УДК 517.9

А.В. Чичурин

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБЩИХ ИНТЕГРАЛОВ СПЕЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ У УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА

Рассматривается метод построения общего интеграла специальной формы для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Получены два коэффициентных соотношения, при выполнении которых рассматриваемое уравнение имеет заданный общий интеграл. Существует редукция, позволяющая свести нелинейное уравнение второго порядка к уравнению Абеля первого рода. Для этого уравнения также приводятся коэффициентные соотношения, позволяющие построить его общий интеграл. Рассмотрены два примера, иллюстрирующие приводимую технику. Указана идея обобщения данного метода на дифференциальные уравнения более высоких порядков.

В работе [1] был приведен метод построения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, общий интеграл которого имеет специальный вид. В данной статье приводится модернизация этого метода и строятся примеры. В первую очередь отметим, что полученные результаты используются затем для интегрирования уравнения Абеля первого рода [2]. Отыскание коэффициентных соотношений, при выполнении которых уравнение Абеля интегрируется в замкнутой форме важно не только с теоретической точки зрения, но и с точки зрения многочисленных приложений этого уравнения. Некоторые такие приложения приведены в работах [2–5]. Сама постановка задачи является классической. Например, в работе [6] приведена следующая ее формулировка: «Задавая вид дифференциального уравнения, необходимо искать для этого уравнения различные формы общего интеграла и условия существования этих форм».

Рассмотрим следующую функцию

$$\varphi_3(x) = C_1\,\varphi_1(x)\exp\big(\lambda_1\,y(x)\big) + C_2\,\varphi_2(x)\exp\big(\lambda_2\,y(x)\big), \qquad (1)$$

где C_i $(i=1,2)-$ произвольные постоянные, φ_j $(j=1,2,3)-$произвольные, отличные от нуля, аналитические функции; $\lambda_1,\ \lambda_2 -$ некоторые постоянные.

Сформулируем следующую задачу: найти дифференциальное уравнение второго порядка, общий интеграл которого имеет вид (1). Сведем построенное уравнение второго порядка к уравнению Абеля и установим для последнего вид общего интеграла.

Теорема 1. *Уравнение*

$$A\,y'' + B_0 y'^3 + B_1 y'^2 + B_2 y' + B_3 = 0 \qquad (2)$$

имеет общий интеграл вида

$$C_1\ \exp\Big(\lambda_1\,y - \int \eta\,dx\Big) + C_2\ \exp\Big(\lambda_2\,y + \int \xi\,dx\Big) = 1, \qquad (3)$$

если выполняются условия

$$\frac{1}{B_0}[(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)A^2 + 3(B_0B_2 + B_0A' - AB_0') - B_1^2] = 0, \qquad (4)$$

$$(2\lambda_1^3 - 3\lambda_1^2\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2 + 2\lambda_2^3)A^3 - 3(\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2)A^2B_1 +$$
$$+ B_1^3 + 9B_0(B_1'A - A'B_1 - 3B_0B_3) = 0 \qquad (5)$$

и имеют место соотношения

$$\xi = \frac{\lambda_2}{3\,B_0}\left(B_1 - (\lambda_2 - 2\lambda_1)\,A\right), \quad \eta = \frac{\lambda_1}{3\,B_0}\left(-B_1 + (\lambda_1 - 2\lambda_2)\,A\right). \tag{6}$$

Доказательство. Продифференцируем (1)

$$\varphi_3' = C_1(\lambda_1\,\varphi_1\,y' + \varphi_1')\ \exp(\lambda_1\,y) + C_2(\lambda_2\,\varphi_2\,y' + \varphi_2')\ \exp(\lambda_2\,y). \tag{7}$$

Рассмотрим систему уравнений (1), (7), которая, очевидно, является линейной относительно неизвестных C_1 и C_2. Решая ее, получим

$$C_1 = \frac{\varphi_2\varphi_3' - \lambda_2\varphi_2\varphi_3 y' - \varphi_2'\varphi_3}{\varphi_1'\varphi_2 + (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_1\varphi_2 y' - \varphi_1\varphi_2'}\ e^{-\lambda_1 y},\ C_2 = \frac{\varphi_1\varphi_3' - \lambda_1\varphi_1\varphi_3 y' - \varphi_1'\varphi_3}{\varphi_1\varphi_2' + (\lambda_2 - \lambda_1)\varphi_1\varphi_2 y' - \varphi_2\varphi_1'}\ e^{-\lambda_2 y}. \tag{8}$$

