

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**Том 24, № 3**

**2018**

ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 24

№ 3

2018



ЕКАТЕРИНБУРГ

**Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 24, № 3.** Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2018. 300 с.

ISSN 0134-4889

DOI журнала: 10.21538/0134-4889

**Главный редактор** акад. РАН В. И. Бердышев

**Зам. гл. редактора** д-р физ.-мат. наук А. М. Тарасьев

**Научные редакторы** д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,  
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

#### **Редакционная коллегия**

д-р физ.-мат. наук Б. П. Андреянов (Франция), чл.-корр. РАН С. М. Асеев,  
д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко, д-р физ.-мат. наук А. В. Васильев,  
д-р физ.-мат. наук Э. Х. Гимади, д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),  
канд. физ.-мат. наук М. И. Гомоюнов, д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,  
д-р физ.-мат. наук Х. Г. Гусейнов (Турция), д-р физ.-мат. наук А. В. Кельманов,  
д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий,  
д-р физ.-мат. наук П. Крейчи (Чешская Республика), чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров,  
акад. РАН С. В. Матвеев, д-р физ.-мат. наук А. Д. Медных,  
д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь), чл.-корр. РАН И. А. Панин,  
д-р физ.-мат. наук Е. Ю. Панов, д-р физ.-мат. наук И. Ф. Сивергина (США),  
д-р физ.-мат. наук И. Д. Супруненко (Беларусь), чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов,  
академик НАН Украины А. А. Чикрий (Украина), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай,  
канд. физ.-мат. наук Л. В. Камнева (*отв. секретарь*)

**Отв. редактор выпуска** д-р физ.-мат. наук А. А. Махнев

Журнал индексируется в *российских базах*: РИНЦ, MathNet;  
в *зарубежных базах*: MathSciNet (2013),  
Emerging Sources Citation Index Web of Science (2018)

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт математики и механики  
им. Н. Н. Красовского  
Уральского отделения Российской  
академии наук, 2018

TRUDY  
INSTITUTA  
MATEMATIKI I MEKHANIKI  
URO RAN

Vol. 24

No. 3

2018



YEKATERINBURG

**Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN. Vol. 24, no. 3.** Yekaterinburg:  
IMM UrO RAN, 2018. 300 p.

ISSN 0134-4889

DOI: 10.21538/0134-4889

**Editor-in-Chief** RAS Academician V. I. Berdyshev

**Deputy Editor-in-Chief** Dr. Phys.-Math. Sci. A. M. Taras'ev

**Science Editors** Dr. Phys.-Math. Sci. A. L. Ageev,  
Dr. Phys.-Math. Sci. A. R. Danilin

#### **Editorial Board**

Dr. Phys.-Math. Sci. B. P. Andreianov (France), RAS Corresponding Member S. M. Aseev,  
Dr. Phys.-Math. Sci. A. G. Babenko, RAS Corresponding Member A. G. Chentsov,  
Ukranian NAS Academician A. A. Chikrii (Ukraine),  
Dr. Phys.-Math. Sci. E. H. Gimadi, Cand. Sci. (Phys.-Math.) M. I. Gomoyunov,  
Dr. Phys.-Math. Sci. Wenbin Guo (China), Dr. Phys.-Math. Sci. Kh. G. Guseinov (Turkey),  
Dr. Phys.-Math. Sci. M. I. Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci. A. V. Kel'manov,  
Dr. Phys.-Math. Sci. M. Yu. Khachai, Dr. Phys.-Math. Sci. A. S. Kondrat'ev,  
Dr. Phys.-Math. Sci. A. I. Korotkii, Dr. Phys.-Math. Sci. P. Krejčí (Czech Republic),  
RAS Academician S. V. Matveev, RAS Corresponding Member V. D. Mazurov,  
Dr. Phys.-Math. Sci. A. D. Mednykh,  
Dr. Phys.-Math. Sci. V. S. Monakhov (Republic of Belarus),  
RAS Corresponding Member I. A. Panin, Dr. Phys.-Math. Sci. E. Yu. Panov,  
Dr. Phys.-Math. Sci. I. F. Sivergina (USA),  
Dr. Phys.-Math. Sci. I. D. Suprunenko (Republic of Belarus),  
Dr. Phys.-Math. Sci. A. V. Vasil'ev,  
Cand. Sci. (Phys.-Math.) L. V. Kamneva (*Assistant Editor*)

*Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN is abstracted and/or indexed in Elibrary,  
MathNet, Mathematical Reviews (2013), Emerging Sources Citation Index WoS (2018)*

УДК 512.542

## О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА ИЗ НЕКОТОРОГО ЕЕ ДОБАВЛЕНИЯ

В. С. Монахов, Е. В. Зубей

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Добавлением к подгруппе  $A$  в группе  $G$  называется подгруппа  $B$  такая, что  $G = AB$ . Конечные группы, в которых силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта, исследовались в работах Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика (Сиб. мат. журнал. 1967. Т. 8, № 4. С. 741–753), В. Н. Книгиной и В. С. Монахова (Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 2010. Т. 16, № 3, С. 130–139). В этой ситуации группа может быть неразрешимой. Например, в группах  $Sz(8)$ ,  $PSU(5, 4)$ ,  $PSU(4, 2)$ ,  $PSp(4, 4)$  вообще нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, поэтому в этих группах любая силовская подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта нечетного порядка. В данной работе устанавливается  $r$ -разрешимость конечной группы  $G$  при условии, что нечетное  $r$  не является числом Ферма и силовская  $r$ -подгруппа  $R$  перестановочна с 2-нильпотентными (или 2-замкнутыми) подгруппами Шмидта четного порядка из некоторого добавления к  $R$  в  $G$ . Приведены примеры, показывающие, что ограничения на  $r$  не являются лишними.

Ключевые слова: конечная группа, группа Шмидта,  $r$ -разрешимая группа, силовская  $r$ -подгруппа.

