

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА РАНГА 4

Е.В. Зубей

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON FINITE GROUPS WITH SCHMIDT SUBGROUPS OF RANK 4

E.V. Zubei

F. Scorina Gomel State University

Указано строение холловых подгрупп конечной группы, все подгруппы Шмидта которой имеют ранг 4.

Ключевые слова: конечная группа, группа Шмидта, ранг группы, холлова подгруппа.

The structure of Hall subgroups of a finite group is considered. All Schmidt subgroups have rank 4.

Keywords: finite group, group of Schmidt, rank of the group, Hall subgroup.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые обозначения и терминология стандартны и соответствуют [1], [2].

Пусть G_1 – минимальная нормальная подгруппа группы G . Для каждого натурального $i \geq 2$ определим подгруппу G_i так, что G_i / G_{i-1} – минимальная нормальная подгруппа факторгруппы G / G_{i-1} . Ряд подгрупп

$$G_0 = 1 \leq G_1 \leq \dots \leq G_m = G$$

называют главным рядом группы G , а его факторы G_i / G_{i-1} – главными факторами. Если G – неединичная разрешимая группа, то все главные факторы являются элементарными абелевыми примарными группами. Пусть $p_i^{n_i} = |G_{i+1} / G_i|$, все p_i – простые числа, не обязательно различные. Число $r(G) = \max_{1 \leq i \leq m} n_i$ называется рангом группы G , [2, VI.5.2]. Для единичной группы считают $r(1) = 0$. Группы ранга 1 называют сверхразрешимыми, их основные свойства приведены в [2, VI.9]. В силу теоремы Жордана–Гельдера любые два главных ряда группы G изоморфны, поэтому значения ранга для каждой разрешимой группы определяется однозначно. Свойства разрешимых групп G с $r(G) \leq 2$ получены в работах Б. Хупперта [3] и Дж. Роуза [4]. Монахов В.С. и Трофимук А.А. [5] изучили разрешимые группы ранга ≤ 3 .

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Их строение хорошо известно, в частности, группы Шмидта бипримарны, одна из силовских подгрупп нормальна, а другая циклическая. Следуя [6] группу Шмидта с нормальной силовской p -подгруппой и ненормальной циклической q -подгруппой будем

называть $S_{\langle p, q \rangle}$ -группой. Здесь и везде ниже p и q – различные простые числа. Для $S_{\langle p, q \rangle}$ -группы S будем использовать запись $S = [P]Q$, где P – нормальная силовская p -подгруппа, а Q – циклическая ненормальная силовская q -подгруппа. О.Ю. Шмидт [7] установил, что ранг $S_{\langle p, q \rangle}$ -группы равен показателю числа p по модулю q .

Для любой подгруппы H группы G ранг подгруппы H не превышает ранга группы G . Следовательно, ранги подгрупп Шмидта не выше ранга группы. В минимальной несверхразрешимой группе все собственные подгруппы Шмидта имеют ранг 1, а ранг всей группы > 1 . Поэтому совпадение ранга группы и ранга собственных подгрупп в общем случае не будет.

Монахов В.С. [8] изучил класс \mathfrak{F} всех групп с подгруппами Шмидта ранга 1, т. е. со сверхразрешимыми подгруппами Шмидта. Класс \mathfrak{F} является наследственной насыщенной радикальной формацией и каждая группа из \mathfrak{F} обладает силовской башней сверхразрешимого типа. Класс \mathfrak{H} всех групп с подгруппами Шмидта ранга $\neq 1$ тоже является наследственной насыщенной радикальной формацией и каждая группа из \mathfrak{H} 2-замкнута, в частности, разрешима [8]. Свойства групп с подгруппами Шмидта ранга 2 и 3 установлены в работах [9]–[11].

В настоящей статье исследуются строение группы, у которой все с подгруппы Шмидта имеют ранг 4.

1 Свойства групп Шмидта

Напомним некоторые необходимые свойства групп Шмидта.

В лемме 1.1 приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О.Ю. Шмидтом в 1924 году.

Лемма 1.1. [7] Пусть S – группа Шмидта, т. е. нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $S = [P]Q$, где P – нормальная силовская p -подгруппа, Q – ненормальная силовская q -подгруппа, p и q – различные простые числа;

(2) $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа и $y^q \in Z(S)$;

(3) $|P/P'| = p^m$, где m – показатель числа p по модулю q ;

(4) главный ряд группы S имеет систему индексов: $p, p, \dots, p, p^m, q, \dots, q$, где m – показатель числа p по модулю q ; число индексов равных p совпадает с n , где $p^n = |P'|$; число индексов равных q совпадает с b , где $q^b = |Q|$.