Продифференцируем (7) и подставим соответственно вместо C_1 и C_2 их значения из (8). После преобразований полученное уравнение примет вид (2), где коэффициенты A, B_0, B_1, B_2, B_3 определяются согласно формулам

$$\begin{aligned}
&A \equiv \lambda_1\varphi_1\varphi_2'\varphi_3 - \varphi_2(\lambda_2\varphi_1'\varphi_3 + (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_1\varphi_3'),\ B_0 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)\,\varphi_1\varphi_2\varphi_3,\\
&B_1 = 2\lambda_1\lambda_2\varphi_3(\varphi_2\varphi_1' - \varphi_1\varphi_2') + \lambda_2^{\,2}\varphi_2(\varphi_1\varphi_3' - \varphi_3\varphi_1') + \lambda_1^{\,2}\varphi_1(\varphi_3\varphi_2' - \varphi_2\varphi_3'),\\
&B_2 = 2\lambda_2\varphi_1\varphi_2'\varphi_3' + \varphi_3(2(\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_1'\varphi_2' + \lambda_2\varphi_2\varphi_1'' - \lambda_1\varphi_1\varphi_2'') + \varphi_2(-2\lambda_1\varphi_1'\varphi_3' + (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_1\varphi_3''),\\
&B_3 = \varphi_3(\varphi_1''\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2'') + \varphi_2(\varphi_1'\varphi_3'' - \varphi_1''\varphi_3') + \varphi_1(\varphi_2''\varphi_3' - \varphi_2'\varphi_3'').
\end{aligned} \tag{9}$$

Иногда уравнение вида (2) называют (см. напр. [7, с. 255]) уравнением геодезических линий.

Введем в рассмотрение функции

$$\xi = \frac{\varphi_2'}{\varphi_2} - \frac{\varphi_3'}{\varphi_3}, \quad \eta = \frac{\varphi_3'}{\varphi_3} - \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}, \quad \psi = \varphi_1\varphi_2\varphi_3. \tag{10}$$

Учитывая равенства (10), перепишем соотношения (9) в виде

$$\begin{gathered}
A \equiv (\lambda_2\eta + \lambda_1\xi)\psi,\ B_0 = \lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)\,\psi,\\
B_1 = (\lambda_2^{\,2}\eta + \lambda_1^{\,2}\xi - 2\lambda_1\lambda_2(\eta + \xi))\psi,\\
B_2 = (\lambda_2(\eta^2 + 2\eta\xi - \eta') - \lambda_1(2\eta\xi + \xi^2 + \xi')\psi,\\
B_3 = (\eta^2\xi - \xi\eta' + \eta(\xi^2 + \xi'))\psi.
\end{gathered} \tag{11}$$

Из второго равенства системы (11) выразим функцию ψ и подставим в первое и третье уравнения этой системы. Полученная система является линейной относительно переменных ξ и η. Решим ее относительно этих переменных

$$\xi = \frac{\lambda_2}{3b_0}(A(2\lambda_1 - \lambda_2) + B_1),\ \eta = \frac{\lambda_1}{3b_0}(A(\lambda_1 - 2\lambda_2) - B_1). \tag{12}$$

Подставим затем функции (12) в четвертое и пятое уравнения системы (11). После преобразований получим соответственно соотношения (4) и (5).

Интеграл (1) можно переписать в виде (3), если воспользоваться первым и вторым уравнениями системы (10). Ч.т.д.

Теорема 2. *Уравнение Абеля первого рода*

$$A\,z' + B_0 z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3 = 0, \tag{13}$$

коэффициенты которого A, B_0, B_1, B_2, B_3 удовлетворяют соотношениям (4), (5), имеет общий интеграл вида

$$z = \frac{e^{\lambda_1 y}\eta - C\xi e^{\int \eta\, dx + \int \xi\, dx + \lambda_2 y}}{\lambda_1 e^{\lambda_1 y} + C\lambda_2 e^{\int \eta\, dx + \int \xi\, dx + \lambda_2 y}}, \qquad (14)$$

где $C \equiv \dfrac{C_2}{C_1}$ – *произвольная постоянная, переменная y связана с переменной x соотношением (3), а функции ξ, η определяются по формулам (6).*

Доказательство. Следует из доказательства теоремы 1, а именно: применяя к уравнению (2) очевидную замену

$$y' = z\,, \qquad (15)$$

получим уравнение (13).