**V. S. Monakhov, E. V. Zubei. On the permutability of a Sylow subgroup with Schmidt subgroups from a supplement.**

A Schmidt group is a finite nonnilpotent group each of whose proper subgroups is nilpotent. A supplement of a subgroup  $A$  in a group  $G$  is a subgroup  $B$  of  $G$  such that  $G = AB$ . Finite groups in which a Sylow subgroup is permutable with some Schmidt subgroups were studied by Ya. G. Berkovich and E. M. Pal'chik (Sib. Mat. Zh. **8** (4), 741–753 (1967)) and by V. N. Knyagina and V. S. Monakhov (Proc. Steklov Inst. Math. **272** (Suppl. 1), S55–S64 (2011)). In this situation, the group may be nonsolvable. For example, in the group  $PSL(2, 7)$  a Sylow 2-subgroup is permutable with all Schmidt subgroups of odd order. In the group  $SL(2, 8)$  a Sylow 3-subgroup is permutable with all 2-closed Schmidt subgroups of even order. In the group  $SL(2, 4)$  a Sylow 5-subgroup is permutable with every 2-closed Schmidt subgroup of even order. Since the groups  $Sz(2^{2k+1})$  for  $k \geq 1$ ,  $PSU(5, 4)$ ,  $PSU(4, 2)$ , and  $PSp(4, 2^n)$  do not contain Schmidt subgroups of odd order, in these groups any Sylow subgroup is permutable with any Schmidt subgroup of odd order. We establish the  $r$ -solvability a finite group  $G$  such that  $r$  is odd and is not a Fermat prime and a Sylow  $r$ -subgroup  $R$  is permutable with 2-nilpotent (or 2-closed) Schmidt subgroups of even order from some supplement of  $R$  in  $G$ . We give examples showing that the constraints on  $r$  are not superfluous.

Keywords: finite group, Schmidt group,  $r$ -solvable group, Sylow  $r$ -subgroup.

**MSC:** MSC20D10, MSC20D20, MSC20D25, MSC20D40

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2018-24-3-145-154

### Введение

Рассматриваются только конечные группы. *Группой Шмидта* называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1], в которой доказано, что группа Шмидта бипримарна (т. е. ее порядок делится точно на два различных простых числа), одна из силовских подгрупп нормальна, другая циклическая, и указана система индексов главного ряда группы Шмидта. Обзор результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведен в [2].

Одной из первых работ, посвященных перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта, является статья Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [3]. В ней устанавливались признаки разрешимости группы, в которой некоторые подгруппы Шмидта четного порядка перестановочны с отдельными силовскими подгруппами.

В общем случае существуют простые группы, в которых для некоторого простого  $r$  силовская  $r$ -подгруппа перестановочна с  $r'$ -подгруппами Шмидта. Например, в группе  $PSL(2, 7)$  силовская 2-подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка. В группе  $SL(2, 8)$  силовская 3-подгруппа перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка. В группе  $SL(2, 4)$  силовская 5-подгруппа перестановочна с каждой 2-замкнутой подгруппой Шмидта четного порядка. В следующих группах вообще нет подгрупп Шмидта нечетного порядка:  $PSL(2, p)$ , где  $p$  — простое число Ферма,  $PSL(2, 9)$ ,  $Sz(8)$ ,  $PSU(5, 4)$ ,  $PSU(4, 2)$ ,  $PSp(4, 4)$ . Поэтому в этих группах любая силовская подгруппа перестановочна с любой подгруппой Шмидта нечетного порядка.

Тем не менее при некотором выборе подгрупп Шмидта для нечетного простого  $r$  можно получить  $r$ -разрешимость группы  $G$ . В случае подгрупп Шмидта четного порядка в [4] получены следующие признаки  $r$ -разрешимости группы:

- если силовская  $r$ -подгруппа группы  $G$  перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка, то группа  $G$   $r$ -разрешима [4, теорема 1 (1)];
- если силовская  $r$ -подгруппа группы  $G$  перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка и  $r \notin \{3, 5\}$ , то группа  $G$   $r$ -разрешима [4, теорема 1 (2)].

Ограничение  $r \notin \{3, 5\}$  отбросить нельзя. Примерами служат группы  $SL(2, 8)$  и  $SL(2, 4)$ .

В настоящей работе получены новые признаки  $r$ -разрешимости группы  $G$ , а именно, доказываются следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $R$  — силовская  $r$ -подгруппа группы  $G$ , где  $r > 2$  и  $r$  не является простым числом Ферма. Если существует в группе  $G$  подгруппа  $B$  такая, что  $G = RB$  и  $R$  перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из  $B$ , то группа  $G$   $r$ -разрешима.

**Теорема 2.** Пусть  $R$  — силовская  $r$ -подгруппа группы  $G$ , где  $r > 5$ . Если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = RB$  и  $R$  перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка из  $B$ , то группа  $G$   $r$ -разрешима.

**Следствие.** Пусть  $R$  — силовская  $r$ -подгруппа группы  $G$ , где  $r > 5$ . Если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = RB$  и  $R$  перестановочна со всеми подгруппами Шмидта четного порядка из  $B$ , то группа  $G$   $r$ -разрешима.

## 1. Используемые обозначения и результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [5; 6].

Пусть  $r$  — простое число. Группа с нормальной силовской  $r$ -подгруппой называется  $r$ -замкнутой. Группа, содержащая нормальную подгруппу, индекс которой совпадает с порядком силовской  $r$ -подгруппы, называется  $r$ -нильпотентной. Через  $Z(G)$ ,  $F(G)$  и  $\Phi(G)$  обозначаются центр, подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы  $G$  соответственно, а  $H^G$  — наименьшая нормальная в  $G$  подгруппа, содержащая подгруппу  $H$ . Симметрическая и знакопеременная группы степени  $n$  обозначаются через  $S_n$  и  $A_n$ ; циклическая и элементарная абелева группы порядков  $m$  и  $p^t$  обозначаются через  $Z_m$  и  $E_{p^t}$  соответственно,  $\pi(G)$  — множество всех простых делителей порядка группы  $G$ . Если  $|\pi(G)| = 1$ , то группа  $G$  называется примарной, при  $|\pi(G)| = 2$  — бипримарной. Если  $\pi \subseteq \pi(G)$ , то  $\pi' = \pi(G) \setminus \pi$ . Запись  $N \triangleleft G$  ( $N \cdot \triangleleft G$ ) означает, что  $N$  — нормальная (минимальная нормальная) в  $G$  подгруппа. Полупрямое произведение нормальной в  $G$  подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$  записывается так:  $G = [A]B$ .

