МАТЭМАТЫКА

УДК 519.24

Т.И. Воротницкая

ОЦЕНКИ КОВАРИАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ПУАССОНОВСКИМИ ПРОПУСКАМИ НАБЛЮДЕНИЙ

Рассматривается амплитудная модуляция стационарного случайного процесса. Нерегулярности задаются независимой последовательностью, распределенной по закону Пуассона. Построены оценки ковариационной функции и спектральной плотности для стационарного случайного процесса с нерегулярными наблюдениями и исследованы их статистические свойства.

В последние годы в социальных науках, в физике, медицине, в приложениях, связанных с обработкой данных, широкое распространение получили практические задачи, связанные с пропусками наблюдений.

В частотной области спектральный анализ для процессов с пропущенными наблюдениями проведен в [7; 9]. Спектральный анализ в случае, когда пропуски наблюдений носят случайный характер, рассмотрен в [3; 10]. В [9] рассматривалась случайная последовательность вида

$$Y(t) = X(t)d(t), \;\; t \in Z, \tag{1}$$

которая называется амплитудной модуляцией процесса $X(t),\ t \in Z$. Различные примеры случайной последовательности $d(t),\ t \in Z$ исследовались в [4; 5; 6]. Как стохастический процесс $d(t),\ t \in Z$ рассматривался в [3; 10]. Случай, когда $d(t),\ t \in Z$ – последовательность независимых бернуллиевских случайных величин, исследован в [10], в то время как в [3] эти результаты обобщены для зависимых последовательностей. В [8] исследовалась состоятельность оценок автоковариационной функции и спектральной плотности для авторегрессионных процессов в случае амплитудно-модулированного процесса с пропущенными данными.

В данной статье предлагается рассмотреть случай, когда $d(t),\ t \in Z$ является независимой последовательностью, распределенной по закону Пуассона.

Рассмотрим стационарный в широком смысле случайный процесс $X(t),\ t \in Z$ с математическим ожиданием $m^X = 0$, ковариационной функцией $R^X(\tau),\ \tau \in Z$, спектральной плотностью $f^X(\lambda),\ \lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, семиинвариантной спектральной плотностью четвертого порядка $f_4^X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),\ \lambda_i \in \Pi,\ i = \overline{1,3}$ и смешанным моментом четвертого порядка $m_4^X(t_1, t_2, t_3),\ \ t_i \in \mathrm{Z}, i = \overline{1,3}$. Пусть в результате некоторого эксперимента через равные промежутки времени получено T последовательных наблюдений

$$Y(0), Y(1), ..., Y(T-1) \tag{2}$$

за процессом $Y(t), t \in Z$, который связан с процессом $X(t), t \in Z$ соотношением (1), где $d(t),\ t \in Z$ – последовательность независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона с параметром $\alpha > 0$. Предположим, что $d(t),\ t \in Z$ не зависит от процесса $X(t),\ t \in Z$.

В качестве оценки ковариационной функции процесса $X(t),\ t \in Z$, построенной по наблюдениям (2), рассмотрим статистику вида

$$\hat{R}^X(\tau) = \frac{1}{(T-\tau)C_\tau^d} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} Y(t+\tau)Y(t), \tau = \overline{0, T-1}, \tag{3}$$

$$\hat{R}^X(-\tau) = \hat{R}^X(\tau), \hat{R}^X(\tau) = 0, |\tau| \ge T,$$

где

$$C_\tau^d = \begin{cases} \alpha + \alpha^2, \tau = 0, \\ \alpha^2, \tau \ne 0, \end{cases} \tag{4}$$

α – параметр пуассоновского распределения.

Теорема 1. Оценка ковариационной функции (3) является несмещенной и при условии, что $\sum\limits_{u=-\infty}^{\infty} \left(R^X(u)\right)^2 < \infty$ и $\sum\limits_{u=-\infty}^{\infty} c_4^X(u+\tau, u, \tau) < \infty$ равномерно по всем $\tau \in Z$, $\lim\limits_{T\to\infty} D\hat{R}^X(\tau) = 0$, то есть статистика (3) является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для $R^X(\tau)$.