Из леммы 1.1 (4) вытекает

Лемма 1.2. Пусть p и q – различные простые числа и m – показатель числа p по модулю q . Тогда любая $S_{\langle p, q \rangle}$ -группа имеет ранг m .

Лемма 1.3. [12] Пусть p, q – различные простые числа и m – показатель p по модулю q . Тогда естественное полупрямое произведение $[P]Q$ элементарной абелевой p -группы P порядка p^m и группы Q порядка q является $S_{\langle p, q \rangle}$ -группой ранга m , у которой все подгруппы примарны.

Лемма 1.4 [2, теорема IV.5.4.]. Если в группе G нет $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгрупп для всех $q \in \pi(G)$, то группа G p -нильпотентна.

Лемма 1.5. Если $\{p, q\}$ -группа не q -замкнута, то в ней существует $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа.

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 1.4.

Лемма 1.6 [13]. Если группа не 2-замкнута, то в ней существует $S_{\langle p, 2 \rangle}$ -подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$.

Лемма 1.7 [14, теорема IX.8.3]. Пусть a и m – целые числа > 1 . Тогда, исключая случаи $m = 2, a = 2^b - 1$ и $m = 6, a = 2$, существует простое число q со следующими свойствами:

- (1) q делит $a^m - 1$;
- (2) q не делит $a^i - 1$ для всех $0 < i < m$;
- (3) q не делит m .

В частности, m есть показатель числа a по модулю q .

2 Холловы подгруппы в группах с подгруппами Шмидта ранга 4

Лемма 2.1. Для любого простого числа p существует $S_{\langle p, q \rangle}$ -группа для некоторого простого числа q ранга 4.

Доказательство. По лемме 1.7 для любого натурального числа m и любого простого числа p , за исключением $m = 2, p = 2^b - 1$ и $m = 6, p = 2$, существует простое число q , для которого m является показателем числа p по модулю q . По лемме 1.3 существует $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа, ранг которой будет равен m по лемме 1.2. При $m = 4$ получаем искомого утверждение. \square

Обозначим через $\mathbf{Sch}(4)$ класс, состоящих из всех нильпотентных групп и всех групп, у которых каждая подгруппа Шмидта имеет ранг 4. Через $\mathbf{Sch}(4)_{\{p, q\}}$ обозначается класс всех $\{p, q\}$ -групп из $\mathbf{Sch}(4)$. Как обычно $\mathfrak{S}, \mathfrak{N}$ и \mathfrak{N}_p – классы всех разрешимых, нильпотентных и p -групп соответственно, а $\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ – формационное произведение классов \mathfrak{N}_p и \mathfrak{N}_q . Ясно, что класс $\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ состоит из всех p -замкнутых $\{p, q\}$ -групп. Класс всех $\{p, q\}$ -групп и всех нильпотентных $\{p, q\}$ -групп обозначаются через $\mathfrak{S}_{\{p, q\}}$ и $\mathfrak{N}_{\{p, q\}}$ соответственно.

Лемма 2.2. Группа Шмидта четного порядка ранга 4 является $S_{\langle 2, 5 \rangle}$ -группой.

Доказательство. Пусть G – $\{2, p\}$ -группа Шмидта ранга 4. Если G p -замкнута, то ее ранг по лемме 1.2 равен 1. Это противоречит условию. Поэтому группа G будет $S_{\langle 2, p \rangle}$ -группой. Так как ранг G равен 4, то из леммы 1.2 следует, что показатель числа 2 по модулю p равен 4, т. е. $p = 5$. Значит, группа G является $S_{\langle 2, 5 \rangle}$ -группой.

Лемма 2.3. Пусть p и q – нечетные простые числа. Тогда и только тогда показатель числа q по модулю p равен 4, когда p делит $q^2 + 1$.

Доказательство. Пусть показатель числа q по модулю p равен 4. Тогда p делит $q^4 - 1 = (q^2 - 1)(q^2 + 1)$ и не делит $q^2 - 1$, поэтому p делит $q^2 + 1$. Обратно, пусть p делит $q^2 + 1$. Если p делит $(q^2 - 1)$, то p делит $(q^2 + 1) - (q^2 - 1) = 2$, противоречие. Поэтому p не делит $q - 1$ и не делит $q^2 - 1$. Если p делит $q^3 - 1$, то p делит $(q^3 - 1) + (q^2 + 1) = q^3 + q^2 = q^2(q + 1)$, т. е. p делит $q + 1$. Но теперь p делит $(q - 1)(q + 1) = q^2 - 1$, противоречие. Значит, показатель числа q по модулю p равен 4. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть p и q – нечетные простые числа. Тогда и только тогда существует $S_{\langle p, q \rangle}$ -группа ранга 4, когда делит q делит $p^2 + 1$.