Дифференцируя затем (3) по x и подставляя y' в соотношение (15), получаем общее решение (14) в параметрической форме, в котором $C \equiv C_1^{-1}C_2$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение (2), у которого коэффициенты A, B_0, B_1 имеют вид

$$A = x, B_0 = \alpha x^{\beta}, B_1 = \gamma x^{\delta} \,(\alpha,\beta,\gamma,\delta - const; \beta \neq 2, \delta \neq \beta - 1). \qquad (16)$$

Подставим соотношения (16) в равенства (12) и определим функции ξ и η

$$\xi = \frac{\lambda_2 x^{-\beta}(\gamma x^{\delta} + (2\lambda_1 - \lambda_2)x)}{3\alpha}, \quad \eta = \frac{\lambda_1 x^{-\beta}((\lambda_1 - 2\lambda_2)x - \gamma x^{\delta})}{3\alpha}. \qquad (17)$$

Далее подставляем (16) и (17) в равенства (4) и (5) и получаем уравнения, из которых найдем функции B_2, B_3

$$B_2 = \frac{x^{-\beta}(\gamma^2 x^{2\delta} + 3\alpha(\beta - 1)x^{\beta} - (\lambda_1^{\,2} - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^{\,2})x^2)}{3\alpha}, \qquad (18)$$

$$B_3 = \frac{x^{-2\beta}(\gamma x^{\delta}(\gamma^2 x^{2\delta} + 9\alpha(\delta - 1)x^{\beta} + 2\lambda_1^{\,3}x^3 - 3\gamma\lambda_2^{\,2}x^{\delta+2} + 2\lambda_2^{\,3}x^3}{3\alpha} +$$

$$\frac{3\lambda_1\lambda_2(\gamma x^{\delta} - \lambda_2 x)x^2 - 3\lambda_1^{\,2}x^2(\gamma x^{\delta} + \lambda_2 x)}{3\alpha}.$$

Учитывая вид функций ξ и η (17), запишем общий интеграл уравнения (2) с коэффициентами (16), (18)

$$C_1 \exp\left(\lambda_1 y + \frac{\lambda_1 x^{1-\beta}\left(\dfrac{\gamma x^{\delta}}{1 - \beta + \delta} + \dfrac{(\lambda_1 - 2\lambda_2)x}{\beta - 2}\right)}{3\alpha}\right) + C_2 \exp\left(\lambda_2 y + \frac{\lambda_2 x^{1-\beta}\left(\dfrac{\gamma x^{\delta}}{1 - \beta + \delta} - \dfrac{(2\lambda_1 - \lambda_2)x}{\beta - 2}\right)}{3\alpha}\right) = 1$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение (2), у которого коэффициенты A, B_0, B_1 имеют вид

$$A = x, B_0 = \alpha x^2, B_1 = \gamma x \;(\alpha, \gamma - const). \qquad (19)$$

Подставим соотношения (19) в равенства (12) и определим функции ξ и η

$$\xi=\frac{\lambda_2 x^{-\beta}(\gamma x^{\delta}+(2\lambda_1-\lambda_2)x)}{3\alpha},\quad \eta=\frac{\lambda_1 x^{-\beta}((\lambda_1-2\lambda_2)x-\gamma x^{\delta})}{3\alpha}. \qquad (20)$$

Далее подставляем (19) в равенства (4) и (5) и получаем уравнения, из которых найдем функции B_2, B_3

$$B_2=\frac{3\alpha+\gamma^2-\lambda_1{}^2+\lambda_1\lambda_2-\lambda_2{}^2}{3\alpha}, \qquad (21)$$

$$B_3=\frac{2\lambda_1{}^3+3\lambda_1(\gamma-\lambda_2)\lambda_2-3\lambda_1{}^2(\gamma+\lambda_2)+(\gamma-\lambda_2)^2(\gamma+2\lambda_2)}{27\alpha^2 x}.$$

Учитывая вид функций ξ и η (20), запишем общий интеграл уравнения (2) с коэффициентами (19, (20) в виде

$$C_1\exp\left(\lambda_1 y+\frac{\lambda_1\ln x(2\lambda_2-\lambda_1+\gamma)}{3\alpha}\right)+C_2\exp\left(\lambda_2 y+\frac{\lambda_2\ln x(2\lambda_1-\lambda_2+\gamma)}{3\alpha}\right)=1.$$

Построим несколько интегральных кривых этого семейства. Положим

$$C_1=1, C_2=2, \alpha=1, \gamma=1.$$

И возьмем четыре набора (λ_1, λ_2), соответственно равные наборам

(1, 2), (1, –2), (–1, 2), (–1, –2).