Доказательство. Используя свойства математического ожидания, определение ковариационной функции и независимость $X(t)$ и $d(t),\ t \in Z$, получим

$$M\hat{R}^X(\tau) = \frac{1}{(T-\tau)C_\tau^d} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} R^X(\tau) M d(t+\tau) d(t) = R^X(\tau),$$

что и доказывает несмещенность оценки.

Используя определение дисперсии, свойства математического ожидания и соотношение (1), имеем

$$D\hat{R}^X(\tau) = \frac{1}{(T-\tau)^2\left(C_\tau^d\right)^2} \sum_{t_1=0}^{T-\tau-1} \sum_{t_2=0}^{T-\tau-1} M\left[Y(t_1+\tau)Y(t_1)Y(t_2+\tau)Y(t_2)\right] - \left(R^X(\tau)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(T-\tau)^2\left(C_\tau^d\right)^2} \sum_{t_1=0}^{T-\tau-1} \sum_{t_2=0}^{T-\tau-1} M\left[X(t_1+\tau)X(t_1)X(t_2+\tau)X(t_2)\right] \times$$

$$\times M\left[d(t_1+\tau)d(t_1)d(t_2+\tau)d(t_2)\right] - \left(R^X(\tau)\right)^2.$$

Учитывая определения смешанных моментов четвертого порядка, свойства последовательности $d(t),\ t \in Z$ и обозначение (4), перепишем выражение для дисперсии оценки в виде

$$D\hat{R}^X(\tau) = \frac{1}{(T-\tau)^2} \sum_{t_1=0}^{T-\tau-1} \sum_{t_2=0}^{T-\tau-1} m_4^X(t_1 - t_2 + \tau, t_1 - t_2, \tau) + \frac{1}{(T-\tau)} \left(\frac{(\alpha+\alpha^2)^2}{\alpha^4} - 1 \right) m_4^X(\tau, 0, \tau) - \left(R^X(\tau)\right)^2.$$

Далее, используя соотношение

$$m_4(t_1,t_2,t_3,t_4)=c_4(t_1,t_2,t_3,t_4)+c(t_1)c_3(t_2,t_3,t_4)+c(t_2)c_3(t_1,t_3,t_4)+c(t_3)c_3^d(t_1,t_2,t_4)+$$
$$+c(t_4)c_3^d(t_1,t_2,t_3)+c_2(t_1,t_2)c_2(t_3,t_4)+c_2(t_1,t_3)c_2(t_2,t_4)+c_2(t_1,t_4)c_2(t_2,t_3)+$$
$$+c(t_1)c(t_2)c_2(t_3,t_4)+c(t_1)c(t_3)c_2(t_2,t_4)+c(t_1)c(t_4)c_2(t_2,t_3)+c(t_2)c(t_3)c_2(t_1,t_4)+$$
$$+c(t_2)c(t_4)c_2(t_1,t_3)+c(t_3)c(t_4)c_2(t_1,t_2)+c(t_1)c(t_2)c(t_3)c(t_4)$$

и учитывая, что математическое ожидание процесса $X(t)$ равно нулю, перейдем от смешанных моментов к смешанным семиинвариантам четвертого порядка, получим

$$D\hat{R}^X(\tau)=\frac{1}{(T-\tau)^2}\sum_{t_1=0}^{T-\tau-1}\sum_{t_2=0}^{T-\tau-1}\Big[c_4^X(t_1-t_2+\tau,t_1-t_2,\tau)+$$
$$+R^X(t_1+\tau-t_2-\tau)R^X(t_1-t_2)+R^X(t_1-t_2-\tau)R^X(t_1+\tau-t_2)\Big]+ \tag{5}$$
$$+\frac{1}{(T-\tau)}\left(\frac{(\alpha+\alpha^2)^2}{\alpha^4}-1\right)\Big[c_4^X(\tau,0,\tau)+2\big(R^X(\tau)\big)^2+\big(R^X(0)\big)^2\Big]$$