Нормальным рядом группы  $G$  называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \dots \leq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа  $G_i$  нормальна в группе  $G$  для всех  $i = 0, 1, \dots, m$ . Фактор-группы  $G_{i+1}/G_i$  называются факторами этого ряда. Группа называется  $r$ -разрешимой, если существует ряд (1) такой, что порядки факторов этого ряда либо являются степенями  $r$ , либо не

делятся на  $r$ . Ряд (1) называется *главным*, если  $G_{i+1}/G_i$  — минимальная нормальная подгруппа группы  $G/G_i$  для каждого  $i$ , а числа  $|G_{i+1}/G_i|$ ,  $i = 0, 1, \dots, t-1$ , — индексами главного ряда.

В следующей лемме приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О. Ю. Шмидтом в 1924 г.

**Лемма 1** [1]. Пусть  $S$  — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1)  $S = [P]Q$ , где  $P$  — нормальная силовская  $p$ -подгруппа,  $Q$  — ненормальная силовская  $q$ -подгруппа,  $p$  и  $q$  — различные простые числа;
- (2)  $Q = \langle y \rangle$  — циклическая подгруппа и  $y^q \in Z(S)$ ;
- (3)  $|P/P'| = p^m$ , где  $m$  — показатель числа  $p$  по модулю  $q$ ;
- (4) главный ряд группы  $S$  имеет систему индексов:

$$p, p, \dots, p, p^m, q, \dots, q,$$

число индексов, равных  $p$ , совпадает с  $n$ , где  $p^n = |P'|$ ; число индексов, равных  $q$ , совпадает с  $b$ , где  $q^b = |Q|$ .

Условимся  $S_{\langle p, q \rangle}$ -группой называть группу Шмидта с нормальной силовской  $p$ -подгруппой и ненормальной циклической силовской  $q$ -подгруппой.

**Лемма 2** [7, лемма 1]. Если  $K$  и  $D$  — подгруппы группы  $G$ , подгруппа  $D$  нормальна в  $K$  и  $K/D = S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа, то минимальное добавление  $L$  к подгруппе  $D$  в  $K$  обладает следующими свойствами:

- (1)  $L$  —  $p$ -замкнутая  $\{p, q\}$ -подгруппа;
- (2) все собственные нормальные подгруппы в  $L$  нильпотентны;
- (3)  $L$  содержит  $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппу  $[P]Q$  такую, что  $Q$  не содержится в  $D$  и

$$L = ([P]Q)^L = Q^L.$$

**О п р е д е л е н и е.** Подгруппа  $A$  группы  $G$  называется  $OS_{\langle p, q \rangle}$ -полуноормальной в  $G$ , если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = AB$  и  $A$  перестановочна со всеми  $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппами из  $B$ . В этой ситуации подгруппу  $B$  будем называть  $OS_{\langle p, q \rangle}$ -добавлением к подгруппе  $A$  в группе  $G$ . Если подгруппа  $A$  перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из  $B$ , то будем называть подгруппу  $A$   $OS$ -полуноормальной в  $G$ . (Обозначение  $OS$  связано с Отто Юльевичем Шмидтом.)

Понятие  $OS$ -полуноормальной подгруппы является обобщением понятия полуноормальной подгруппы. Напомним, что подгруппа  $A$  называется *полуноормальной* в группе  $G$ , если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = AB$  и  $AB_1$  — собственная в  $G$  подгруппа для каждой собственной подгруппы  $B_1$  из  $B$ . Отдельные свойства полуноормальных подгрупп получены в [8–11]. В работе [7] изучены группы с полуноормальными подгруппами Шмидта.

**П р и м е р 1.** Если  $A$  — подгруппа группы  $G$  и существует нильпотентная подгруппа  $B$  такая, что  $G = AB$ , то  $A$  будет  $OS$ -полуноормальной подгруппой группы  $G$ . В частности, любая подгруппа примарного индекса является  $OS$ -полуноормальной подгруппой.

**П р и м е р 2.** В группе  $PSL(2, 7)$  силовская 2-подгруппа  $Q$  будет  $OS_{\langle 7, 3 \rangle}$ -полуноормальной, поскольку существует нециклическая подгруппа  $B$  порядка 21 и  $G = QB$ . Подгруппа  $B$  является группой Шмидта.

**П р и м е р 3.** В группе  $SL(2, 8)$  силовская 3-подгруппа  $R$  будет  $OS_{\langle 2, 7 \rangle}$ -полуноормальной, поскольку существует подгруппа Шмидта  $B = [E_{2^3}]Z_7$  такая, что  $G = RB$ .

**П р и м е р 4.** В группе  $PSL(2, 5)$  силовская 5-подгруппа  $P$  будет  $OS_{\langle 2, 3 \rangle}$ -полуноормальной, поскольку существует подгруппа  $B \cong A_4$  такая, что  $PSL(2, 5) = PB$ . Здесь  $A_4$  — знакопеременная группа, она является группой Шмидта.

Отметим, что в примерах 2–4 силовская  $r$ -подгруппа,  $r \in \{2, 3, 5\}$ ,  $OS$ -полуноормальна, но не полуноормальна.



**Лемма 3.** Пусть  $A$  —  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальная подгруппа группы  $G$  и  $B$  — ее некоторое  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавление.

(1) Для любого элемента  $g \in G$  подгруппа  $B^g$  будет  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавлением к подгруппе  $A$  в группе  $G$ .

(2) Для любого элемента  $g \in G$  подгруппа  $A^g$  будет  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальной в группе  $G$ , а подгруппы  $B$  и  $B^g$  — ее  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавлениями.

