

УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

А.А. Трофимук, Е.В. Зубей

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON THE PERMUTABILITY OF A SYLOW SUBGROUP WITH SCHMIDT SUBGROUPS OF ODD ORDER

A.A. Trofimuk, E.V. Zubei

F. Scorina Gomel State University

Группой Шмидта называется конечная нильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. В работе устанавливаются неабелевы композиционные факторы группы, у которой некоторая силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, подгруппа Шмидта, силовская подгруппа, перестановочные подгруппы.

A finite non-nilpotent group G is called a Schmidt group if every proper subgroup of G is nilpotent. In this paper the non-abelian composition factors of a group in which a Sylow subgroup is permutable with Schmidt subgroups of odd order is determined.

Keywords: finite group, solvable group, Schmidt subgroup, Sylow subgroup, permutable subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют нильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Добавлением к подгруппе A в группе G называется подгруппа B такая, что $G = AB$.

Хорошо известно [1], что 2-нильпотентная группа Шмидта четного порядка сверхразрешима, а 2-замкнутая – несверхразрешима. Если в группе нет подгрупп Шмидта четного порядка, то группа 2-разложима, см. [2, теоремы 2.1, 2.4], поэтому разрешима.

Для групп Шмидта нечетного порядка аналогичные утверждения не выполняются. Например, любая $\{3, 5\}$ -группа Шмидта, как 3-нильпотентная, так и 3-замкнутая, несверхразрешима. Если в группе отсутствуют подгруппы Шмидта нечетного порядка, то группа может быть неразрешимой. В.Н. Тютянов, П.В. Бычков [3] установили, что неабелевы композиционные факторы группы, у которой нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, принадлежат множеству

$$\Omega = \{PSL(2, 2^n), n \geq 2; PSL(2, q), q = 2^k + 1;$$

$$PSU(4, 2) = PSp(4, 3);$$

$$PSp(4, 2^n), n \geq 2; Sz(2^{2n+1}), n \geq 1\}.$$

Группы, у которых силовская подгруппа перестановочна с некоторыми подгруппами Шмидта, исследовались в работах [4]–[7]. В работе [6] установлена r -разрешимость группы G для $r \geq 7$, у которой силовская r -подгруппа R перестановочна со всеми подгруппами Шмидта

из некоторого добавления к R в G . Для $r < 7$ перечислены все неабелевы композиционные факторы такой группы. В работе [7] доказана r -разрешимость группы G при условии, что нечетное r не является числом Ферма и силовская r -подгруппа R перестановочна с 2-нильпотентными (или 2-замкнутыми) подгруппами Шмидта четного порядка из некоторого добавления к R в G .

Вполне естественно изучить группы, у которых силовская подгруппа перестановочна с подгруппами Шмидта нечетного порядка. Доказана следующая

Теорема. Если некоторая силовская p -подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка из G , то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2, 7)$ или группам из множества Ω .

1 Вспомогательные результаты

Используемые обозначения и определения стандартны, их можно найти в [8], [9].

Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B . Через H^G обозначается наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая подгруппу H . Следуя [7], условимся называть $S_{\langle p, q \rangle}$ -группой группу Шмидта с нормальной силовской p -подгруппой и циклической силовской q -подгруппой.

Лемма 1.1 [3, следствие 2.1]. Пусть G – группа без подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G принадлежат множеству Ω .

Лемма 1.2 [5]. Если простая группа G является произведением p -подгруппы P и подгруппы Шмидта S , то справедливо одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 2, G \cong PSL(2, 7), P \cong D_8, S \cong [Z_7]Z_3$;
- (2) $p = 3, G \cong SL(2, 8), P \cong Z_9, S \cong [E_{2^3}]Z_7$;
- (3) $p = 5, G \cong PSL(2, 5), P \cong Z_5, S \cong A_4 \cong [E_{2^2}]Z_3$.

Здесь через D_m, Z_m, E_{p^l} обозначаются диэдральная, циклическая группы порядка m и элементарная абелева группа порядка p^l соответственно. Знакопеременная группа степени n обозначается через A_n .

Лемма 1.3 [5, лемма 3]. Если K и D – подгруппы группы G , подгруппа D нормальна в K и $K/D \cong S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:

- (1) L – p -замкнутая $\{p, q\}$ -подгруппа;
- (2) все собственные нормальные подгруппы в L нильпотентны;
- (3) L содержит $S_{\langle p, q \rangle}$ -подгруппу $[P]Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = ([P]Q)^L = Q^L$.

Лемма 1.4 [10, лемма 4]. Пусть подгруппа A группы G перестановочна с подгруппами B_1, B_2, \dots, B_n . Тогда A перестановочна с подгруппой $\langle B_1, B_2, \dots, B_n \rangle$, порожденной ими.