Сделаем замену переменных $t=t_1,\ u=t_1-t_2$ и перепишем выражение для дисперсии в виде

$$D\hat{R}^X(\tau)=\frac{1}{(T-\tau)}\left(\frac{(\alpha+\alpha^2)^2}{\alpha^4}-1\right)\Big(c_4^X(\tau,0,\tau)+2\big(R^X(\tau)\big)^2+\big(R^X(0)\big)^2\Big)+$$
$$+\frac{1}{(T-\tau)^2}\left[\sum_{u=1-T+\tau}^{-1}\sum_{t=0}^{u+T-\tau-1}J(u,\tau)+\sum_{\substack{t=u\\u=0}}^{u+T-\tau-1}J(u,\tau)+\sum_{u=1}^{T-\tau-1}\sum_{t=u}^{T-\tau-1}J(u,\tau)\right],$$

где

$$J(u,\tau)=\Big[c_4^X(u+\tau,u,\tau)+\big(R^X(u)\big)^2+R^X(u-\tau)R^X(u+\tau)\Big].$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках, получим

$$\frac{1}{(T-\tau)^2}\left[\sum_{u=1-T+\tau}^{-1}(u+T-\tau)J(u,\tau)+(T-\tau)J(0,\tau)+\sum_{u=1}^{T-\tau-1}(T-\tau-u)J(u,\tau)\right]=$$
$$=\frac{1}{(T-\tau)}\left[\sum_{u=1-T+\tau}^{-1}\left(\frac{u}{T-\tau}+1\right)J(u,\tau)+J(0,\tau)+\sum_{u=1}^{T-\tau-1}\left(1-\frac{u}{T-\tau}\right)J(u,\tau)\right].$$

Таким образом,

$$D\hat{R}^X(\tau)=\frac{1}{(T-\tau)}\left(\frac{(\alpha+\alpha^2)^2}{\alpha^4}-1\right)\Big(c_4^X(\tau,0,\tau)+2\big(R^X(\tau)\big)^2+\big(R^X(0)\big)^2\Big)+$$
$$+\frac{1}{(T-\tau)}\left[\sum_{u=-(T-\tau-1)}^{T-\tau-1}\left(1+\frac{\varphi(u)}{T-\tau}\right)J(u,\tau)\right],$$

где

$$\varphi(u)=\begin{cases}u,u=\overline{-(T-\tau-1),-1},\\ 0,u=0,\\ -u,u=\overline{1,(T-\tau-1)}.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\lim_{T\to\infty}(T-\tau)D\hat{R}^X(\tau)=\left(\frac{(\alpha+\alpha^2)^2}{\alpha^4}-1\right)\Big(c_4^X(\tau,0,\tau)+2\big(R^X(\tau)\big)^2+\big(R^X(0)\big)^2\Big)+\sum_{u=-\infty}^{\infty}J(u,\tau).$$

В условиях теоремы очевидно, что при $T \to \infty$ предел дисперсии равен нулю. Следовательно, оценка ковариационной функции является состоятельной в среднеквадратическом смысле. Теорема доказана.

Теорема 2. Если $\int\limits_{\Pi} f^X(x)^2 dx < \infty, \iint\limits_{\Pi^2} f^X(x_1, -x_1, x_3) dx_1 dx_3 < \infty$ и спектральные плотности $f^X(x)$, $f^X(x_1, x_2, x_3)$ непрерывны соответственно на Π и Π^3, то

$$\lim_{T\to\infty}(T-\tau) D\hat{R}^X(\tau) = 2\pi\left[g_1(0) + g_2(0) + g_3(0)\right] + \left(\frac{(\alpha+\alpha^2)^2}{\alpha^4} - 1\right) G(\tau),$$

где

$$g_1(z) = \iint\limits_{\Pi^2} f^X(x_1, z - x_1, x_3) e^{i\tau(x_1+x_3)} dx_1 dx_3,$$

$$g_2(z) = \int\limits_{\Pi} f^X(x_1) f^X(z - x_1) dx_1,$$

$$g_3(z) = \int\limits_{\Pi} f^X(x_1) f^X(z - x_1) e^{i\tau(z-2x_1)} dx_1,$$

$$G(\tau) = \iiint\limits_{\Pi^3} f^X(x_1, x_2, x_3) e^{i\tau(x_1+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + 2\left(\int\limits_{\Pi} f^X(x) e^{i\tau x} dx\right)^2 + \left(\int\limits_{\Pi} f^X(x) dx\right)^2.$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (5). Подставляя вместо смешанных семиинвариантов четвертого порядка их выражения через семиинвариантные спектральные плотности [2, с. 21], а вместо ковариационных функций их выражения через спектральные плотности [2, с. 20], имеем