(3) Если  $X$  — непустое множество элементов из группы  $G$ , то подгруппа  $A^X = \langle A^x \mid x \in X \rangle$  будет  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальной в группе  $G$ , а подгруппы  $B$  и  $B^g$ ,  $g \in G$ , будут  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавлениями к  $A^X$  в  $G$ .

**Доказательство.** 1. Пусть  $g = ba$  — произвольный элемент из группы  $G$ , где  $b \in B, a \in A$ . Ввиду изоморфизма  $B \cong B^g$  можно считать, что  $S^g = S^{ba}$  — произвольная  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппа из  $B^g$ , где  $S$  —  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппа в  $B$ . Поскольку  $S^b \leq B$ , то

$$AS^b = S^bA, \quad AS^g = AS^{ba} = (AS^b)^a = (S^bA)^a = S^{ba}A = S^gA.$$

Это означает, что  $B^g$  —  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавление к  $A$  в группе  $G$ .

2. Если  $T$  —  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппа в  $B^g$ , то  $T = S^g$  для некоторой  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппы  $S$  из  $B$ . По условию  $AS = SA$ , поэтому

$$A^gT = A^gS^g = (AS)^g = (SA)^g = S^gA^g = TA^g.$$

Так как  $A^gB^g = (AB)^g = G$ , то  $A^g$  —  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальная подгруппа в  $G$  и  $B^g$  — ее  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавление. Из утверждения (1) следует, что  $(B^g)^{g^{-1}} = B$  будет  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавлением к  $A^g$  в группе  $G$ .

3. Хорошо известно, что подгруппа, перестановочная с несколькими подгруппами, перестановочна с их порождением. Пусть  $S$  —  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппа из  $B$ . Подгруппа  $S$  перестановочна с  $A$  согласно определению  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальной подгруппы и  $S$  перестановочна с  $A^x$  по утверждению (2) для любого  $x \in X$ . Поэтому  $S$  перестановочна с  $A^X$ . Следовательно,  $A^X$  —  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальная подгруппа группы  $G$  и  $B$  — ее  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавление. По утверждению (2) подгруппа  $B^g$ ,  $g \in G$ , будет  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавлением к  $A^X$ . Лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть  $A$  —  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальная подгруппа группы  $G$  и  $B$  — ее некоторое  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавление.

(1) Если  $A \leq U \leq G$ , то  $A$   $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальна в  $U$  и  $U \cap B$  —  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавление к  $A$  в группе  $U$ .

(2) Если  $N \triangleleft G$ , то  $AN$   $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальна в  $G$  и  $B$  является  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавлением к  $AN$  в  $G$ .

(3) Если  $N \triangleleft G$ ,  $N \leq B$ , то  $AN/N$  —  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальна в  $G/N$  и  $B/N$  является  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавлением к  $AN/N$  в  $G/N$ .

(4) Если  $N \triangleleft G$ ,  $(|N|, |B|) = 1$ , то  $A/N$   $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальна в  $G/N$  и  $BN/N$  является  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавлением к  $A/N$  в  $G/N$ .

**Доказательство.** (1) Поскольку  $A$  —  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальная подгруппа группы  $G$  и  $B$  — ее  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавление, то  $G = AB$  и  $A$  перестановочна со всеми  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппами из  $B$ . По тождеству Дедекинда  $U = A(B \cap U)$ . Поскольку  $A$  перестановочна со всеми  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппами из  $B \cap U \leq B$ , то  $A$  —  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальная подгруппа в  $U$  и  $B \cap U$  — ее  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавление.

(2) Нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой. Поскольку  $G = (AN)B$  и  $AN$  перестановочна с любой  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппой из  $B$ , то  $AN$  —  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -полуноормальная подгруппа группы  $G$  и  $B$  ее  $OS_{\langle p,q \rangle}$ -добавление.

(3) Ясно, что  $G/N = (AN/N)(B/N)$ . Пусть  $D/N$  —  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппа из  $B/N$  и  $L$  — минимальное добавление к  $N$  в  $D$ . По лемме 2 подгруппа  $L$  содержит  $S_{\langle p,q \rangle}$ -подгруппу  $S$  такую,

что  $S^L = L$ . Так как  $S \leq L \leq D \leq B$ , то  $A$  перестановочна с  $S$ . Из леммы 3(1) следует, что  $A$  перестановочна с  $S^x$  для любого  $x \in G$ . Поэтому  $A$  перестановочна с  $S^L = L$  и с  $LN = D$ . Следовательно,  $AN/N$  перестановочна с  $D/N$ , т. е.  $AN/N$   $OS_{\langle p, q \rangle}$ -полуноормальна в  $G/N$  и  $B/N$  будет  $OS_{\langle p, q \rangle}$ -добавлением к  $AN/N$  в  $G/N$ .

(4) Так как  $G = AB$  и  $(|N|, |B|) = 1$ , то  $N \leq A$  и  $G/N = (A/N)(BN/N)$ . Поскольку  $N \cap B = 1$ , то  $BN = B[N]$ . Пусть  $D/N$  —  $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа из  $BN/N$ . Тогда  $D = (B \cap D)[N]$ . По лемме 2 существует  $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа  $S$  в  $B \cap D$  такая, что  $S^{B \cap D} = B \cap D$ . Так как  $S \cong SN/N \leq D/N$ , то  $S = B \cap D$ . Теперь  $A$  перестановочна с  $B \cap D$  по условию, поэтому  $A/N$  перестановочна с  $(B \cap D)N/N$ , т. е.  $A/N$   $OS_{\langle p, q \rangle}$ -полуноормальна в  $G/N$  и  $BN/N$  ее  $OS_{\langle p, q \rangle}$ -добавление. Лемма доказана.

**Лемма 5.** (1) *Каждая не  $p$ -нильпотентная группа  $G$  содержит  $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппу для некоторого  $q \in \pi(G)$ , [5, IV.5.4].*

(2) *Каждая не 2-замкнутая группа  $G$  содержит  $S_{\langle q, 2 \rangle}$ -подгруппу для некоторого  $q \in \pi(G)$ , [12, с. 34; 13, следствие 3.1.1].*

**Пример 5.** Аналог утверждения 2 леммы 5 при замене числа 2 на нечетное простое  $p$  неверен. Для  $p = 3$  контрпримером служит простая группа  $SL(2, 2^n)$  при любом нечетном  $n > 2$ , а для  $p \geq 5$  — группа  $PSL(2, p)$ .