Доказательство. Пусть q делит $p^2 + 1$. Тогда по лемме 2.3 показатель числа p по модулю q равен 4 и по лемме 1.2 любая $S_{\langle p, q \rangle}$ -группа имеет ранг равный 4.

Если любая $S_{\langle p, q \rangle}$ -группа имеет ранг равный 4, то показатель числа p по модулю q равен 4 и по лемме 2.3 q делит $p^2 + 1$.

Теорема 2.5.

1. Пусть p – нечетное простое число. Тогда:

(1.1) $Sch(4)_{\{2, p\}} = \mathfrak{N}_{\{2, p\}}$ при $p \neq 5$;

(1.2) $Sch(4)_{\{2, 5\}} = \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_5$.

2. Пусть p и q – нечетные простые числа, $p > q$. Тогда:

(2.1) $Sch(4)_{\{p, q\}} = \mathfrak{N}_{\{p, q\}}$ в случае, когда $p \nmid (q^2 + 1), q \nmid (p^2 + 1)$;

(2.2) $Sch(4)_{\{p, q\}} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ в случае, когда $p \nmid (q^2 + 1), q \mid (p^2 + 1)$;

(2.3) $Sch(4)_{\{p, q\}} = \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p$ в случае, когда $p \mid (q^2 + 1), q \nmid (p^2 + 1)$;

(2.4) $Sch(4)_{\{p, q\}} = \mathfrak{S}_{\{p, q\}}$ в случае, когда $p \mid (q^2 + 1), q \mid (p^2 + 1)$.

Доказательство. 1. Все нильпотентные $\{2, p\}$ -группы принадлежат классу $Sch(4)_{\{2, p\}}$. Пусть ненильпотентная группа $G \in Sch(4)_{\{2, p\}}$. Тогда в группе G существует подгруппа Шмидта и по условию она имеет ранг 4. По лемме 2.2 все подгруппы Шмидта в группе G будут $S_{\langle 2, 5 \rangle}$ -подгруппами. Значит, при $p \neq 5$ класс $Sch(4)_{\{2, p\}}$ состоит из нильпотентных групп. При $p = 5$ в ненильпотентных группах из класса $Sch(4)_{\{2, 5\}}$ нет $S_{\langle 2, 2 \rangle}$ -подгрупп. Следовательно,

$$Sch(4)_{\{2, 5\}} = \mathfrak{N}_2 \mathfrak{N}_5.$$

2. Пусть $G \in Sch(4)_{\{p, q\}}$, т. е. G является $\{p, q\}$ -группой и любая ее подгруппа Шмидта имеет ранг 4.

Предположим, что p не делит $(q^2 + 1)$. По лемме 2.3 показатель числа q по модулю p не равен 4. Поэтому в G нет $S_{\langle q, p \rangle}$ -подгрупп и $Sch(4)_{\{p, q\}} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ по лемме 1.5. Аналогично, если q не делит $(p^2 + 1)$, то $Sch(4)_{\{p, q\}} \subseteq \mathfrak{N}_q \mathfrak{N}_p$. Отсюда следует, что $Sch(4)_{\{p, q\}} \subseteq \mathfrak{N}_{\{p, q\}}$ в случае, когда p не делит $(q^2 + 1)$ и q не делит $(p^2 + 1)$. Поскольку $\mathfrak{N}_{\{p, q\}} \subseteq Sch(4)_{\{p, q\}}$, то утверждение (2.1) доказано.

Пусть теперь p не делит $(q^2 + 1)$, а q делит $(p^2 + 1)$. По доказанному $Sch(4)_{\{p, q\}} \subseteq \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$.

Если X – произвольная группа из $\mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$ и S – ее подгруппа Шмидта, то S будет $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгрупп по лемме 1.5 и ранг S равен 4 по лемме 2.3. Значит, $X \in Sch(4)_{\{p, q\}}$ и $Sch(4)_{\{p, q\}} = \mathfrak{N}_p \mathfrak{N}_q$.

Аналогично проверяется утверждение (2.3).