Соответствующие интегральные кривые γ_i (i = 1, 2, 3, 4) будут определяться соответственно соотношениями

$$e^y x^{2/3}(2e^y+x^{2/3})=1,\ e^{-2y}x^{-10/3}(2+x^2e^{3y})=1,$$
$$x^{-2}(e^{-y}+2e^{2y})=1,\ e^y=2e^{-y}x^{-2/3}+x^{2/3}. \qquad (22)$$

Графики этих кривых приведены на рисунке 1. Отметим существование точек неединственности.

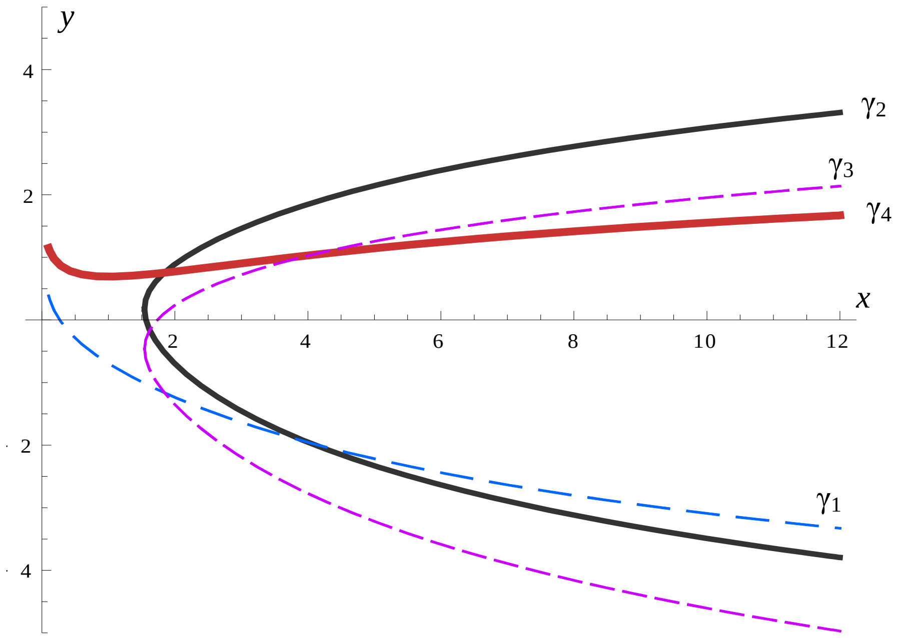

Рисунок 1 – Интегральные кривые, определяемые уравнениями (22)

Замечание 1. Известно (например [2 ;4]), что если инвариант Лиувилля

$$I(x) \equiv f_0 + \left(\frac{f_2}{3f_3}\right)' - \frac{f_1}{f_2} + 2\ \frac{f_2{}^2}{27f_3{}^3}$$

равен нулю, то уравнение Абеля

$$z' = f_3 z^3 + f_2 z^2 + f_1 z + f_0 \qquad (23)$$

разрешимо.

Коэффициенты уравнений (13) и (23) связаны соотношениями

$$f_3 \equiv -\frac{B_0}{A}, \quad f_2 \equiv -\frac{B_1}{A}, \quad f_1 \equiv -\frac{B_2}{A}, \quad f_0 \equiv -\frac{B_3}{A}.$$

Учитывая это, можно утверждать, что если

$$I(x) \equiv \left(\frac{B_1}{3B_0}\right)' - \frac{2AB_1{}^2}{27B_0{}^3} - \frac{B_2}{B_1} - \frac{B_3}{A} = 0,$$

то уравнение (2) также интегрируется в квадратурах в замкнутом виде.