**Лемма 6** [5, VI.4.10]. *Пусть  $A$  и  $B$  — подгруппы группы  $G$  такие, что  $G \neq AB$  и  $AB^g = B^gA$  для всех  $g \in G$ . Тогда либо  $A^G \neq G$ , либо  $B^G \neq G$ .*

## 2. Группы с разрешимой $r'$ -холловой подгруппой

Факторизации групп  $PSL(2, q)$  получены в [14], они выписаны также в [15, теорема 0.8]. Приведем формулировку этого результата. Будут использоваться следующие обозначения:  $Z_m$ ,  $E_m$  и  $D_m$  — циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка  $m$ .

**Лемма 7.** *Простая группа  $PSL(2, p^n)$  обладает только следующими нетривиальными факторизациями.*

- (1)  $PSL(2, 2^n) = AB$ ,  $A \cong [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$ ,  $B \cong D_{2(2^n+1)}$  или  $B \cong Z_{2^n+1}$ .
- (2) Если  $p > 2$  и  $(p^n - 1)/2$  — нечетное число, то  $PSL(2, p^n) = AB$ ,  $A \cong [E_{p^n}]Z_{(p^n-1)/2}$ ,  $B \cong D_{p^n+1}$ .
- (3)  $PSL(2, 7) = AB$ , либо  $A \cong [Z_7]Z_3$ ,  $B \cong D_8$  или  $B \cong S_4$ , либо  $A \cong Z_7$ ,  $B \cong S_4$ .
- (4)  $PSL(2, 9) = AB$ , либо  $A \cong [E_9]Z_4$ ,  $B \cong A_5$ , либо  $A \cong A_4$ ,  $B \cong A_5$ , либо  $A \cong S_4$ ,  $B \cong A_5$ , либо  $A \cong B \cong A_5$ .
- (5)  $PSL(2, 11) = AB$ , либо  $A \cong [Z_{11}]Z_5$ ,  $B \cong D_{12}, A_4, A_5$ , либо  $A \cong Z_{11}$ ,  $B \cong A_5$ .
- (6)  $PSL(2, 19) = AB$ ,  $A \cong [Z_{19}]Z_9$ ,  $B \cong D_{20}$  или  $B \cong A_5$ .
- (7)  $PSL(2, 29) = AB$ , либо  $A \cong [Z_{29}]Z_{14}$ ,  $B \cong A_5$ , либо  $A \cong [Z_{29}]Z_7$ ,  $B \cong A_5$ .
- (8)  $PSL(2, 59) = AB$ ,  $A \cong [Z_{59}]Z_{29}$ ,  $B \cong D_{60}$  или  $B \cong A_5$ .

**Лемма 8** [16, Theorem 1.1]. *Пусть  $A$  и  $B$  — разрешимые подгруппы группы  $G$  и пусть  $(|A|, |B|) = 1$ . Если  $G = AB$ , то композиционные факторы группы  $G$  являются группами одного из следующих видов:*

- (1) группа простого порядка;
- (2)  $PSL(2, 2^n)$ , где  $n \geq 2$ ;
- (3)  $PSL(2, q)$ , где  $q \equiv -1 \pmod{4}$ ;
- (4)  $PSL(3, 3)$ ;
- (5)  $M_{11}$ .

Отметим, что без требования  $(|A|, |B|) = 1$  композиционные факторы группы  $G = AB$  с разрешимыми подгруппами  $A$  и  $B$  перечислил Л. С. Казарин [17].

Из леммы 8 с помощью леммы 7 и списка максимальных подгрупп в  $PSL(3, 3)$  и  $M_{11}$  [18] получается следующий результат.

**Лемма 9.** Пусть в простой группе  $G$  существует разрешимая  $p'$ -холлова подгруппа,  $p \in \pi(G)$ .

- (1) Если  $p = 2$ , то  $G \cong PSL(2, r) = AB$ ,  $A \cong [Z_r]Z_{(r-1)/2}$ ,  $B \cong D_{2^n}$ , где  $r = 2^n - 1 \geq 7$ .
- (2) Если  $p = 3$ , то  $G \cong PSL(2, 2^3) = AB$ ,  $A \cong [E_8]Z_7$ ,  $B \cong Z_9$ .
- (3) Если  $p = 5$ , то  $G \cong A_5 = AB$ ,  $A \cong A_4$ ,  $B \cong Z_5$ .
- (4) Если  $p = 7$ , то  $G \cong PSL(2, 7) = AB$ ,  $A \cong S_4$ ,  $B \cong Z_7$ .
- (5) Если  $p = 17$ , то  $G \cong PSL(2, 2^4) = AB$ ,  $A \cong [E_{2^4}]Z_{15}$ ,  $B \cong Z_{17}$  или  $G \cong PSL(3, 3) = AB$ ,  $A \cong [E_9]GL(2, 3)$ ,  $B \cong Z_{17}$  (имеется два класса сопряженных подгрупп, изоморфных  $[E_9]GL(2, 3)$ ).
- (6) Если  $p > 7$ ,  $p \neq 17$ , то  $p = 2^n + 1$  — простое число Ферма и  $G \cong PSL(2, 2^n) = AB$ ,  $A \cong [E_{2^n}]Z_{2^n-1}$ ,  $B \cong Z_p$ .

**Лемма 10.** Пусть  $p$  — нечетное простое число и  $p$  не является числом Ферма. Если в группе  $G$  существует 2-замкнутая  $p'$ -холлова подгруппа, то  $G$  разрешима.