Рассмотрим случай (2.4). Пусть Y – произвольная $\{p, q\}$ -группа. Поскольку p делит $(q^2 + 1)$, а q делит $(p^2 + 1)$, то по лемме 2.3 ранг $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгрупп и $S_{\langle q, p \rangle}$ -подгрупп из группы Y равен 4. Значит, $Y \in Sch(4)_{\{p, q\}}$ и $\mathfrak{S}_{\{p, q\}} \subseteq Sch(4)_{\{p, q\}}$. Обратное включение выполняется по определению класса $Sch(4)_{\{p, q\}}$, поэтому имеем равенство $Sch(4)_{\{p, q\}} = \mathfrak{S}_{\{p, q\}}$. \square

Пример 2.1. Для простых чисел 13 и 5 число 4 является показателем 13 по модулю 5 и показателем 5 по модулю 13. Пусть E_{p^n} – элементарная абелева группа порядка p^n , а Z_m – циклическая группа порядка m . По лемме 1.3 существуют $S_{\langle 5, 13 \rangle}$ -группа $[E_{5^4}]Z_{13}$ и $S_{\langle 13, 5 \rangle}$ -группа $[E_{13^4}]Z_5$. Их прямое произведение $([E_{5^4}]Z_{13}) \times ([E_{13^4}]Z_5)$ является недисперсивной $\{5, 13\}$ -группой, у которой все подгруппы Шмидта имеют ранг 4. Поэтому ситуация, рассмотренная в пункте (2.4) теоремы 2.5, имеет место для $\{p, q\} = \{5, 13\}$. В частности, существуют недисперсивные группы, у которых каждая подгруппа Шмидта имеет ранг 4.

Следствие 2.5.1. Пусть $G \in Sch(4)$. Тогда

(1) G – 2-замкнута;

(2) $5'$ -холлова подгруппа 2-разложима и 3-нильпотентна;

(3) $61'$ -холлова подгруппа 11-нильпотентна.

Доказательство. 1. Если группа не 2-замкнута, то по лемме 1.6 в ней существует $S_{\langle p, 2 \rangle}$ -подгруппа для некоторого p . Но ее ранг равен 1, противоречие. Значит, G – 2-замкнута.

2. Пусть $G_5 = H$ – $5'$ -холлова подгруппа. Тогда H – 2-замкнута по пункту (1). Если H не является 2-нильпотентной, то по лемме 1.5 в ней существует $S_{\langle 2, p \rangle}$ -подгруппа для некоторого $p \in \pi(H)$. Так как ее ранг равен 4, то имеем противоречие с леммой 2.2. Значит, H – 2-нильпотентна, поэтому она 2-разложима. Если H не является 3-нильпотентной, то существует $S_{\langle 3, p \rangle}$ -подгруппа S для некоторого $p \in \pi(H)$. Так как ранг S равен 4, то p делит $3^2 + 1 = 10$, т. е. $p = 5$, но $5 \notin \pi(H)$. Значит, H – 3-нильпотентна.

3. Пусть $G_{61'} = K$ – $61'$ -холлова подгруппа. Если K не является 11-нильпотентной, то

существует $S_{\langle 1, p \rangle}$ -подгруппа S для некоторого $p \in \pi(K)$. Так как ранг S равен 4, то p делит $11^2 + 1 = 122$, т. е. $p = 61$, но $61 \notin \pi(K)$. Значит, K – 11-нильпотентна. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York, 1967. – 796 p.
3. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / В. Huppert. – Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.
4. Rose, J. Sufficient conditions for the existence of ordered Sylow towers in finite groups / J. Rose // Journal of algebra. – 1974. – Vol. 28. – P. 116–126.
5. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1124–1137.
6. Монахов, В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса 2001. – Киев. – 2002, секция 1. – С. 81–90.
7. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

8. Монахов, В.С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.

9. Maksimov, S.L. On classes of finite group with fixed Schmidt subgroups / S.L. Maksimov, V.S. Monakhov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2001. – Suppl. 2. – P. 179–185.

10. Максимов, С.Л. О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 3 / С.Л. Максимов // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 3 (6). – С. 186–190.

11. Максимов, С.Л. О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 2 / С.Л. Максимов // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2002. – № 2. – С. 38–41.

12. Гольфанд, Ю.А. О группах, все подгруппы которых специальные / Ю.А. Гольфанд // ДАН СССР. – 1948. – Т. 60, № 8. – С. 1313–1315.

13. Монахов, В.С. О подгруппах Шмидта конечных групп / В.С. Монахов // Вопросы алгебры. Выпуск 13. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1998. – С. 153–171.

14. Huppert, B. Finite groups, II / В. Huppert, N. Blackburn // Berlin – Heidelberg – New York: Springer. – 1982.

Поступила в редакцию 14.06.17.