$$(T-\tau) D\hat{R}^X(\tau) = \frac{1}{(T-\tau)}\Bigg[\iiint\limits_{\Pi^3} f^X(x_1, x_2, x_3) \sum_{t_1=0}^{T-\tau-1} e^{it_1(x_1+x_2)} \sum_{t_2=0}^{T-\tau-1} e^{-it_2(x_1+x_2)} e^{i\tau(x_1+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 +$$

$$+ \int\limits_{\Pi} f^X(x_1) \int\limits_{\Pi} f^X(x_2) \sum_{t_1=0}^{T-\tau-1} e^{it_1(x_1+x_2)} \sum_{t_2=0}^{T-\tau-1} e^{-it_2(x_1+x_2)} dx_1 dx_2 +$$

$$+ \int\limits_{\Pi} f^X(x_1) \int\limits_{\Pi} f^X(x_2) \sum_{t_1=0}^{T-\tau-1} e^{it_1(x_1+x_2)} \sum_{t_2=0}^{T-\tau-1} e^{-it_2(x_1+x_2)} e^{i\tau(-x_1+x_2)} dx_1 dx_2\Bigg] +$$

$$+ \left(\frac{(\alpha+\alpha^2)^2}{\alpha^4} - 1\right)\left[\iiint\limits_{\Pi^3} f^X(x_1, x_2, x_3) e^{i\tau(x_1+x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 + 2\left(\int\limits_{\Pi} f^X(x) e^{i\tau x} dx\right)^2 + \left(\int\limits_{\Pi} f^X(x) dx\right)^2\right].$$

Учитывая, что

$$\sum_{t=0}^{T-1} e^{itx} = \Delta_T(x) e^{\frac{i(T-1)x}{2}},$$

где $\Delta_T(x) = \sin\frac{Tx}{2} \sin^{-1}\frac{x}{2}$**, получим следующее выражение**

$$(T-\tau)D\hat{R}^X(\tau)=\frac{1}{(T-\tau)}\left[\iiint\limits_{\Pi^3} f^X(x_1,x_2,x_3)\Delta^2_{T-\tau}(x_1+x_2)e^{i\tau(x_1+x_3)}dx_1dx_2dx_3+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Pi} f^X(x_1)\int\limits_{\Pi} f^X(x_2)\Delta^2_{T-\tau}(x_1+x_2)dx_1dx_2+\int\limits_{\Pi} f^X(x_1)\int\limits_{\Pi} f^X(x_2)\Delta^2_{T-\tau}(x_1+x_2)e^{i\tau(-x_1+x_2)}dx_1dx_2\right]+$$

$$+\left(\frac{(\alpha+\alpha^2)^2}{\alpha^4}-1\right)\left[\iiint\limits_{\Pi^3} f^X(x_1,x_2,x_3)e^{i\tau(x_1+x_3)}dx_1dx_2dx_3+2\left(\int\limits_{\Pi} f^X(x)e^{i\tau x}dx\right)^2+\left(\int\limits_{\Pi} f^X(x)dx\right)^2\right].$$

Сделаем замену переменных интегрирования $x_1=x_1, x_1+x_2=z, x_3=x_3$ и перепишем последнее выражение с учетом представления ядра Фейера $\Phi_{T-\tau}(z)=\frac{1}{2\pi(T-\tau)}\Delta^2_{T-\tau}(z)$.

Таким образом,

$$(T-\tau)D\hat{R}^X(\tau)=2\pi\int\limits_{\Pi}\Phi_{T-\tau}(z)\left[\iint\limits_{\Pi^2} f^X(x_1,z-x_1,x_3)e^{i\tau(x_1+x_3)}dx_1dx_3+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\Pi} f^X(x_1)f^X(z-x_1)dx_1+\int\limits_{\Pi} f^X(x_1)f^X(z-x_1)e^{i\tau(z-2x_1)}dx_1\right]dz+$$

$$+\left(\frac{(\alpha+\alpha^2)^2}{\alpha^4}-1\right)\left[\iiint\limits_{\Pi^3} f^X(x_1,x_2,x_3)e^{i\tau(x_1+x_3)}dx_1dx_2dx_3+2\left(\int\limits_{\Pi} f^X(x)e^{i\tau x}dx\right)^2+\left(\int\limits_{\Pi} f^X(x)dx\right)^2\right].$$

Учитывая условия теоремы, свойства ядра Фейера и представления функций $g_1(z), g_2(z), g_3(z), G(\tau)$, получаем требуемый результат. Теорема доказана.