**Доказательство.** Воспользуемся индукцией по порядку группы  $G$ . Пусть  $P$  — силовская  $p$ -подгруппа,  $H$  —  $p'$ -холлова подгруппа группы  $G$ . Тогда  $G = PH$  и по условию  $H = [Q]K$  — 2-замкнута, где  $Q$  — силовская 2-подгруппа,  $K$  —  $\{2, p\}'$ -холлова подгруппа группы  $G$ . Пусть  $N$  — минимальная нормальная в  $G$  подгруппа. Так как  $(|P|, |H|) = 1$ , по [19, лемма 5]  $N = (N \cap P)(N \cap H)$ , подгруппа  $N$  удовлетворяет условиям доказываемой леммы. Если  $N < G$ , то по индукции  $N$  разрешима. Так как фактор-группа  $G/N$  тоже удовлетворяет условиям доказываемой леммы, то  $G/N$  разрешима по индукции. Значит,  $G$  разрешима. Теперь считаем, что  $G = N$  — простая группа. Поскольку  $p'$ -холлова подгруппа  $H$  разрешима, то применима лемма 9, по которой  $p$  — простое число Ферма. Противоречие. Лемма доказана.

### 3. Достаточные условия $r$ -разрешимости группы

**Теорема 1.** Пусть  $R$  — силовская  $r$ -подгруппа группы  $G$ , где  $r > 2$  и  $r$  не является простым числом Ферма. Если существует в группе  $G$  подгруппа  $B$  такая, что  $G = RB$  и  $R$  перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из  $B$ , то группа  $G$   $r$ -разрешима.

**Доказательство.** Пусть в группе  $G$  существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = RB$  и  $R$  перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из  $B$ . Подгруппа  $R$  становится  $OS_{\langle p, 2 \rangle}$ -полунормальной для каждого нечетного  $p \in \pi(B)$ , и она обладает свойствами, перечисленными в лемме 4.

Воспользуемся индукцией по  $|G| + |B|$ . Проверим, что

- (1)  $B$  — собственная подгруппа группы  $G$ .

По условию  $R$  перестановочна со всеми 2-нильпотентными подгруппами Шмидта четного порядка из  $B$ . Если  $B = G$ , то  $G$   $r$ -разрешима по [4, теорема 1(1)]. Поэтому считаем, что  $B < G$ .

- (2) Порядок  $B$  не делится на  $r$ .

Рассмотрим силовскую  $r$ -подгруппу  $B_r$  из  $B$ . По лемме 3(2) можно считать, что  $B_r \leq R$ . Пусть  $S$  — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из  $B$ . По условию  $RS = SR$ . По тождеству Дедекинда

$$B \cap RS = (B \cap R)S = B_r S = S(B \cap R) = SB_r.$$

По [4, теорема 1(1)]  $B$   $r$ -разрешима. Теперь  $G = RB_{r'}$  и  $B$  —  $r'$ -холлова подгруппа группы  $G$ .

(3) Подгруппа  $B$  не 2-замкнута по лемме 10.

(4) Группа  $G$  непростая.

Предположим, что  $G$  — простая группа. Так как  $B$  — не 2-замкнутая группа, то по лемме 5 (2) в ней существует 2-нильпотентная  $2d$ -подгруппа Шмидта четного порядка  $S = [Q]T$ ,  $T$  — силовская 2-подгруппа в  $S$ . Если  $S = B$ , то  $T = G_2$  — циклическая и  $G$  разрешима. Значит,  $S < B$ . Рассмотрим произвольный элемент  $g = ba$  из  $G$ , где  $b \in B$ ,  $a \in R$ . Ввиду изоморфизма  $B^g \cong B$  можно считать, что  $S^g = S^{ba}$  — произвольная 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из  $B^g$ . Поскольку  $S^b \leq B$ , то

$$RS^b = S^bR, \quad RS^g = RS^{ba} = (RS^b)^a = (S^bR)^a = S^{ba}R = S^gR$$

для любого  $g \in G$ . Так как  $G$  — простая группа, то  $R^G = S^G = G$  и  $B = S$  по лемме 6. Противоречие.

(5) Если  $N \cdot \triangleleft G$ , то либо  $N \leq R$ , либо  $N \leq B$ .

Согласно (2) и [19, лемма 5]  $N = (N \cap R)(N \cap B)$ . Пусть  $S$  — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из  $N \cap B$ . Тогда  $S \leq B$  и  $RS = SR$  по условию. По тождеству Дедекинда

$$N \cap RS = (N \cap R)S = S(N \cap R).$$

Так как  $N \cap R$  — силовская  $r$ -подгруппа в  $N$  и она удовлетворяет условию теоремы, то по индукции  $N$   $r$ -разрешима. Теперь  $N$  — либо  $r$ -подгруппа, либо  $r'$ -подгруппа. Если  $N$  —  $r$ -подгруппа, то  $N \leq R$ . Если  $N$  —  $r'$ -подгруппа, то  $N \leq B$ .

(6) Окончание доказательства.

Если  $N \leq R$ , то

$$G/N = R/N(BN/N), \quad (|N|, |B|) = 1.$$

Поскольку  $N \cap B = 1$ , то  $BN = B[N]$ . Пусть  $S/N$  — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из  $BN/N$ . Тогда  $S = (B \cap S)[N]$ , т. е.  $B \cap S$  будет минимальным дополнением к  $N$  в  $S$ . По лемме 2 существует подгруппа Шмидта  $L$  в  $B \cap S$  такая, что  $L^{B \cap S} = B \cap S$ . Так как  $LN/N \leq S/N$ , то  $L = B \cap S$ . Теперь  $R$  перестановочна с  $B \cap S$  по условию, следовательно,  $R/N$  перестановочна с  $(B \cap S)N/N = S/N$  и по индукции  $G/N$   $r$ -разрешима.

Если  $N \leq B$ , то  $G/N = (RN/N)B/N$ . Пусть  $S/N$  — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка из  $B/N$  и  $L$  — минимальное добавление к  $N$  в  $S$ . По лемме 2 подгруппа  $L$  содержит 2-нильпотентную подгруппу Шмидта четного порядка  $D$  такую, что  $D^L = L$ . Так как  $D \leq L \leq S \leq B$ , то  $R$  перестановочна с  $D$ . Из леммы 3 (2) следует, что  $R$  перестановочна с  $D^x$  для любого  $x \in G$ . Поэтому  $R$  перестановочна с  $D^L = L$  и с  $LN = S$ . Следовательно,  $RN/N$  перестановочна с  $S/N$ . По индукции  $G/N$   $r$ -разрешима.