Обобщим наши рассуждения на уравнения порядка, выше второго. Приведем рассуждения для уравнения третьего порядка. Для этого рассмотрим следующую функцию

$$\varphi_4(x) = F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, y, C_1, C_2, C_3), \qquad (24)$$

где

$$F = C_1\, \varphi_1\ \exp(\lambda_1\, y) + C_2\, \varphi_2\ \exp(\lambda_2\, y) + C_3\, \varphi_3\ \exp(\lambda_3\, y), \qquad (25)$$

и $C_i\ (i = 1,2,3)$ – произвольные постоянные, $\varphi_j\ (j = \overline{1,4})$ – произвольные аналитические функции аргумента x. Найдем $\varphi_4{}'(x)$ и $\varphi_4{}''(x)$, продифференцировав (24)

$$\varphi_4{}' = F'_x,\ \varphi_4{}'' = F''_{xx}. \qquad (26)$$

Система (24)–(26) является линейной относительно неизвестных C_1, C_2, C_3. Решим эту систему и подставим найденные значения C_1, C_2, C_3 в уравнение

$$\varphi_4{}''' = F'''_{xxx}.$$

После выполнения необходимых преобразований, последнее уравнение примет вид

$$(E_2\, y'^2 + E_1\, y' + E_0)\, y''' + (D_1\, y' + D_0)\, y''^2 + \left(\sum_{i=0}^{3} B_i\, y'^i\right) y'' + \sum_{i=0}^{6} A_i\, y'^i = 0, \qquad (27)$$

где $E_2, E_1, E_0, D_1, D_0, B_i\ (i = \overline{0,3}), A_i\ (i = \overline{0,6})$ – функции от $\varphi_k(x)\ (k = 1,2,3,4)$ и их производных.

Замечание 2. Уравнение (27) с помощью замены (15) сводится к уравнению второго порядка вида

$$(E_2\, z^2 + E_1\, z + E_0)\, z'' + (D_1\, z + D_0)\, z'^2 + \left(\sum_{i=0}^{3} B_i\, z^i\right) z' + \sum_{i=0}^{6} A_i\, z^i = 0. \qquad (28)$$

Таким образом, после получения условий существования интеграла вида (25) для уравнения (27) легко получить условия интегрируемости уравнения (28).

Замечание 3. Применяя используемый метод, можно получить дифференциальные уравнения четвертого и более высокого порядков, для которых общий интеграл имеет вид

$$\varphi_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x) \exp\left(\lambda_i \, y(x)\right),$$

где $\varphi_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ – произвольные аналитические функции от x, λ_i $(i = \overline{1,n})$ – фиксированные постоянные, C_i $(i = \overline{1,n})$ – произвольные постоянные. При этом получающееся уравнение будет иметь порядок n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукашевич, Н.А. К теории уравнения геодезических линий / Н.А. Лукашевич, А.В. Чичурин // Нелінійні коливання. – 1999. – Т. 2, № 1. – С. 30–35.

2. Зайцев, В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с.

3. Зайцев, В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям : Приложения в механике, точные решения / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М. : Наука, 1993. – 462 с.

4. Лукашевич, Н.А. Дифференциальные уравнения первого порядка / Н.А. Лукашевич, А.В. Чичурин. – Минск : БГУ, 1999. – 210 с.

5. Чичурин, А.В. Использование системы *Mathematica* при поиске конструктивных методов интегрирования уравнения Абеля / А.В. Чичурин // Вучоныя запіскі БрДУ імя А.С. Пушкіна. – 2007. – Т. 3, Ч. 2. – С. 24–38.

6. Коялович, Б.М. Исследования о дифференциальном уравнении $ydy - ydx = Rdx$ / Б.М. Коялович. – СПб. : Типограф. Академии наук, 1894. – 261 с.

7. Бюшгенс, С.С. Дифференциальная геометрия / С.С. Бюшгенс. – М. : ГИТТЛ, 1940. – 300 с.

A.V. Chichurin. On the Existence of General Integrals of the Special Form for Abel Equation of the First Kind

The method of a general integral construction of the special form for the nonlinear differential equation of the second order is considered. Two coefficient conditions are obtained. When these conditions are true, the differential equation has the given general integral. There is a reduction, which allows transforming of the nonlinear equation of the second order into the Abel equation of the first kind. Similar coefficient conditions are also found for the Abel equation. Two examples which illustrate the given method are considered. The idea of generation of the given method on the differential equations of the higher orders is written.