Следствие. В условиях теоремы 2 статистика, задаваемая соотношением (3), является состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для $R^X(\tau)$, $\tau\in Z$.

Рассмотрим задачу построения оценки спектральной плотности процесса $X(t), t\in Z$ по наблюдениям за процессом $Y(t)$, $t\in Z$ и исследования ее статистических свойств. В качестве оценки спектральной плотности рассмотрим статистику

$$\hat{I}^T(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s=0}^{T-1}\frac{Y(t)Y(s)}{C^d_{t-s}}e^{-i\lambda(t-s)}, \lambda\in\Pi, \quad \textbf{(6)}$$

где C^d_{t-s} определено соотношением (4).

Теорема 3. Пусть семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка $f_4^X(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ непрерывна на Π^3 и спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна на Π, тогда статистика $\hat{I}^T(\lambda)$, задаваемая равенством (6), является асимптотически несмещенной оценкой для $f^X(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ и

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{I}^T(\lambda_1),\hat{I}^T(\lambda_2)\right\}\xrightarrow[T\to\infty]{}\begin{cases}0, \lambda_1\pm\lambda_2\neq 0(\mathrm{mod}\,2\pi)\\ f^X(\lambda_1)f^X(\lambda_2), \lambda_1\pm\lambda_2=0(\mathrm{mod}\,2\pi)\end{cases}, \lambda_1,\lambda_2\in\Pi.$$

Доказательство. Найдем математическое ожидание $\hat{I}^T(\lambda)$, используя свойства математического ожидания, выражение ковариационной функции через спектральную плотность и определение ядра Фейера. Имеем

$$M\overset{\wedge}{I^T}(\lambda)=\frac{1}{2\pi T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\frac{MX^2(t)Md^2(t)}{\alpha^2+\alpha}+\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{\substack{s=0\\s\neq t}}^{T-1}\frac{MX(t)X(s)Md(t)d(s)}{\alpha^2}e^{-i\lambda(t-s)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi T}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s=0}^{T-1}R^X(t-s)e^{-i\lambda(t-s)}\right]=\frac{1}{2\pi T}\int_\Pi f^X(z)\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{s=0}^{T-1}e^{i(t-s)(z-\lambda)}dz=\int_\Pi f^X(z+\lambda)\Phi_T(z)dz,$$

где $\Phi_T(z)$, $z\in\Pi$ – ядро Фейера. Учитывая непрерывность спектральной плотности и свойства ядра Фейера, получаем требуемое.

Докажем второе соотношение, используя определение ковариации и независимость процессов $X(t)$ и $d(t)$, $t\in Z$. Получим, что

$$\operatorname{cov}\left\{\overset{\wedge}{I^T}(\lambda_1),\overset{\wedge}{I^T}(\lambda_2)\right\}=M\,\overset{\wedge}{I^T}(\lambda_1)\overline{\overset{\wedge}{I^T}(\lambda_2)}-M\,\overset{\wedge}{I^T}(\lambda_1)M\,\overline{\overset{\wedge}{I^T}(\lambda_2)}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi T)^2}\left[\sum_{t=0}^{T-1}\left(\frac{1}{(\alpha+\alpha^2)^2}\sum_{j=0}^{T-1}M(X(t))^2(X(j))^2M(d(t))^2(d(j))^2+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(\alpha+\alpha^2)\alpha^2}\sum_{j=0}^{T-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{T-1}M(X(t))^2X(j)X(k)M(d(t))^2d(j)d(k)e^{i\lambda_2(j-k)}\right)+$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{\substack{s=0\\s\neq t}}^{T-1}\left(\frac{1}{\alpha^2(\alpha+\alpha^2)}\sum_{j=0}^{T-1}MX(t)X(s)(X(j))^2Md(t)d(s)(d(j))^2e^{-i\lambda_1(t-s)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\alpha^4}\sum_{j=0}^{T-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{T-1}MX(t)X(s)X(j)X(k)Md(t)d(s)(d(j)d(k)e^{-i\lambda_1(t-s)+i\lambda_2(j-k)}\right)-$$

$$\left.-\sum_{t,s=0}^{T-1}\sum_{j,k=0}^{T-1}\frac{1}{C_{t-s}^dC_{j-k}^d}MX(t)X(s)MX(j)X(k)Md(t)d(s)Md(j)d(k)e^{-i\lambda_1(t-s)+i\lambda_2(j-k)}\right].$$

Учитывая свойства математического ожидания, определение смешанных моментов четвертого и второго порядков, преобразуем выражение, стоящее в квадратных скобках. Имеем

$$\sum_{t=0}^{T-1}\left(\sum_{j=0}^{T-1}M(X(t))^2(X(j))^2+\sum_{j=0}^{T-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{T-1}M(X(t))^2X(j)X(k)e^{i\lambda_2(j-k)}\right)+$$

$$+\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{\substack{s=0\\s\neq t}}^{T-1}\left(\sum_{j=0}^{T-1}MX(t)X(s)(X(j))^2e^{-i\lambda_1(t-s)}+\sum_{j=0}^{T-1}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{T-1}MX(t)X(s)X(j)X(k)e^{-i\lambda_1(t-s)+i\lambda_2(j-k)}\right)-$$

$$-\sum_{t,s=0}^{T-1}\sum_{j,k=0}^{T-1}MX(t)X(s)MX(j)X(k)e^{-i\lambda_1(t-s)+i\lambda_2(j-k)}=$$

$$=\sum_{t,s=0}^{T-1}\sum_{j,k=0}^{T-1}m_4^X(t,s,j,k)e^{-i\lambda_1(t-s)}e^{i\lambda_2(j-k)}-\sum_{t,s=0}^{T-1}R^X(t-s)e^{-i\lambda_1(t-s)}\sum_{j,k=0}^{T-1}R^X(j-k)e^{i\lambda_2(j-k)}.$$

Используя связывающие соотношения между смешанными моментами и смешанными семиинвариантами, перепишем последнее выражение в следующем виде

$$\sum_{t,s=0}^{T-1}\sum_{j,k=0}^{T-1}\left(c_4^X(t-k,s-k,j-k)+R^X(t-j)R^X(s-k)+R^X(t-k)R^X(s-j)\right)e^{-i\lambda_1(t-s)}e^{i\lambda_2(j-k)}.$$

Подставляя вместо ковариационной функции и смешанного семиинварианта их выражения через спектральную плотность и семиинвариантную спектральную плотность четвертого порядка и используя представление функции $\Phi_T(y_1,...,y_n)$, $n=2,3,...$ [2, с. 86], получим

$$\operatorname{cov}\left\{\hat{I}^T(\lambda_1),\hat{I}^T(\lambda_2)\right\}=\frac{2\pi}{T}\iiint\limits_{\Pi^3} f_4^X(y_1+\lambda_1,y_2-\lambda_1,y_3-\lambda_2)\Phi_T(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3+$$
$$+\int\limits_{\Pi} f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_1,x_1-\lambda_2)dx_1\int\limits_{\Pi} f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_1,x_2+\lambda_2)dx_2+$$
$$+\int\limits_{\Pi} f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_1,x_1+\lambda_2)dx_1\int\limits_{\Pi} f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_1,x_2-\lambda_2)dx_2.$$

Учитывая непрерывность $f_4^X(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ на Π^3, $f^X(\lambda)$ на Π и свойства ядерной функции $\Phi_T(y_1,y_2,y_3)$, имеем

$$\frac{2\pi}{T}\iiint\limits_{\Pi^3} f_4^X(y_1+\lambda_1,y_2-\lambda_1,y_3-\lambda_2)\Phi_T(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_2dy_3\xrightarrow[T\to\infty]{}0,$$