Получаем, что в любом случае  $G/N$   $r$ -разрешима. Из (5) следует, что  $G$   $r$ -разрешима. Теорема доказана.

Заметим, что в формулировке теоремы 1 требования “ $r > 2$  и  $r$  не является простым числом Ферма” убрать нельзя. Для  $r = 2$  примером служит группа  $PSL(2, 7)$ , для  $r = 3$  — группа  $SL(2, 8)$ , для  $r = 2^n + 1 > 3$  — группа  $SL(2, 2^n)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $R$  — силовская  $r$ -подгруппа группы  $G$ , где  $r > 5$ . Если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = RB$  и  $R$  перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта четного порядка из  $B$ , то группа  $G$   $r$ -разрешима.

**Доказательство.** Пусть  $R$  — силовская  $r$ -подгруппа группы  $G$ . Предположим, что существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = RB$  и подгруппа  $R$  перестановочна со всеми 2-замкнутыми подгруппами Шмидта из  $B$ . Подгруппа  $R$  становится  $OS_{\langle 2, p \rangle}$ -полунормальной для каждого нечетного  $p \in \pi(B)$ , и она обладает свойствами, перечисленными в лемме 4.

Если  $B = G$ , то  $G$   $r$ -разрешима [4, теорема 1(2)]. Поэтому считаем, что  $B < G$ , и используем индукцию по  $|G| + |B|$ . Используя [4, теорема 1(2)] и повторяя доказательство утверждения (2) теоремы 1, получаем, что

- (1)  $B$  —  $r'$ -подгруппа;
- (2)  $B$  не 2-нильпотентна по [9, теорема А];
- (3) группа  $G$  непростая.

Предположим, что  $G$  — простая группа. Так как  $B$  не 2-нильпотентная группа, то по лемме 5(1) в ней существует 2-замкнутая  $2d$ -подгруппа Шмидта  $S$  четного порядка. Рассмотрим произвольный элемент  $g = ba$  из  $G$ , где  $b \in B$ ,  $a \in R$ . Ввиду изоморфизма  $B^g \cong B$  можно считать, что  $S^g = S^{ba}$  — произвольная 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из  $B^g$ . Поскольку  $S^b \leq B$ , то

$$RS^b = S^bR, \quad RS^g = RS^{ba} = (RS^b)^a = (S^bR)^a = S^{ba}R = S^gR$$

для любого  $g \in G$ . Так как  $G$  — простая группа, то  $R^G = S^G = G$  и  $B = S$  по лемме 6. По [4, лемма 11]  $G \cong PSL(2, 5)$  или  $SL(2, 8)$ , где  $3 \leq r \leq 5$ , противоречие. Следовательно,  $G$  — непростая группа.

- (4) Если  $N \cdot \triangleleft G$ , то либо  $N \leq R$ , либо  $N \leq B$ .

Согласно [19, лемма 5]  $N = (N \cap R)(N \cap B)$ . Пусть  $S$  — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из  $N \cap B$ . Тогда  $S \leq B$  и  $RS = SR$  по условию. По тождеству Дедекинда

$$N \cap RS = (N \cap R)S = S(N \cap R).$$

Так как  $N \cap R$  — силовская  $r$ -подгруппа в  $N$  и она удовлетворяет условию теоремы, то по индукции  $N$   $r$ -разрешима. Теперь  $N$  — либо  $r$ -подгруппа, либо  $r'$ -подгруппа. Если  $N$  —  $r$ -подгруппа, то  $N \leq R$ . Если  $N$  —  $r'$ -подгруппа, то  $N \leq B$ .

- (5) Окончание доказательства.

Если  $N \leq R$ , то  $G/N = R/N(BN/N)$  и  $(|N|, |B|) = 1$ . Поскольку  $N \cap B = 1$ , то  $BN = B[N]$ . Пусть  $S/N$  — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из  $BN/N$ . Тогда  $S = (B \cap S)[N]$ , т. е.  $B \cap S$  будет минимальным дополнением к  $N$  в  $S$ . По лемме 2 существует подгруппа Шмидта  $L$  в  $B \cap S$  такая, что  $L^{B \cap S} = B \cap S$ . Так как  $LN/N \leq S/N$ , то  $L = B \cap S$ . Теперь  $R$  перестановочна с  $B \cap S$  по условию, следовательно,  $R/N$  перестановочна с  $(B \cap S)N/N = S/N$  и по индукции  $G/N$   $r$ -разрешима.

Если  $N \leq B$ , то  $G/N = (RN/N)B/N$ . Пусть  $S/N$  — 2-замкнутая подгруппа Шмидта четного порядка из  $B/N$  и  $L$  — минимальное добавление к  $N$  в  $S$ . По лемме 2 подгруппа  $L$  содержит 2-замкнутую подгруппу Шмидта  $D$  такую, что  $D^L = L$ . Так как  $D \leq L \leq S \leq B$ , то  $R$  перестановочна с  $D$ . Из леммы 3(1) следует, что  $R$  перестановочна с  $D^x$  для любого  $x \in G$ . Поэтому  $R$  перестановочна с  $D^L = L$  и с  $LN = S$ . Следовательно,  $RN/N$  перестановочна с  $S/N$ . По индукции  $G/N$   $r$ -разрешима.

Получаем, что в любом случае  $G/N$   $r$ -разрешима. Из (4) следует, что  $G$   $r$ -разрешима. Теорема доказана.

**Следствие.** Пусть  $R$  — силовская  $r$ -подгруппа группы  $G$ , где  $r > 5$ . Если существует подгруппа  $B$  такая, что  $G = RB$  и  $R$  перестановочна со всеми подгруппами Шмидта четного порядка из  $B$ , то группа  $G$   $r$  разрешима.