Лемма 1.5 [9]. Пусть A и B – подгруппы группы G такие, что $G \neq AB$ и $AB^g = B^gA$ для всех $g \in G$. Тогда либо $A^G \neq G$, либо $B^G \neq G$.

Лемма 1.6. Если некоторая силовская p -подгруппа P группы G перестановочна с каждой подгруппой Шмидта S из некоторого добавления B в G . Тогда P перестановочна с подгруппой S^g для любого $g \in G$.

Доказательство. По условию леммы $G = PB$ и $S \leq B$. Пусть $g = ba$ – произвольный элемент из группы G , где $b \in B, a \in P$. Так как $S^b \leq B$, то $PS^b = S^bP$ и

$$\begin{aligned} PS^g &= PS^{ba} = (PS^b)^a = \\ &= (S^bP)^a = S^{ba}P = S^gP. \quad \square \end{aligned}$$

2 Доказательство теоремы

Обозначим силовскую p -подгруппу группы G из условия теоремы через P . Предположим, что теорема неверна и группа G – контрпример минимального порядка. Пусть в G нет подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда группа G удовлетворяет условию теоремы и по лемме 1.1 её неабелевы композиционные факторы принадлежат множеству Ω . Противоречие.

Значит, в группе G существует хотя бы одна подгруппа Шмидта нечетного порядка. Пусть N – собственная неединичная нормальная подгруппа

группы G . Тогда PN/N – силовская p -подгруппа группы G/N . Если в G/N нет подгрупп Шмидта нечетного порядка, то G/N удовлетворяет условию теоремы. Пусть K/N – произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка из G/N и L – минимальное добавление к подгруппе N в K . По лемме 1.3 L содержит подгруппу Шмидта S нечетного порядка и $L = (S)^L$. По условию P перестановочна с подгруппой S и подгруппой Шмидта нечетного порядка S^l для любого $l \in L$. Значит, P перестановочна с $S^L = L$ по лемме 1.4 и поэтому PN/N перестановочна с $LN/N = K/N$. Таким образом, все условия теоремы наследуют фактор-группы G/N . По индукции неабелевы композиционные факторы группы G/N принадлежат списку простых групп из заключения теоремы.

Предположим, что в N нет подгрупп Шмидта нечетного порядка. Тогда по лемме 1.1 неабелевы композиционные факторы группы N принадлежат множеству Ω , противоречие с выбором группы G . Поэтому пусть S_1 – произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка из N . Тогда по условию $PS_1 = S_1P$. Так как $N \cap PS_1 = (N \cap P)S_1 = P_1S_1$, где P_1 – силовская p -подгруппа из N , то по индукции неабелевы композиционные факторы группы N изоморфны $PSL(2, 7)$ или группам из множества Ω . Опять противоречие с выбором группы G .

В дальнейшем считаем, что G – простая группа. Пусть T – произвольная подгруппа Шмидта нечетного порядка. Предположим, что $PT < G$. Тогда P перестановочна с подгруппой T^g для любого $g \in G$ и $P^G \neq G$, либо $T^G \neq G$ по лемме 1.5. Противоречие. Поэтому $PT = G$. По лемме 1.2 возможны только следующие варианты:

- 1) $p = 2, G \cong PSL(2, 7), P \cong D_8, S \cong [Z_7]Z_3$;
- 2) $p = 3, G \cong SL(2, 8), P \cong Z_9, S \cong [E_{2^3}]Z_7$;
- 3) $p = 5, G \cong PSL(2, 5), P \cong Z_5, S \cong A_4 \cong [E_{2^2}]Z_3$.

Как видно из факторизаций, только группа $PSL(2, 7)$ представима в виде произведения силовской подгруппы и подгруппы Шмидта нечетного порядка. Поэтому $G \cong PSL(2, 7)$. Противоречие. \square

Следствие 2.1.1. Пусть G – группа, у которой нет композиционных факторов из множества Ω . Если $p > 2$ и силовская p -подгруппа группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта нечетного порядка, то G разрешима.

Доказательство. Обозначим силовскую p -подгруппу группы G из условия следствия через P . Применим индукцию по порядку группы G . Из теоремы и леммы 1.1 следует, что в группе G существует хотя бы одна подгруппа Шмидта

нечетного порядка и в G все неабелевы композиционные факторы изоморфны $PSL(2, 7)$. Пусть N – собственная неединичная нормальная в G подгруппа. Из доказательства теоремы видно, что условия следствия наследуют все фактор-группы и собственные нормальные подгруппы. Тогда по индукции фактор-группа G/N и подгруппа N разрешимы. Значит, G разрешима.

Таким образом, в группе G нет собственных нормальных подгрупп и G – простая группа, изоморфная $PSL(2, 7)$. Группа G является произведением p -подгруппы P и подгруппы Шмидта нечетного порядка по лемме 1.5. Однако, из леммы 1.2 следует, что $p = 2$. Противоречие с условием. \square

Следствие 2.1.2. Пусть в группе G существует $2'$ -холлова подгруппа B . Если некоторая силовская 2 -подгруппа P группы G перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B , то G либо разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL(2, 7)$.

Доказательство. Если в группе B нет подгрупп Шмидта, то B нильпотентна. Тогда по теореме Виландта–Кегеля группа $G = PB$ разрешима. Поэтому в дальнейшем считаем, что подгруппа B ненильпотентна.

Применим индукцию по порядку группы G . Пусть N – собственная неединичная нормальная подгруппа группы G . Тогда PN/N – силовская 2 -подгруппа группы G/N и в группе G/N существует $2'$ -холлова подгруппа BN/N . Если в BN/N нет подгрупп Шмидта, то G/N удовлетворяет условиям следствия. Пусть K/N – подгруппа Шмидта из BN/N . По тождеству Дедекинда $K = K \cap BN = (K \cap B)N$ и $K \cap B$ – добавление к подгруппе N в K . Пусть $L \leq K \cap B$ – минимальное добавление к подгруппе N в K . По лемме 1.3 L содержит подгруппу Шмидта S нечетного порядка и $L = (S)^L$. Так как $S \leq L \leq B$, то по условию P перестановочна с подгруппой S . Тогда P перестановочна с подгруппой S^g для любого $g \in G$ по лемме 1.6. По лемме 1.4 P перестановочна с $S^L = L$. Поэтому PN/N перестановочна с $LN/N = K/N$. Таким образом, все условия следствия наследуют фактор-группы G/N . По индукции G/N либо разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы G/N изоморфны $PSL(2, 7)$.

Так как N – нормальная подгруппа группы G , $G = PB$ и $(|P|, |B|) = 1$, то по [11] $N = (N \cap P)(N \cap B)$, где $P_1 = N \cap P$ – силовская 2 -подгруппа подгруппы N , а $B_1 = N \cap B$ – $2'$ -холлова подгруппа в N . Если в B_1 нет подгрупп Шмидта, то B_1 нильпотентна и по теореме Виландта–Кегеля группа N разрешима. Будем считать, что в B_1 есть подгруппы Шмидта. Из

доказательства теоремы следует, что силовская 2 -подгруппа P_1 группы N перестановочна со всеми подгруппами Шмидта из B_1 . По индукции либо N разрешима, либо неабелевы композиционные факторы группы N изоморфны $PSL(2, 7)$. Тогда группа G удовлетворяет заключению следствия.

В дальнейшем считаем, что G – простая группа. Пусть T – произвольная подгруппа Шмидта из B . Предположим, что $PT < G$. Тогда по лемме 1.6 P перестановочна с подгруппой T^g для любого $g \in G$ и $P^G \neq G$, либо $T^G \neq G$ по лемме 1.5. Противоречие. Поэтому $PT = G$. По лемме 1.2 $G \cong PSL(2, 7)$. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов, В.С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Матем. зам. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.
2. Монахов, В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса-2001. – 2002, секция 1. – С. 81–90.
3. Тютянов, В.Н. Конечные группы с нильпотентными подгруппами нечетного порядка / В.Н. Тютянов, П.В. Бычков // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 84–86.
4. Беркович, Я.Г. О перестановочности подгрупп конечной группы / Я.Г. Беркович, Э.М. Пальчик // Сиб. мат. журн. – 1967. – Т. 8, № 4. – С. 741–753.
5. Княгина, В.Н. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 130–139.
6. Монахов, В.С. О композиционных факторах конечной группы с OS -полуноормальной силовской подгруппой / В.С. Монахов, Е.В. Зубей // Труды института математики НАН Беларуси. – 2018. – Т. 26:1. – С. 90–94.
7. Монахов, В.С. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта из некоторого ее добавления / В.С. Монахов, Е.В. Зубей // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 145–154.
8. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
9. Huppert, B. Endliche Gruppen I / В. Huppert. – Berlin, Heidelberg, New York, 1967. – 796 p.
10. Княгина, В.Н. Конечные группы с полуноормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.
11. Монахов, В.С. Произведение бипримарной и 2 -разложимой групп / В.С. Монахов // Матем. зам. – 1978. – Т. 23, № 5. – С. 641–649.

Поступила в редакцию 20.12.18.