$$\int\limits_{\Pi} f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_1,x_1-\lambda_2)dx_1\int\limits_{\Pi} f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_1,x_2+\lambda_2)dx_2\xrightarrow[T\to\infty]{}$$
$$\xrightarrow[T\to\infty]{}\begin{cases}0, & \lambda_1-\lambda_2\neq 0(\operatorname{mod}2\pi),\\ f^X(\lambda_1)f^X(\lambda_2), & \lambda_1-\lambda_2=0(\operatorname{mod}2\pi),\end{cases}$$

$$\int\limits_{\Pi} f^X(x_1)\Phi_T(x_1-\lambda_1,x_1+\lambda_2)dx_1\int\limits_{\Pi} f^X(x_2)\Phi_T(x_2+\lambda_1,x_2-\lambda_2)dx_2\xrightarrow[T\to\infty]{}$$
$$\xrightarrow[T\to\infty]{}\begin{cases}0, & \lambda_1+\lambda_2\neq 0(\operatorname{mod}2\pi),\\ f^X(\lambda_1)f^X(\lambda_2), & \lambda_1+\lambda_2=0(\operatorname{mod}2\pi).\end{cases}$$

Теорема доказана.

Таким образом, построенная оценка спектральной плотности не является состоятельной. Для получения состоятельной оценки сгладим ее спектральными окнами [2, с.72]. Получим оценку вида

$$\hat{f}^T(\lambda_s)=\sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]}\varphi^T(k)\hat{I}^T(\lambda_{s+k}),\tag{7}$$

$\lambda_s=\frac{2\pi s}{T}$, $-\left[\frac{T}{2}\right]+1\le s\le\left[\frac{T}{2}\right]$, $\left[\frac{T}{2}\right]$ – целая часть числа $\frac{T}{2}$.

Теорема 4. Если семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка $f_4^X(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ непрерывна на Π^3, спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна на Π и $\sum\limits_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]}\left[\varphi^T(k)\right]^2\xrightarrow[T\to\infty]{}0$, то статистика $\hat{f}^T(\lambda_s)$, задаваемая равенством (7), является состоятельной в среднеквадратическом смысле.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2 в работе [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Илюкевич, Т.И. Оценка спектральной плотности процесса с бернуллиевскими пропусками наблюдений / Т.И. Илюкевич // Современные проблемы математики и вычислительной техники : материалы III республ. научн. конф. молодых ученых и студентов, Брест 26–28 ноября 2003 года, Брест, 2003. – С 169–172.

2. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временых рядов / Н.Н. Труш. – Минск : БГУ, 1999.

3. Bloomfield, P. Spectral analysis with randomly missed observation/ P. Bloomfield // J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. – 1970. – Vol. 32, P. 369–380.

4. Dunsmuir, W. Asymptotic theory for time series containing missing and amplitude modulated observations / W. Dunsmuir, P.M. Robinson // Sankhya. 1981 – Ser. A 43, P. 260–281.

5. Dunsmuir, W. Parametric estimators for stationary time series with missing observations / W. Dunsmuir, P.M. Robinson // Adv. Appl. – 1981. – Prob. 13, P. 126–146.

6. Jiancheng Jiang, Y.V. Hui Spectral Density Estimation with Amplitude Modulation and Outlier Detection / Y.V. Jiancheng Jiang // Ann. Inst. Statist. Math. 2004. – Vol. 56, № 4. P. 611–630.

7. Jones, R.H. Spectral analysis with regularly missed observation / R.H. Jones // Ann. Math. Statist. – 1962. – Vol. 33, № 2. – P. 455–461.

8. Myung Sook, Lee Strong Consistency for AR Model with Missing Data / Lee Myung Sook // J. Korean Math. Soc. – 2004. – Vol. 41, № 6. – P. 1071–1086.

9. Parzen, E. On spectral analysis with missing observations and amplitude modulation / E. Parzen // Tech. Rep. – 1962. – Vol. 46.

10. Scheinok, P.A. Spectral analysis with randomly missed observation : the binomial case / P.A. Scheinok // Ann. Math. Statist. – 1965. – Vol. 36, – P. 971–977.

T.I. Vorotnitskaya. **The Estimations of Covariance Function and Spectral Density of Stationary Random Process with Poisson Omissions of Observations**

Amplitude modulation of stationary random process is considered. The irregularities are given as Poisson sequences. The estimations of covariance function and spectral density have been constructed, its statistical properties having been studied too.