Заметим, что в формулировке теоремы 2 требования “ $r > 5$ ” убрать нельзя. Для  $r = 2$  примером служит группа  $PSL(2, 7)$ , для  $r = 3$  — группа  $SL(2, 8)$ , для  $r = 5$  — группа  $SL(2, 4)$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
2. Монахов В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса (2001) / Ин-т математики НАНУ. Киев, 2002. Сек. 1. С. 81–90.



3. Беркович Я. Г., Пальчик Э. М. О перестановочности подгрупп конечной группы // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 4. С. 741–753.
4. Княгина В. Н., Монахов В. С. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3, С. 130–139.
5. Huppert В. Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1967. 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3.
6. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
7. Княгина В. Н., Монахов В. С. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.
8. Su X. On seminormal subgroups of finite group // J. Math. (Wuhan). 1988. Vol. 8, no. 1. P. 7–9.
9. Carocca A., Matos H. Some solvability criteria for finite groups // Hokkaido Math. J. 1997. Vol. 26, no. 1. P. 157–161. doi: 10.14492/hokmj/1351257811.
10. Подгорная В. В. Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-матэм. навук. 2000. № 4. С. 22–25.
11. Монахов В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Мат. зам. 2006. Т. 80, № 4. С. 573–581.
12. Беркович Я. Г. Теорема о ненильпотентных разрешимых подгруппах конечной группы // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966. С. 24–39. ISBN: 978-5-458-54866-3.
13. Монахов В. С. О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. 1998. Вып. 13. С. 153–171.
14. Ito N. On the faktorisations of the linear fractional group  $LF(2, p^n)$  // Acta Sci. Math. 1953. No. 15. P. 79–84.
15. Монахов В. С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975. С. 70–100.
16. Fisman E. On the product of two finite solvable groups // J. Algebra. 1983. Vol. 80. P. 517–536.
17. Казарин Л. С. О группах, представимых в виде произведения двух разрешимых подгрупп // Commun. Algebra. 1986. Т. 14, no. 6. С. 1001–1066.
18. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p. ISBN-10: 0198531990.
19. Княгина В. Н., Монахов В. С. О  $\pi'$ -свойствах конечной группы, обладающей  $\pi$ -холловой подгруппой // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 2. С. 297–309.

Монахов Виктор Степанович

Поступила 27.04.2018

д-р физ.-мат. наук, профессор

профессор кафедры алгебры и геометрии

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Минск

e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Зубей Екатерина Владимировна

аспирант

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, г. Минск

e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

## REFERENCES

1. Schmidt O. Groups, all subgroups of which are special *Mat. Sb.*, 1924, vol. 31, no. 3-4, pp. 366–372 (in Russian).
2. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups, their existence and some applications. *Proc. Ukr. Math. Congr., 2001*, Kiev, 2002, sec. 1, pp. 81–90 (in Russian).
3. Berkovich Ya.G., Pal'chik, E.M. On the commutability of subgroups of a finite group. *Sib. Math. J.*, 1967, vol. 8, no. 4, pp. 560–568. doi: 10.1007/BF02196475.
4. Knyagina V.N., Monakhov V.S. On the permutability of Sylow subgroups with Schmidt subgroups. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. 55–64. doi: 10.1134/S0081543811020052.

5. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1967, 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3.
6. Monakhov V.S. *Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk: Vysheishaya Shkola, 2006, 207 p. (in Russian). ISBN: 985-06-1114-6.
7. Knyagina V.N., Monakhov V.S. Finite groups with seminormal Schmidt subgroups. *Algebra and Logic*, 2007, vol. 46, no. 4, pp. 244–249. doi: 10.1007/s10469-007-0023-1.
8. Su X. On seminormal subgroups of finite group. *J. Math. (Wuhan)*, 1988, vol. 8, no. 1, pp. 7–9.
9. Carocca A., Matos H. Some solvability criteria for finite groups. *Hokkaido Math. J.*, 1997, vol. 26, no. 1, pp. 157–161. doi: 10.14492/hokmj/1351257811.
10. Podgornaya V.V. Seminormal subgroups and supersolvability of finite groups. *Vestsi Nats. Akad. Navuk Belarusi Ser. Fiz.-Mat. Navuk*, 2000, no. 4, pp. 22–25.
11. Monakhov V.S. Finite groups with a seminormal Hall subgroup. *Math. Notes.*, 2006, vol. 80, no. 4, pp. 542–549. doi: 10.4213/mzm2850.
12. Berkovich Ya.G. A theorem on non-nilpotent solvable subgroups of a finite group. In: *Konechnye gruppy*, Berkovich Ya.G. (ed.), Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1966, 195 p., ISBN: 978-5-458-54866-3, pp. 24–39 (in Russian).
13. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups of finite groups. *Voprosy Algebry*, 1998, no. 13, pp. 153–171 (in Russian).
14. Ito N. On the faktorisations of the linear fractional group  $LF(2, p^n)$ . *Acta Sci. Math.*, 1953, no. 15, pp. 79–84.
15. Monakhov V.S. The product of finite groups close to nilpotent. In: *Finite Groups*, Shemetkov L.A. (ed.). Minsk: Nauka i Tekhnika Publ., 1975, pp. 70–100 (in Russian).
16. Fisman E. On the product of two finite solvable groups. *J. Algebra*, 1983, vol. 80, pp. 517–536.
17. Kazarin L.S. On groups which are the product of two solvable subgroups. *Commun. Algebra*, 1986, vol. 14, no. 6, pp. 1001–1066. doi: 10.1080/00927878608823352.
18. Conway J.H., Curtis R.T., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.. *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985, 252 p. ISBN-10: 0198531990.
19. Knyagina V.N., Monakhov V.S. On the  $\pi'$ -properties of a finite group possessing a hall  $\pi$ -subgroup. *Sib. Math. J.*, 2011, vol. 52, no. 2, pp. 234–243. doi: 10.1134/S0037446611020066.

The paper was received by the Editorial Office on April 27, 2018.

*Viktor Stepanovich Monakhov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: victor.monakhov@gmail.com.

*Ekaterina Vladimirovna Zubei*, doctoral student, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru.