоящее время используются статистический (временной) и спектральный (частотный) анализы BPC. К параметрам временного анализа относятся: средняя продолжительность *RR*-интервала, его стандартное отклонение (SDNN, мс), стандартное отклонение средних значений *RR*-интервалов за все 5-минутные фрагменты (SDANN, мс), процент последовательных интервалов, различающихся более чем на 50 мс (pNN50), корень квадратный из средней суммы квадратов разницы между соседними *RR*-интервалами (r-MSSD). Частотный анализ позволяет определить максимальную общую мощность спектра, спектральные мощности высокочастотного (HF), низкочастотного (LF) и ультранизкочастотного (VLF) компонентов (0,15–0,35 Гц, 0,05–0,15 Гц и 0,004–0,05 Гц соответственно), и соотношение LF/HF [1, 2].

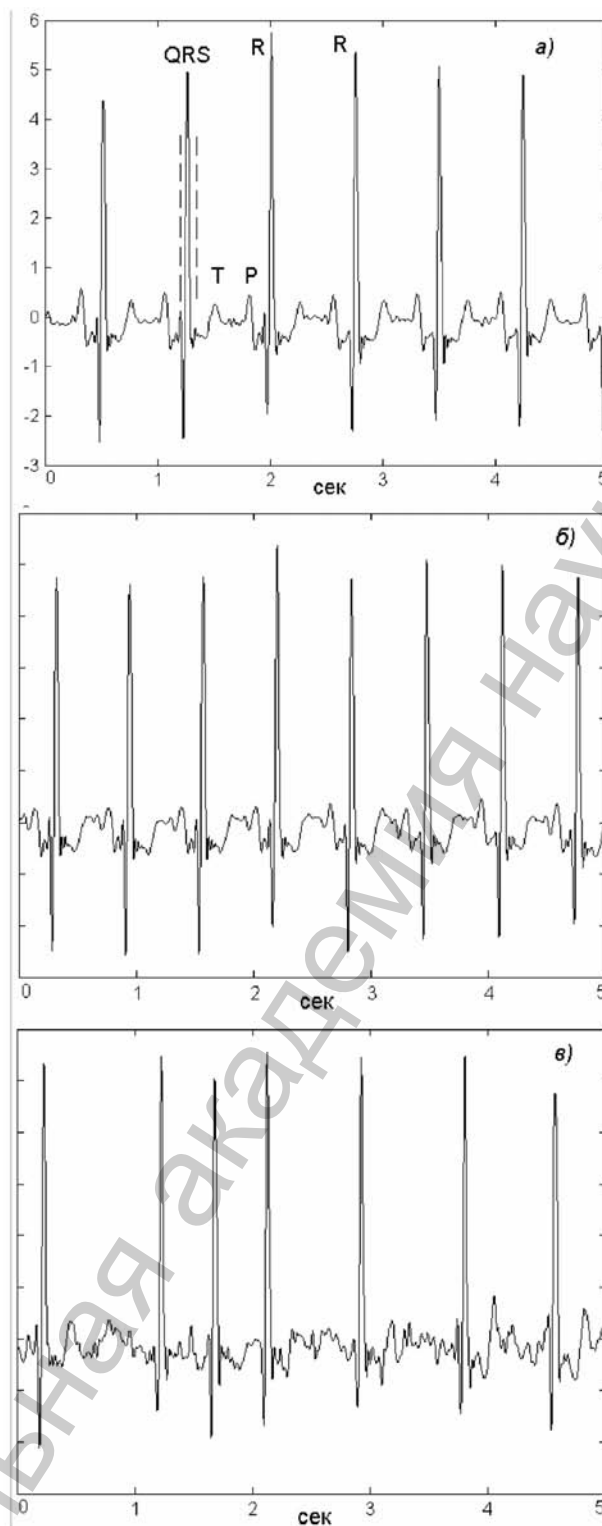


Рис. 1. Пример ЭКГ (образец 08215 [7]) с эпизодами нормального ритма (а), флаттера предсердий (б) и фибрилляции предсердий (в)

В настоящее время успешно используется два метода дискриминации ФП и ФлП при анализе ЭКГ. Первый основан на признаках спектра остаточного сигнала, который получается путем удаления из сигнала ЭКГ части, ассоциированной с активностью желудочков сердца [3] (как правило, из каждого кардиоцикла удаляется усредненный QRST-комплекс [3, 4] или зануляются

вейвлет-коэффициенты в положении QRS-комплекса [5]). Остаточный сигнал отражает электрическую активность предсердий, поэтому значение доминантной частоты спектра и его уширение имеют диагностическую ценность для диагностики типа аритмии. Однако указанная процедура удаления усредненного QRS-комплекса не имеет смысла, если у пациента наблюдается тахикардия (т. е. частота сердечных сокращений более 100 уд./мин, рис. 1, б, в). В этом случае P -волна, ассоциированная с активностью предсердий, оказывается закрытой T -волной, и диагностическая информация спектра остаточного сигнала утрачивается (см. рис. 1, б, в). Вторым способом получения сигнала активности предсердий [6] состоит в применении метода слепого разделения источников к многоканальным данным ЭКГ. Диагностическую информацию о типе аритмии пациента, как сказано выше, несут параметры спектра сигнала активности предсердий. Однако этот способ не эффективен, если сигнал ЭКГ является сильно нестационарным, кроме того, применение метода слепого разделения источников невозможно при обработке ЭКГ, полученных от малого числа электродов (2-электродных ЭКГ при холтеровском мониторинге, например).

В настоящей работе мы предлагаем способ дискриминации предсердных аритмий, основанный на применении вейвлет-преобразования (ВП) 1–2-электродных ЭКГ, в которых из-за нестационарности сигнала ЭКГ и тахикардии пациента невозможно традиционными способами определение сигнала предсердий и спектральных диагностических признаков аритмии.

Предлагается также альтернативный параметр регулярности кардиоритма, полученный на основе вейвлет-анализа RR -интервалов и распределения энергии вейвлет-коэффициентов ЭКГ. В работе использовались медицинские записи RR -интервалов, полученные из базы данных [7], представляющие собой записи ЭКГ пациентов с эпизодами пароксизма ФП, ФлП и синусового ритма и РНПЦ «Кардиология», база данных ЭКГ, г. Минск [8]. Для проверки эффективности применяемой методики обработке подвергались также ряды RR -интервалов здоровых пациентов [7]. Обработываемые последовательности RR -интервалов анализируются при помощи непрерывного ВП на основе вейвлета Хаара (имеющего наилучшее временное разрешение из всего семейства функций вейвлетов) и ортогонального вейвлета Добеши (db8) [9, 10], которые использовались из расчета адекватной передачи локальных особенностей сигнала ЭКГ.

Вейвлеты – это математические функции, дающие как временное, так и частотное представление сигнала. Вейвлет-преобразование было разработано как альтернатива преобразованию Фурье для исследования временных рядов с выраженной неоднородностью, поскольку обладает подвижным настраиваемым по ширине частотно-временным окном, адекватно передающим низко- и высокочастотные составляющие сигнала. Последовательность RR -интервалов представляется суперпозицией масштабных преобразований и сдвигов базисного вейвлета с коэффициентами, зависящими от двух переменных: масштаба и времени [9, 10].

1. Метод определения различий ФП/ФлП при анализе variability ритма сердца. Временной ряд между двумя последовательными R -волнами (RR -интервалы) хорошо отражает особенности аритмических заболеваний. Поэтому клиническая диагностика ФП часто проводится визуально определением anomalно коротких и длинных RR -интервалов. В частности, предельное соотношение длительности последовательных длинных-коротких RR -интервалов, равное 2, оценивается как состояние риска ФП [11].

Алгоритмы выделения RR -интервалов из сигнала ЭКГ часто основаны на определении производной сигнала ЭКГ, его амплитуды, кривизны отдельных участков и т. п. В настоящей работе выделение RR -интервалов проводится при помощи ВП сигнала ЭКГ, когда положение R -волны во времени фиксируется в точке пересечения с осью абсцисс коэффициентов ВП. Последовательности RR -интервалов длиной 20–30 измерений выделялись из 20 сек ЭКГ пациентов с заболеванием ФП и/или ФлП, а также из эпизодов синусового (нормального) ритма.

В результате непрерывного вейвлет-преобразования RR -интервалов мы имеем компактное представление сигнала в виде набора вейвлет-коэффициентов, которые адекватно передают все частотно-временные особенности последовательности RR -интервалов. Параметр масштаба a для вейвлета Хаара выбирался в пределах значений 6–54, что достаточно для сохранения необходимой для классификации информации.

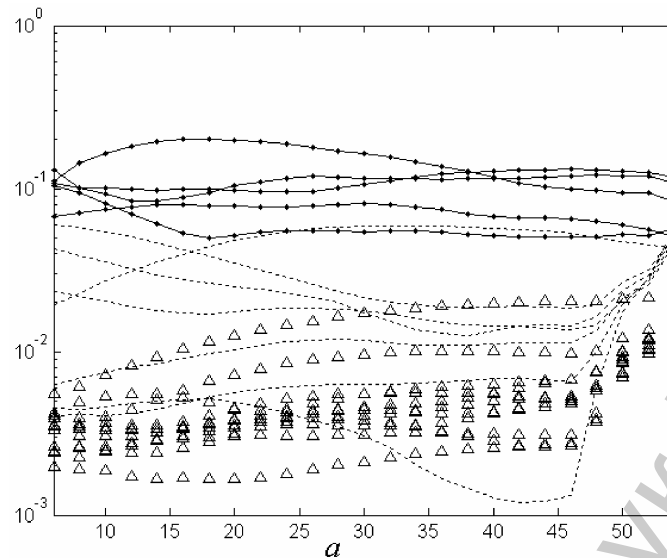


Рис. 2. Зависимость $\sigma(a)$ ВРС как маркер приступа фибрилляции предсердий и флаттера предсердий (дифференциация сигналов осуществляется для значений $a = 20\text{--}40$). Представлен образец ЭКГ пациента 08378 [7], нормальному ритму соответствуют пунктирные кривые, тому же пациенту в период приступа фибрилляции предсердий – сплошные с точками, в период приступа флаттера предсердий – треугольники

В результате непрерывного ВП сигнала определялся набор вейвлет-коэффициентов $C(a, b)$ и стандартное отклонение модуля коэффициентов непрерывного ВП $\sigma(a)$ как функция параметра масштаба a (рис. 2). Нами было получено, что зависимость $\sigma(a)$ является чувствительным параметром, по которому можно проводить идентификацию ритма сердца. В частности, наилучшая дифференциация сигналов при ФП и ФлП осуществляется для значений $a = 20\text{--}40$, когда для эпизодов ФП характерно более чем 10-кратное увеличение $\sigma(a)$. Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом: перед приступом ФП происходит реорганизация сердечного ритма, что заметно по изменению корреляция удаленных во времени RR -интервалов по сравнению со стабильным состоянием пациента, поскольку в данной задаче параметр a соответствует номеру соседних интервалов. Так, при использовании данного диагностического критерия правильная диагностика ФП и ФлП была проведена для всех образцов базы данных [7], где наблюдались эпизоды ФП и типичного (т. е. регулярного) ФлП.

Однако, для обработки нестационарных сигналов ЭКГ, в которых перемежаются эпизоды ФП, ФлП и регулярного ритма, потребуется применение методов, пригодных для анализа коротких и нестационарных сигналов.

2. Одномерное стационарное вейвлет-преобразование ЭКГ сигнала означает процедуру многоуровневого стационарного разложения ЭКГ сигнала, заданного вектором $x(t)$, по базису выбранного вейвлета (в настоящей работе – ортогонального вейвлета Добеши (db8 [10])). Максимальный возможный уровень разложения n определяется длиной ЭКГ сигнала: $2^n = \text{length}(x)$. Результаты разложения могут быть представлены в виде матрицы коэффициентов разложения $C_j(k)$, где индекс $j = 1, 2, \dots, n$ указывает уровень декомпозиции, а индекс k – временной параметр. Первые n строк матрицы коэффициентов разложения содержат коэффициенты детализации уровней, тогда как последняя строка – коэффициенты аппроксимации уровня n . Преимущество стационарного вейвлет-преобразования в сравнении с обычным дискретным состоит в том, что коэффициенты разложения для всех уровней имеют ту же длину, что и исходный сигнал ЭКГ (т. е. не производится децимация коэффициентов). Длина ЭКГ сигнала может быть отрегулирована, во-первых, частотой его дискретизации, во-вторых, длительностью отрезка времени измерения. Таким образом, в настоящей работе для 8-уровневого стационарного вейвлет-преобразования использовались 10–40 с измерения ЭКГ (база данных ЭКГ [7] и РНПЦ «Кардиология» [8]), с частотой дискретизации 820 Гц и предварительным удалением дрейфа сигнала.

Определим энергию вейвлет-преобразования [12]:

$$E_j(k) = \frac{1}{N_{jk}} \sum \|C_j(k)\|^2, \quad (1)$$

где $E_j(k)$ – средняя энергия, k – интервал времени, j – уровень разложения, N_{jk} – число коэффициентов ВП, приходящихся на k -интервал, одинаковое для всех уровней j в случае использования стационарного вейвлет-преобразования. Критерием, определяющим перераспределение энергии по уровням декомпозиции, можно считать относительную энергию ВП:

$$P_j(k) = \frac{E_j(k)}{E_0(k)}, \quad \text{где } E_0(k) = \sum_j E_j(k). \quad (2)$$

На основании вейвлет-коэффициентов определим энтропию ВП, аналогичную информационной энтропии Шеннона, которая также является критерием порядка (беспорядка) сигнала ЭКГ и изменяющуюся с течением времени: $S(k) = -\sum_j P_j(k) \ln(P_j(k))$. В отличие от спектральной

энтропии, основанной на спектре Фурье и являющейся мерой уширения спектра, энтропия ВП и относительная энергия ВП являются функциями времени, поэтому пригодны для описания коротких фрагментов ЭКГ. Пример распределения энергии ВП сигнала, состоящего из 2 равных частей – синусоиды с частотой 8 Гц и белого шума, приведен на рис. 3. Очевидно, что распределение энергии ВП для синусоидального сигнала будет значительно отличаться для сигнала, генерируемого детерминированными хаотическими системами или белым шумом. Центральная частота вейвлета Добеши (db8) при частоте дискретизации сигнала 820 Гц и для уровней разложения $j = 1-8$ равна соответственно: 273,3, 136,6, 68,3, 34,2, 17,1, 8,5, 4,3 и 2,1 Гц. Данный пример показывает, что для синусоиды с частотой 8 Гц основная энергия ВП приходится на уровни разложения $j = 6-7$ (8,5–4,3 Гц соответственно), в то время как для белого шума имеет место равномерное распределение энергии по всем уровням. Частота гармонического сигнала может быть определена через весовые коэффициенты ВП и центральные частоты вейвлета, которая при учете 3 уровней разложения $j = 6-8$ составляет 7,988 Гц.

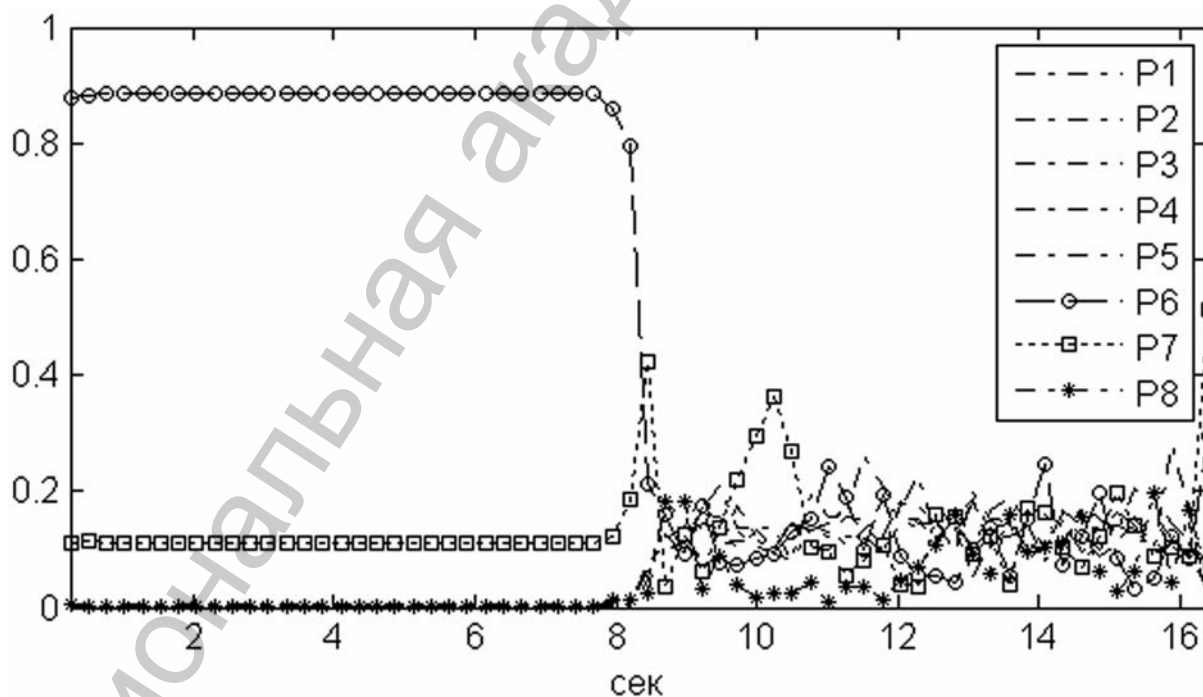


Рис. 3. Распределение энергии ВП сигнала, состоящего из 2 равных частей – синусоиды с частотой 8 Гц и белого шума

Для всех образцов ЭКГ была определена энергия вейвлет-преобразования в скользящем неперекрывающемся временном окне с шириной, равной значению текущего RR -интервала (оценивалось перераспределение энергии по уровням декомпозиции внутри такого интервала). При этом для анализа удобно использовать стационарное вейвлет-преобразование сигнала ЭКГ, при котором для всех уровней разложения длина рядов вейвлет-коэффициентов одинакова и совпадает с длиной анализируемого сигнала. Формулы (1) и (2) для средней энергии по заданному интервалу времени и относительной энергии ВП мы обобщили для усреднения в переменном временном окне с шириной, равной значению текущего RR -интервала. Величина энергии, приходящейся на уровни декомпозиции $j = 1-4$, (т. е. частотная составляющая сигнала в полосе 273–34 Гц), является критерием уровня шума и/или наличия артефактов в ЭКГ (мышечных сокращений и пр.), поэтому участки ЭКГ, где значения $P_1-P_4 > 0,005$ из анализа удаляются (пример на рис. 4, а, пациент 203, отсчеты 00096–14496 [7]). Диагностическую ценность имеют распределения энергии ВП P_6, P_7 и P_8 по уровням декомпозиции $j = 6-8$ с центральными частотами вейвлета Добеши db8, соответственно 8,5, 4,3 и 2,1 Гц. Выбор этих уровней декомпозиции объясняется тем, что в результате реорганизации сердечного ритма, вызванного приступом ФП или ФлП, происходит изменение амплитуд частотных составляющих сигнала в полосе частот 4–8 Гц, ассоциированного с проводимостью предсердий. На рис. 4, б приведено распределение RR -интервалов, образец ЭКГ пациента с изменением ритма сердца (пациент 04908, отсчеты 3572785–3582785 [7]), и распределение энергии ВП по уровням декомпозиции $j = 5-8$, усредненное в границах текущего кардиоцикла. При фибрилляции предсердий распределение энергии ВП по уровням колебаний с большим стандартным отклонением свидетельствует о том, что данный отрезок ЭКГ является некоррелированным и близок к стохастическим сигналам (вторая половина сигнала на рис. 3). Другими словами, при ФП наблюдается сильное уширение спектра ЭКГ из-за хаотичности возникающих в предсердиях волн возбуждения (1–15 с, рис. 4, б и 5, б), а при ФлП – сужение спектра из-за образования волны «re-entry» (25–40 с, рис. 4, б). Уровни, на которые приходится максимум энергии P , прямо соотносятся с доминантной частотой возбуждения, которая охватывает предсердия. Например, частота гармонической составляющей сигнала ЭКГ (25–39 с) на рис. 4, б определяется через средние весовые коэффициенты ВП и центральные частоты вейвлета. Так, при учете трех уровней разложения $j = 6-8$ частота гармонической составляющей равна 3,374 Гц.

Выбранный 40-секундный образец ЭКГ на рис. 5, а (пациент 08215, отсчеты 10000–20000 [7]) характеризуется как нормальный синусовый ритм; в этом эпизоде можно видеть интервалы, где энергия ВП ЭКГ распределена достаточно равномерно по уровням декомпозиции. Измене-

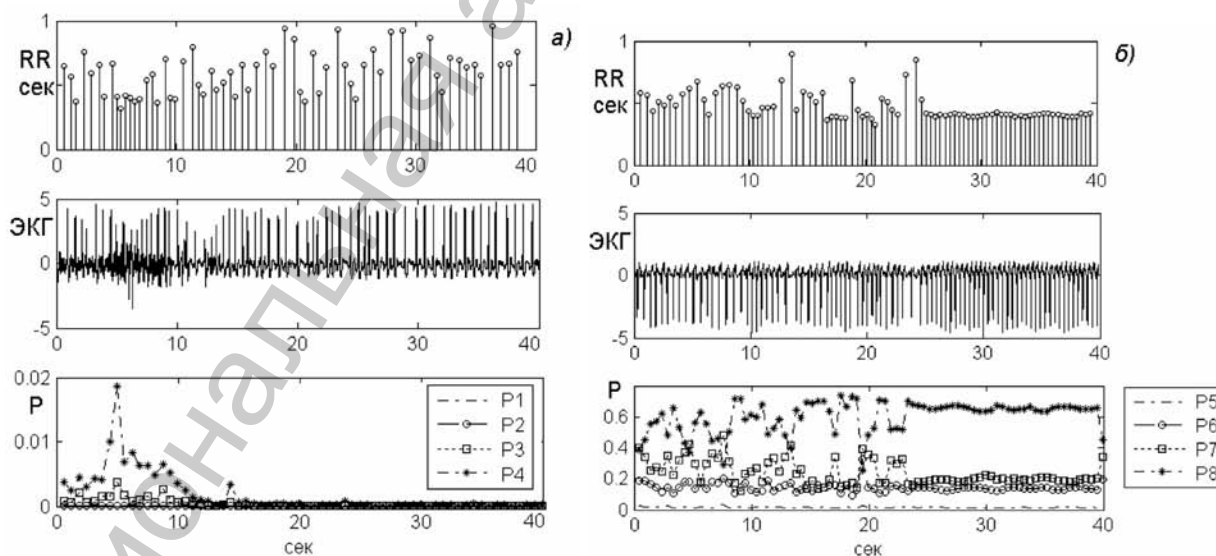


Рис. 4. Образец последовательности RR -интервалов сигнала ЭКГ, содержащего шум и распределение энергии ВП по уровням декомпозиции $j = 1-4$ (а) и $j = 5-8$ (б)

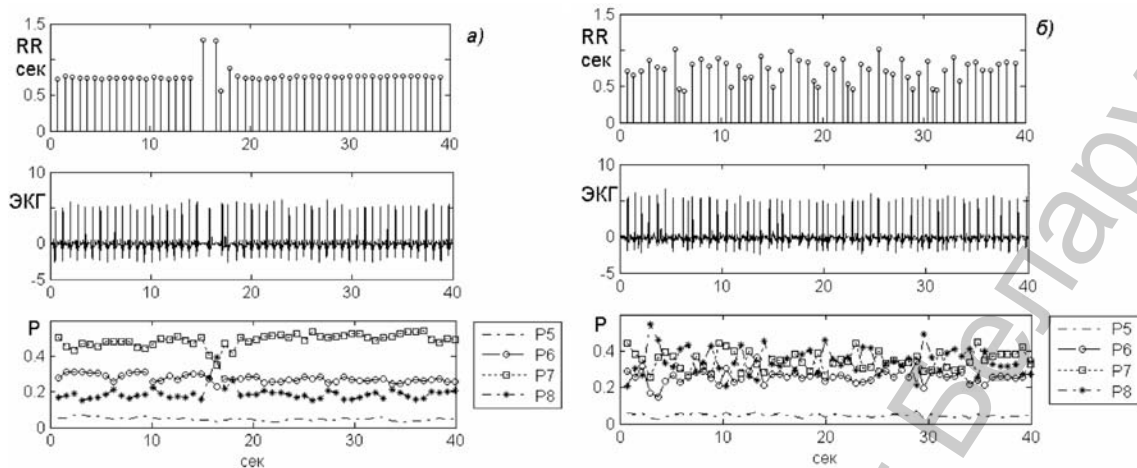


Рис. 5. Образец последовательности RR -интервалов ЭКГ и относительная энергия ВП при нормальном сердечном ритме (а) и при фибрилляции предсердий (б)

ния распределения энергии ВП по времени совпадают с наблюдаемым кратковременным нарушением ритма (15–20 с). Таким образом, нормальный синусовый ритм сердца характеризует четкое равномерное распределение энергии ВП по уровням декомпозиции с малым стандартным отклонением, что делает его похожим на тестовый гармонический сигнал, приведенный на рис. 3.

Следует отметить, что величина энергии ВП, приходящейся на уровень $j = 8$, определяется выбором электрода, с которого записывается ЭКГ (сигнал с различных электродов отличается амплитудой и латентностью основных волн). В качестве параметра дифференциации сигналов ЭКГ, принадлежащих трем категориям – нормальный ритм, ФП и ФлП, предлагается использовать инвариантный (не зависящий от выбора электрода) индекс регулярности ритма для отношения энергии ВП уровней декомпозиции 8–6: $X_1 = P_7/P_8$ и $X_2 = P_6/P_8$, которые определяют амплитуды частотных составляющих сигнала в значимых для диагностики частотных областях. Инвариантный индекс регулярности сигнала определим как $Q_i = X_i / \Delta X_i$, $i = 1, 2$, где ΔX_i – стандартное отклонение. Для фибрилляции предсердий значения Q_1 и/или Q_2 не превышают порогового значения, равного 4,5, а при флаттере предсердий и при нормальном сердечном ритме величины Q_1 и/или Q_2 выше порога. В таблице приведены значения индексов Q_1 и Q_2 распределения энергии ВП различных пациентов с различными ритмами из баз данных [7] (длина образцов ЭКГ 10–40 с) и [8] (длина образцов ЭКГ 10 с).

Пациент	Ритм – число образцов	Частота сердечных сокр./мин	Q_1	Q_2
04043 [7]	Син – 4	106,5±0,57	13,09±3,11	8,03±2,02
	ФП – 4	112,25±9,53	2,33±0,55	1,69±0,34
04908 [7]	Син – 6	93,33±3,32	20,939±11,377	11,602±4,55
	ФП – 6	111,67±7,91	2,08±0,33	1,03±0,207
06426 [7]	Син – 5	70,4±6,73	6,35±2,09	7,91±5,72
	ФП – 4	89,5±10,47	3,88±0,86	2,33±0,26
	ФлП – 1	127	4,67	6,26
06995 [7]	Син – 4	78±1,41	6,84±0,65	2,20±0,43
	ФП – 5	89,2±1,48	4,00±0,53	2,20±0,31
07162 [7]	ФП – 6	71,66± 2,58	2,41±0,56	1,42±0,39
08215 [7]	Син – 5	79,8±1,09	10,24±1,19	7,05±0,71
	ФП – 5	79,4±3,57	5,51±1,40	2,98±0,80
	ФлП – 1	92	7,96	5,59
08378 [7]	Син – 5	69,2±1,30	17,26±5,07	14,80±11,51
	ФП – 6	88,83±8,88	4,66±0,73	1,94±0,24
	ФлП – 11	136,55±2,80	8,10±3,83	13,16±10,88

Пациент	Ритм – число образцов	Частота сердечных сокр./мин	Q_1	Q_2
0001 [8]	ФП – 1	159	3,66	1,17
0002 [8]	ФП – 1	154	3,58	1,16
0003 [8]	ФлП – 1	81	6,88	3,54
0004 [8]	ФлП – 1	67	16,54	3,68
0005 [8]	ФлП – 1	128	5,61	0,55
0006 [8]	ФП – 1	98	3,79	1,63
0007 [8]	ФП – 1	89	6,57	2,05
0008 [8]	ФП – 1	86	3,82	2,03
0009 [8]	ФП – 1	100	3,24	1,67
0020 [8]	Син – 1	59	24,97	15,10
	ФлП – 1	109	4,44	1,06
0021 [8]	ФлП – 1	83	6,35	4,90
0022 [8]	ФП – 1	131	2,92	1,80

Заключение. Автоматическое определение особенностей предсердных аритмий, в частности, дискриминация фибрилляции и флаттера предсердий, является важной задачей для клинической практики. Использование для прогноза традиционных методов статистического и спектрального анализа имеет ряд существенных ограничений, обусловленных нестационарностью изучаемых сигналов, когда часть информации оказывается потерянной.

Авторами настоящей работы предложен достаточно простой и эффективный способ дискриминации предсердных аритмий ФП и ФлП у больных на основе вейвлет-анализа ВРС и ЭКГ. Метод является альтернативой методам дискриминации ФП и ФлП при анализе ЭКГ, основанных на признаках спектра остаточного сигнала (электрической активности предсердий), выделенного при помощи удаления QRST-комплекса из ЭКГ или применения слепого разделения источников для многоэлектродных записей ЭКГ. Предложенный способ дискриминации предсердных аритмий основан на применении вейвлет-преобразовании 1–2-электродных ЭКГ, в которых из-за нестационарности сигнала ЭКГ и тахикардии пациента невозможно определение спектральных диагностических признаков аритмии традиционными методами.

В качестве диагностического критерия предлагается использовать распределение энергии ВП сигнала ЭКГ по уровням декомпозиции. Использовалось 8-уровневое разложение сигналов ЭКГ с помощью ортогонального вейвлета Добеши. Пароксизм ФлП у пациентов отличается равномерным распределением энергии ВП по уровням декомпозиции 6–8. Выбор уровней декомпозиции обусловлен полосой частот 4–8 Гц, ассоциированной с электрической проводимостью предсердий. Распределение энергии ВП усредняется в границах текущего кардиоцикла, что дает возможность локализовать во времени момент изменения ритма пациента. Уровни, на которые приходится максимум энергии P , прямо соотносятся с доминантной частотой возбуждения при образовании волны «re-entry» в предсердиях. Частота такой волны определяется через средние весовые коэффициенты ВП и центральные частоты анализирующего вейвлета.

Предлагается также альтернативный параметр регулярности кардиоритма, полученный на основе вейвлет-анализа RR -интервалов. В результате ВП RR -интервалов определялся набор вейвлет коэффициентов и стандартное отклонение модуля коэффициентов ВП как функция параметра масштаба. Показано, что эта зависимость является чувствительным параметром, по которому можно проводить идентификацию ритма сердца. В частности, наилучшая дифференциация сигналов при ФП и ФлП осуществляется для значений параметра масштаба $a = 20–40$, когда для эпизодов ФП характерно более чем 10-кратное увеличение $\sigma(a)$. Полученные результаты можно интерпретировать как реорганизация сердечного ритма, что заметно по изменению корреляции удаленных во времени RR -интервалов по сравнению со стабильным состоянием пациента, поскольку в данной задаче параметр a соответствует номеру соседних интервалов.

Развитый метод тестировался на 92 различных образцах ЭКГ [7] и [8] (синусовый ритм – 30, ФП – 44, ФлП – 18) и показал правильные результаты диагностики для 85 образцов.

Литература

1. Рябыкина Г. В., Соболев А. В. // Вариабельность ритма сердца. М., 2001.
2. Heart rate variability. Standards of measurement, physiological interpretation and clinical use. Task force of the European society of cardiology and the North American society of pacing and electrophysiology. // Eur. Heart J. 1996. Vol. 17. P. 354–381.
3. Cantini F., Conforti F., Varanini M., Chiarugi F. // Computers in Cardiology. 2004. Vol. 31. P. 665–668.
4. Lemay M., Vesin J. M. // Computers in Cardiology. 2006. Vol. 33. P. 561–564.
5. Войтикова М. В., Войтович А. П. // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2006. № 1. С. 94–99.
6. Langley P., Rieta J. J., Stridh M. et al. // Computers in Cardiology. 2003. Vol. 30. P. 129–132.
7. Massachusetts Institute of Technology, MIT-BIH ECG database, Physionet Bank.
8. РНПЦ «Кардиология», база данных ЭКГ, г. Минск.
9. Добеши И. // Десять лекций по вейвлетам. М.; Ижевск, 2001.
10. Дьяконов В., Абраменкова И. // MATLAB. Обработка сигналов и изображений. СПб., 2002.
11. Hnatkova K., Waktare J., Murgatroyd F. et al. // Am. Heart J. 1998. Vol. 135. P. 1010–1019.
12. Rosso O. A., Martin M. T., Figliola A. // Journal of Neuroscience Methods. 2006. Vol. 153. P. 163–182.

M. V. VOITKOVA, A. P. VOITOVICH

ATRIAL ARRHYTHMIA IDENTIFICATION BY MEANS OF THE WAVELET ANALYSIS OF AN ELECTROCARDIOGRAM

Summary

Automated discrimination between atrial fibrillation (AF), atrial flutter (AFL) and sinus (normal) rhythm by means of stationary wavelet transform (WT) of the 2-leads ECG was developed. The distribution of the 8-level WT energy of the ECG is used as diagnostic discriminator to determine several atrial activity patterns. Standard deviations (SD) of the wavelet coefficients from coarse scales (scale 6–8) were calculated. For AF, unlike AFL, a uniform distribution of WT energy in all levels of decomposition is observed. SD at coarse scales was higher for AF than for AFL. SD at scale 6–8 discriminated between AF from AFL with 93% sensitivity and specificity.

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 530.1; 535.3

А. М. ГОНЧАРЕНКО

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В ПОГЛОЩАЮЩЕМ СЕЛФОКЕ

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 30.10.2009)

Распространение световых импульсов и эффекты самофокусировки в оптических неоднородных волокнах с керровской нелинейностью по-прежнему привлекают внимание исследователей (см., напр., [1]). Однако при этом, как правило, не учитывается поглощение, которое хотя и не большое, но присутствует в оптических линиях передачи и обработки информации. Обусловлено это значительным усложнением теории распространения солитонов в поглощающих средах (даже в случае прозрачных сред). В данном кратком сообщении предпринята попытка приближенно учесть влияние поглощения на распространение световых импульсов в оптических нелинейных волокнах. В качестве модели формы солитона используем функции Гаусса [2]. Для простоты рассмотрения ограничимся случаем одномерных солитонов.

Огибающая функция электрического поля солитонов в поглощающих средах описывается следующим уравнением

$$2\tilde{k} \frac{\partial E}{\partial z} + i \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + 2i\tilde{k}\beta_0 |E|^2 E + i\Delta\tilde{k}^2 E = 0. \quad (1)$$

Здесь $\tilde{k} = k + i\alpha$ – комплексная постоянная распространения, α – коэффициент поглощения, β_0 – параметр нелинейности, $\Delta\tilde{k}^2$ – добавка к постоянной распространения из-за неоднородности среды. Вещественная часть постоянной распространения $k = k_0 n$, где n – показатель преломления. При этом

$$n = n_0 - \beta_2 \frac{x^2}{x_1^2}, \quad (2)$$

где β_2 – параметр, а x_1 – масштаб неоднородности,

$$k = k_0 \left(1 - \beta_2 \frac{x^2}{x_1^2} \right), \quad (3)$$

$$\tilde{k} = k_0 \left(1 - \beta_2 \frac{x^2}{x_1^2} \right) + i\alpha, \quad (4)$$

$$\tilde{k}_0 = k_0 + i\alpha, \quad (5)$$

$$\Delta\tilde{k}^2 = \tilde{k}^2 - \tilde{k}_0^2 = -2k_0^2\beta_2 \frac{x^2}{x_1^2} \left(1 + \frac{\alpha}{k_0} \right). \quad (6)$$

Учитывая малость поглощения вместо (6) приближенно имеем

$$\Delta \tilde{k}^2 = -2k_0^2 \beta_2 \frac{x^2}{x_1^2}. \quad (7)$$

Предполагаем, что слабое поглощение не влияет на неоднородность волновода. Будем искать решение уравнения (1) в виде $E = A_0 \psi$, где ψ – следующая функция Гаусса

$$\psi = \exp\left(i\gamma_1 - \gamma_2 - \frac{x^2}{a_1^2} + i\frac{x^2}{a_2^2}\right). \quad (8)$$

В данном волноводном случае функция поля солитона в поперечной плоскости остается неизменной, тогда как в однородной среде необходимо учитывать расширение соответствующей функции с уменьшением энергии солитонов. Приближенно имеем

$$|\psi|^2 = 1 - 2\gamma_2 2\frac{x^2}{x_1^2}. \quad (9)$$

С учетом соотношений (7), (9) уравнение (1) перепишем в виде

$$2\tilde{k} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2\tilde{k}\beta_1 \left(1 - 2\gamma_2 - 2\frac{x^2}{a_1^2}\right) \psi + 2k_0^2 \beta_2 \frac{x^2}{x_1^2} \psi = 0. \quad (10)$$

Здесь $\beta_1 = \beta_0 A_0^2$. Подставляя в это уравнение соотношения (4), (7), (8), получаем

$$\begin{aligned} & \left(ik_0 - ik_0\beta_2 \frac{x^2}{x_1^2}\right)(i\gamma_1' - \gamma_2') + \frac{1}{a_1^2} - i\frac{1}{a_2^2} - 2\frac{x^2}{a_1^4} + 2\frac{x^2}{a_2^2} + 4i\frac{x^2}{a_1^2 a_2^2} + \\ & k_0^2 \beta_1 \frac{x^2}{x_1^2} - \left(k_0 - k_0\beta_2 \frac{x^2}{x_1^2} + i\alpha\right) \beta_1 \left(1 - 2\gamma_2 - 2\frac{x^2}{a_1^2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь штрих означает производную по z . Из уравнения (11) с учетом малости величин $\frac{x^2}{a_1^2}$, γ_2 , $\beta_2 \frac{x^2}{x_1^2}$, $\frac{\alpha}{k_0}$ и пренебрегая их квадратами и произведениями, окончательно получаем следующую систему уравнений:

$$k_0\gamma_1' - \alpha\gamma_2' - \frac{1}{a_1^2} + k_0\beta_1 - 2k_0\beta_1\gamma_2 = 0, \quad (12)$$

$$\alpha\gamma_1' + k_0\gamma_2' + \frac{1}{a_2^2} + \alpha\beta_1 - 2\alpha\beta_1\gamma_2 = 0, \quad (13)$$

$$k_0\gamma_1'' \frac{\beta_2}{x_1^2} - \frac{2}{a_1^4} + \frac{2}{a_2^4} + \frac{2k_0\beta_1}{a_1^2} + \frac{k_0\beta_2\beta_1}{x_1^2} + \frac{k_0^2\beta_2}{x_1^2} = 0, \quad (14)$$

$$\frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{2}\alpha\beta_1 = 0. \quad (15)$$

При этом из (14) с учетом (15) находим

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{k_0\beta_1}{2} + \frac{k_0\beta_1}{2} \left(1 + 2\frac{\beta_2}{k_0 x_1^2 \beta_1} + 2\frac{\beta_2}{x_1^2 \beta_1^2} + \frac{\alpha^2}{k_0^2}\right)^{1/2}, \quad (16)$$

или приближенно

$$\frac{1}{a_1^2} = k_0\beta_1 + \frac{1}{2}\frac{\beta_2}{x_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\beta_2 k_0}{x_1^2 \beta_1}. \quad (17)$$

Из уравнений (12) и (13) с учетом (15), (17) и граничных условий $\gamma_1, \gamma_2 = 0$ при $z = 0$ приближенно получаем

$$\gamma_1 = -\frac{\alpha\beta_1^2}{2k_0} z^2, \quad (17)$$

$$\gamma_2 = -\frac{\alpha\beta_1}{2k_0} z. \quad (18)$$

В результате электрическое поле солитона в поглощающей среде представляется в виде

$$E = A_0 \exp \left[ik_0 z - \alpha z - i \frac{\alpha\beta_1^2}{2k_0} z^2 + \frac{\alpha\beta_1}{2k_0} z - i \frac{\alpha\beta_1}{2} x^2 - x^2 \left(k_0\beta_1 + \frac{\beta_2 k_0}{2x_1^2\beta_1} + \frac{\beta_2}{2x_1^2} \right) \right]. \quad (19)$$

Коэффициент затухания солитона определяется выражением

$$\alpha z - \frac{\alpha\beta_1}{2k_0} z + x^2 \left(k_0\beta_1 + \frac{\beta_2}{2x_1^2} + \frac{\beta_2 k_0}{2x_1^2\beta_1} \right) \quad (20)$$

и по сравнению с однородной средой он быстрее возрастает в поперечной плоскости. Следовательно, солитон несколько медленнее затухает в продольном направлении за счет усиления, а его поле в поперечной плоскости быстрее спадает по сравнению с однородной средой. Уравнение фазовой поверхности имеет вид

$$k_0 z - \frac{\alpha\beta_1^2}{2k_0} z^2 = \frac{\alpha\beta_1}{2} x^2,$$

и при небольших z получаем

$$k_0 z = \frac{\alpha\beta_1}{2} x^2.$$

Это уравнение параболы, и оно совпадает с соответствующим уравнением работы [3] для однородной среды.

Литература

1. Lonh I. S. and Janner D. // J. Opt. B. 2004. Vol. 6. P. 303–308.
2. Гончаренко А. М. Гауссовы пучки света. М., 2005.
3. Гончаренко А. М. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз-мат. навук. 2009. № 3. С. 90–92.

A. M. GONCHARENKO

PROPAGATION OF OPTICAL SOLITONS IN ABSORBING SELFOC

Summary

It is considered some properties of the optical solitons in the absorbed waveguide.

ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

НИКОЛАЙ АЛЕКСЕЕВИЧ ИЗОБОВ

(К 70-летию со дня рождения)

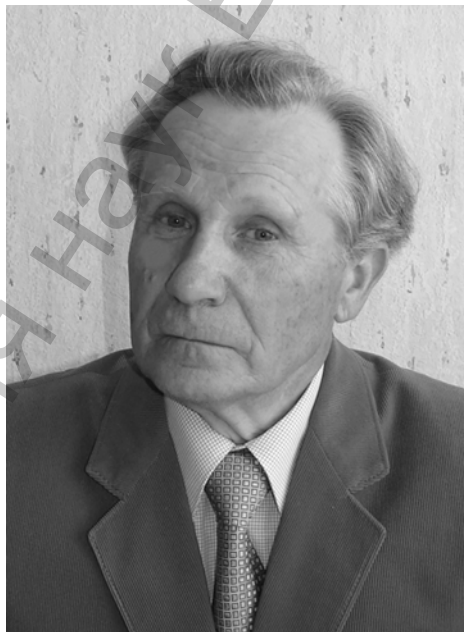
23 января 2010 г. исполнилось 70 лет академику НАН Беларуси профессору доктору физико-математических наук лауреату Государственной премии Республики Беларусь Николаю Алексеевичу Изобову.

Н. А. Изобов родился в деревне Красыни Лиозненского района Витебской области. В 1958 г. с золотой медалью окончил Яновичскую среднюю школу, а в декабре 1965 г. – математический факультет Белорусского государственного университета со специализацией по дифференциальным уравнениям. Уже в студенческие годы за полученные результаты по исследованию строения множеств нижних показателей Перрона линейных дифференциальных систем на Всесоюзном конкурсе студенческих работ ему была присуждена медаль «За лучшую научную студенческую работу».

В 1966 г. Николай Алексеевич поступил в аспирантуру к профессору Ю. С. Богданову и в 1967 г. защитил кандидатскую диссертацию. С 1969 г. в течение 22 лет он являлся заместителем главного редактора Всесоюзного журнала «Дифференциальные уравнения», из которых первые 12 лет – штатным заместителем, оставаясь членом его редколлегии и все последующее время. После защиты в 1979 г. в Ленинградском университете докторской диссертации и избрания в 1980 г. членом-корреспондентом АН БССР работает в Институте математики НАН Беларуси старшим научным сотрудником (1980–1986), заведующим лабораторией теории устойчивости (1986–1993) и заведующим отделом дифференциальных уравнений (с 1993 г. по настоящее время). В 1994 г. избран действительным членом Академии наук Беларуси, в 1996–1999 гг. по совместительству возглавлял кафедру высшей математики БГУ.

Николай Алексеевич – известный математик, крупнейший специалист в области теории дифференциальных уравнений. Основные направления его научных исследований: теория характеристических показателей Ляпунова, теория устойчивости по линейному приближению, линейные системы Коппеля–Контти, уравнения Эмдена–Фаулера и линейные системы Пфаффа.

В последнее десятилетие им получен целый ряд существенных результатов. В теории характеристических показателей Ляпунова Н. А. Изобовым совместно с А. В. Филипцовым установлено, что максимальный нижний показатель Перрона линейной дифференциальной системы совпадает с нижним показателем Перрона ее фундаментальной системы решений. Им также получены оценки снизу характеристических показателей линейной дифференциальной системы с перроновскими возмущениями через характеристические показатели исходной системы, а совместно с С. Н. Батаном установлены аналогичные оценки в случае так называемых обобщенных перроновских возмущений. Николаем Алексеевичем доказана одновременная неустойчивость младшего и старшего экспоненциальных показателей линейных дифференциальных систем в классах линейных возмущений с равными $-\infty$ характеристическими



степенями, а также суммируемых на положительной полуоси с любым степенным весом. Вместе с тем им полностью описано взаимное расположение границы совпадения старших экспоненциального и характеристического показателей линейной дифференциальной системы, ее коэффициента неправильности Гробмана и величины нормы матрицы коэффициентов. В цикле работ Н. А. Изобова, выполненных совместно с С. А. Мазаником, доказаны интегральные признаки приводимости возмущенной линейной дифференциальной системы к исходной системе и установлена их неулучшаемость; введены понятия коэффициента приводимости и показателя приводимости линейной системы, исследована их взаимосвязь и установлены их достижимые границы через разности старшего и младшего генеральных, центральных или экспоненциальных показателей, а также величину нормы матрицы коэффициентов этой системы.

Наиболее плодотворной в последнее десятилетие была работа Николая Алексеевича по теории систем Коппеля–Конти. Н. А. Изобовым совместно с Р. А. Прохоровой полностью описано множество всех таких асимптотически устойчивых линейных дифференциальных систем Коппеля–Конти, что нулевое решение всякой нелинейной системы с линейным приближением из этого множества и любым возмущением высшего порядка малости асимптотически устойчиво. Ими же описано и множество всех неустойчивых линейных дифференциальных систем Коппеля–Конти, для которых всякое нетривиальное решение из достаточно малой окрестности начала координат аналогичной нелинейной возмущенной системы за конечное время выходит на границу этой окрестности; доказана отрицательность старшего и положительность младшего характеристических показателей соответственно асимптотически устойчивых и неустойчивых линейных систем Коппеля–Конти и получены их оценки сверху и снизу. Доказана также отрицательность характеристических показателей Ляпунова всех начинающихся в достаточно малой окрестности начала координат решений нелинейной дифференциальной системы с возмущениями высшего порядка малости и линейным асимптотически устойчивым приближением Коппеля–Конти. Через постоянную, определяемую линейным приближением Коппеля–Конти, получена оценка сверху показателей этих решений. Тем самым дано полное решение задачи Ляпунова об экспоненциальной устойчивости по рассматриваемому линейному приближению Коппеля–Конти.

Н. А. Изобовым установлена условная экспоненциальная устойчивость нулевого решения многомерной нелинейной дифференциальной системы с общим интегрально-дихотомичным линейным приближением Коппеля–Конти и кусочно-непрерывным по времени и непрерывным по фазовым переменным в некоторой окрестности начала координат нелинейным возмущением высшего порядка малости. Доказано существование k -мерного семейства экспоненциально убывающих при неограниченном возрастании времени решений указанной нелинейной системы и также получена оценка сверху характеристических показателей этих решений.

Помимо достаточно интенсивных теоретических исследований по асимптотической теории дифференциальных систем им выполнен и ряд исследований, имеющих приложения, например, в механике движения объектов по поверхностям, близким к сферическим.

Николаем Алексеевичем опубликовано более 200 научных работ, в том числе 2 монографии, и подготовлено более 20 кандидатов и докторов наук. С 1994 по 2004 г. он возглавлял Экспертный совет по математике ВАК Республики Беларусь, в настоящее время является его членом, а также входит в состав редколлегии журналов «Дифференциальные уравнения», «Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics», «Доклады НАН Беларуси», «Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук» и заместителем главного редактора журнала «Труды Института математики НАН Беларуси».

Н. А. Изобов награжден орденом Франциска Скорины, ему присуждена Государственная премия Республики Беларусь в области науки и техники (2000 г.).

Сердечно поздравляем Николая Алексеевича со славным юбилеем и от всей души желаем доброго здоровья, благополучия, бодрости, оптимизма и новых больших творческих успехов.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,
Институт математики НАН Беларуси*

РЭФЕРАТЫ

УДК 517.987.4+519.216

Егоров А. Д. **О составной формуле для математического ожидания функционалов от решения уравнения Ито** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 4–8.

Построена составная формула для приближенного вычисления математического ожидания функционалов от решения стохастических дифференциальных уравнений, точная для функционалов специального вида, основанная на использовании итерационной схемы Эйлера приближенного решения стохастических дифференциальных уравнений.

Библиогр. – 9 назв.

УДК 517.925:517.977

Деменчук А. К. **Необходимое условие существования нерегулярных колебаний линейной системы с нулевым усреднением матрицы коэффициентов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 9–13.

Рассматривается линейная система управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2,$$

где $A(t)$ – непрерывная ω -периодическая $(n \times n)$ -матрица с нулевым средним значением, B – постоянная $(n \times n)$ -матрица. Выбором управления в виде обратной связи $u = U(t)x$ с непрерывной ω -периодической $(n \times n)$ -матрицей $U(t)$ решается задача возбуждения сильно нерегулярных колебаний. Дано необходимое условие решения сформулированной задачи.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 517.977

Минченко Л. И., Стаховский С. М. **Новые условия регулярности в задачах математического программирования** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 14–18.

Исследуется связь условия регулярности положительно линейной зависимости с R -регулярностью для параметрических задач математического программирования.

Библиогр. – 11 назв.

УДК 517.911.5+519.216.73

Васьковский М. М. **Теорема о зависимости β -мартингалльных решений стохастических эволюционных уравнений параболического типа от начальных условий и правых частей** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 19–26.

Доказана теорема о зависимости β -мартингалльных решений от начального условия и правых частей для стохастического эволюционного уравнения

$$dX(t) = AX(t)dt + f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad X \in H, \quad (1)$$

H – сепарабельное гильбертово пространство, $W(t)$ – цилиндрический Q -винеровский процесс со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве U , Q – симметрический положительно определенный оператор на U , при условии, что оператор A является генератором C_0 -полугруппы $S(\cdot)$ на H , функции $f: [0, T] \times H \rightarrow H$, $g: [0, T] \times H \rightarrow L_2(U_0, H)$ измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста по $X \in H$, где $L_2(U_0, H)$ – множество операторов Гильберта–Шмидта из U_0 в H , $U_0 = Q^{1/2}U$, а под β -мартингалльным решением уравнения (1) понимаем мартингалльное решение некоторого стохастического эволюционного включения, построенного по уравнению (1).

Библиогр. – 5 назв.

УДК 517.948.32:517.544

Давьялова Е. В. **Задача Маркушевича с тремя произвольно расположенными точками разрыва** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 27–33.

Рассмотрена задача нахождения функций φ , кусочно-аналитических и ограниченных в плоскости переменного $\zeta = \xi + i\eta$ с линией разрыва $\text{Im} \zeta = 0$. Предельные значения слева (φ^+) и справа (φ^-) от выбранной ориентации оси связаны уравнением:

$$a(\xi)\varphi^+(\xi) + b(\xi)\overline{\varphi^+(\xi)} + c(\xi)\varphi^-(\xi) + d(\xi)\overline{\varphi^-(\xi)} = f(\xi), \quad \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2, r_3\}, \quad (1)$$

коэффициенты которого ограничены, H -непрерывны на $\mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2, r_3\}$.

Задача сведена к однородной задаче Римана. Решение найдено в классе ограниченных функций с основными периодами $2A$ и $2iH$.

Ил. 1. Библиогр. – 2 назв.

УДК 517.968

Гринько А. П. **Асимптотические разложения локальных дробных интегралов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 34–40.

Вычислены примеры локальных дробных интегралов от степенной функции. Получены асимптотические разложения локальных дробных интегралов при стремлении длины интервала интегрирования к нулю и бесконечности в конечной точке действительной оси.

Библиогр. – 5 назв.

УДК 517.53

Мардвилко Т. С. **Неравенство для квазинорм рациональной функции относительно линейной и плоской мер и его приложения** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 41–48.

Получено экстремальное неравенство для оценки квазинормы рациональной функции относительно линейной меры Лебега через квазинорму этой функции относительно плоской меры Лебега. Именно доказано, что если $0 < p < 1$, $\frac{2}{p} \notin \mathbb{N}$, $r \in \mathcal{R}_n \cap L_p(\Pi)$, $\Pi := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > 0\}$, $n \geq 1$, то

$$\|r\|_{L_{p/2}(\mathbb{R})} \leq c(p)n^{\frac{1}{p}}\|r\|_{L_p(\Pi)}.$$

Аналогичное неравенство получено и для $1 < p < 2$ при дополнительном условии, что все полюсы r лежат на действительной оси. Случай $p > 2$ исследован ранее в работах Е. М. Дынькина и В. Р. Мисюка.

Дается приложение этого результата для получения неравенств типа Бернштейна для производных рациональных функций относительно плоской меры и обратной теоремы рациональной аппроксимации.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 511.36

Рыкова О. В. **О количестве целочисленных многочленов с заданным порядком дискриминантов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 49–52.

В работе доказано существование более чем Q^{n-1+4v} целочисленных многочленов $P(x)$ с корнями $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ степени n и высоты $H \leq Q$, у которых для дискриминантов выполняется неравенство

$$1 < |D(P)| < Q^{2n-2-4v}, \quad v < \max\left(\frac{1}{2}, \frac{n-5}{6}\right) \text{ при } n > 4.$$

Библиогр. – 8.

УДК 512.54

Тихоненко Т. В. **Факторизации конечных групп сверхразрешимыми и холловыми подгруппами** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 53–57.

Установлены композиционные факторы конечной факторизуемой группы, оба сомножителя которой являются сверхразрешимыми подгруппами.

Пусть $\pi(G) = \pi \cup \pi'$, где $\pi \neq \emptyset$, $\pi' \neq \emptyset$. Доказано, что если конечная группа обладает свойствами E_π , $E_{\pi'}$ и $E_{(p,q)}$ для всех $p \in \pi$, $q \in \pi'$, то группа будет π -отделимой. В частности, если конечная группа имеет четный порядок и $2 \in \pi'$, то группа будет π -разрешимой.

Библиогр. – 12 назв.

УДК 515.124.62

Агеев С. М., Силаева З. Н. **Об одном обобщении проблемы Борсука** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 58–62.

Известная проблема Борсука о сохранении функтором конечной экспоненты свойства быть абсолютным экстензором решена в категории профильтрованных метрических пространств.

Библиогр. – 8 назв.

УДК 517.977

Кузьменков Д. С. **Оптимальное наблюдение за системой параболического типа** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 63–70.

Рассматривается задача оптимального наблюдения, возникающая при оптимальном управлении тепловым процессом в стержне в условиях неопределенности. Предлагается метод ее приближенного решения, использующий процедуру квазидекомпозиции. Описывается алгоритм работы оптимального эстиматора, формирующего в режиме реального времени оценки текущего состояния теплового процесса.

Библиогр. – 5 назв.

УДК 539.12

Бабич А. А., Карпенко Н. В., Панков А. А., Цитринов А. В. **Идентификация новых тяжелых Z' -бозонов в процессах e^+e^- -аннигиляции с продольно поляризованными пучками** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 71–79.

Предложен подход по разделению сигналов, индуцируемых новыми нейтральными калибровочными Z' -бозонами, предсказываемыми различными классами теорий с расширенным калибровочным сектором, в процессах аннигиляционного рождения фермионных пар. Данный подход базируется на использовании дифференциальных поляризационных наблюдаемых, обеспечивающих более высокую (в сравнении с интегральными наблюдаемыми) чувствительность процессов к параметрам Z' -бозонов. Показано, что поляризационные эксперименты на Международном линейном электрон-позитронном коллайдере с энергией 0,5 ТэВ позволят однозначно идентифицировать E_6 модели (кроме χ -модели), предсказывающие существование Z' -бозонов с массами $M_{Z'} < 2-4$ ТэВ, а также значительно улучшить соответствующие оценки, ожидаемые из неполяризационных экспериментов.

Ил. 3. Библиогр. – 16 назв.

УДК 530.12

Тарасенко А. Н., Горбачевич А. К. **Метод функции Грина для расчета гравитационного излучения от радиально движущегося источника в метрике Шварцшильда** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 80–85.

Использован метод функции Грина для расчета излучения произвольного источника, движущегося вблизи шварцшильдовской черной дыры. Получено явное выражение для некоторых компонент функции Грина. Общий метод применен для расчета излучения свободной частицы, радиально падающей в черную дыру. Получено в явном виде выражение для амплитуды гравитационной волны. Излучение радиально падающей частицы найдено численно. Показано, что результаты находятся в согласии с более ранними работами.

Ил. 2. Библиогр. – 7 назв.

УДК 539.213:539.216.2

Грабчиков С. С., Потужная О. И., Шелег М. У. **Влияние режимов импульсного и реверсированного электролиза на фазовый и химический состав пленок сплавов Co-P и Co-Ni-P** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 86–93.

Изучено влияние режимов импульсного и реверсированного электролиза на фазовый и химический состав, микроструктуру пленок сплавов Co-P и Co-Ni-P.

При осаждении пленок сплавов Co-P и Co-Ni-P в импульсном и реверсированном режимах расширяются концентрационные области синтезируемых аморфных покрытий до 32 ат.% P, снижается граница перехода из кристаллического в аморфное состояние на 2–3 ат.% P. Варьирование величин плотностей прямого и обратного токов, длительностей прямого и обратного импульсов тока, паузы между импульсами позволяет изменять химический состав пленок сплавов Co-P и Co-Ni-P в следующих пределах: по фосфору от 15 до 32 ат.%, по основному металлу от 20 до 50 ат.%. С ростом частоты импульсного тока от 1 до 1000 Гц в аморфных пленках происходит измельчение сеточной микроструктуры, продольный размер структурных неоднородностей уменьшается от 80–200 до 40–100 Å.

Использование режимов импульсного и реверсированного электролиза позволяет синтезировать аморфные сплавы с более однородной сеточной микроструктурой, характеризующейся в 1,5–2 раза более мелкими структурными неоднородностями, по сравнению с образцами, осажденными при постоянном токе.

Ил. 5. Табл. 2. Библиогр. – 7 назв.

УДК 534.535

Анисимова А. Е., Кулак Г. В. **Акустооптическое взаимодействие в плоскопараллельном слое** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 94–98.

Исследованы особенности брэгговской дифракции света на ультразвуке в несогласованном плоскопараллельном слое из плавленого кварца для *s*- и *p*-поляризованной падающей волны. Показано, что максимальные коэффициенты пропускания и отражения дифрагированных волн достигаются изменением интенсивности ультразвука, толщины слоя и угла падения света. Установлено, что узкая полоса пропускания перестраиваемого акустооптического фильтра при дифракции в слое обусловлена френелевским отражением света от его границ.

Ил. 3. Библиогр. – 9 назв.

УДК 681.327.26:681.327.7

Есман А. К., Кулешов В. К., Зыков Г. Л. **Буферизация оптических сигналов в наносекундном диапазоне** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 99–102.

Предложен метод буферизации цифровых оптических данных, основанный на использовании последовательно расположенных оптически связанных волноводных кремниевых резонаторных структур микронных размеров. С помощью математического моделирования показано, что такой оптический буфер обеспечивает задержку цифровых сигналов на 0,5 нс при занимаемой им площади порядка 0,02 мм². Максимальная частота следования оптических цифровых сигналов при этом может достигать 17 ГГц.

Ил. 4. Библиогр. – 6 назв.

УДК 519.173

Бенедиктович В. И. **Непересекающееся остовное дерево геометрического дополнения остовного дерева** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 103–109.

Получен критерий существования непересекающегося остовного дерева в геометрическом дополнении остовного дерева.

Ил. 3. Библиогр. – 7 назв.

УДК 612.172.4

Войткова М. В., Войтович А. П. **Идентификация предсердных аритмий при вейвлет-анализе электрокардиограммы** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 110–118.

Предложен новый метод установления различий фибрилляции предсердий (ФП), флаттера предсердий (ФлП) и синусового (нормального) ритма ЭКГ пациента с помощью одномерного стационарного вейвлет-анализа электрокардиограммы. Проводится определение особенностей спектра вейвлет-коэффициентов вариабельности сердечного ритма (последовательности *RR*-интервалов) и ЭКГ пациента. В качестве диагностического критерия предлагается использовать распределение энергии 8-уровневого вейвлет-преобразования сигнала ЭКГ. При ФлП у пациентов, в отличие от ФП, наблюдается равномерное распределение энергии ВП по 6–8 уровням декомпозиции. Распределение энергии ВП усредняется в границах текущего кардицикла, что дает возможность локализовать во времени момент изменения ритма пациента.

Ил. 5. Табл. 1. Библиогр. – 12 назв.

УДК 530.1; 535.3

Гончаренко А. М. **Распространение оптических солитонов в поглощающем селфоке** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 119–121.

Исследовано распространение оптических солитонов в поглощающем селфоке. Показано, что коэффициент затухания поля солитона существенно зависит от неоднородности среды, а фазовая поверхность не отличается от таковой случая однородной среды.

Библиогр. – 3 назв.

Национальная академия наук Беларуси