УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов, П.П. Андрусевич

О КВАНТОВАНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛОВСКОГО ТИПА

Рассмотрена обобщенная система уравнений максвелловского типа с градиентным членом. Дана классическая и квантовая формулировка теории.

Несмотря на то, что электромагнитное поле впервые было подвергнуто квантованию еще в 1927 году [1], проблемы в изложении этой процедуры остаются до настоящего времени [2]. Трудности квантового описания электромагнитного поля обусловлены наличием нефизических степеней свободы у вектор-потенциала $A_\mu(x)$, которые вводятся в теорию для достижения ее явной релятивистской инвариантности. На классическом уровне «лишние» степени свободы устраняются добавлением к уравнениям движения подходящего дополнительного условия. Обычно это лоренцевская калибровка

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0\,. \tag{1}$$

В квантовой теории $\hat{A}_\mu(x)$ – операторы, подчиняющиеся определенным коммутационным соотношениям, и перенесение на них условия (1) приводит к противоречиям. Способ снять указанные противоречия впервые был предложен Ферми [3] и заключается в том, чтобы потребовать его выполнения лишь на физических векторах гильбертова пространства

$$\partial_\mu \hat{A}_\mu(x)\psi_{\text{физ.}} = 0\,. \tag{2}$$

Впоследствии выяснилось, что условие (2) является слишком жестким, и оно было заменено на более слабое

$$\left(\partial_\mu \hat{A}_\mu(x)\right)_+ \psi_{\text{физ.}} = 0 \tag{3}$$

($\hat{A}_\mu^{(+)}(x)$ содержит только операторы уничтожения). Однако и в этой схеме обнаружились недостатки, связанные с присутствием в физическом подпространстве векторов с нулевой нормой, которые не могут иметь физического смысла.

Другой способ квантования электромагнитного поля, получивший применение в работах ряда авторов, заключается во введении в классическую теорию дополнительных степеней свободы, например, скалярного поля, которые при квантовании компенсируют нефизические степени свободы вектор-потенциала $A_\mu(x)$. Продемонстрируем этот подход на примере системы уравнений [4]

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} + \partial_\mu \varphi = 0\,, \tag{4а}$$

$$-\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + F_{\mu\nu} = 0\,, \tag{4б}$$

$$\partial_\mu A_\mu + \varphi = 0\,, \tag{4в}$$

где $A_\mu(x)$ – векторный потенциал и $F_{\mu\nu}(x)$ – тензор силы электромагнитного поля; $\varphi(x)$ – дополнительный скалярный потенциал, который, как будет видно из дальнейшего, играет роль компенсирующего поля. Система (4) отличается от обычных уравнений Максвелла

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0 , \tag{5а}$$

$$-\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + F_{\mu\nu} = 0 , \tag{5б}$$

во-первых, градиентным членом в уравнении движения (4а) и, во-вторых, наличием дополнительного уравнения (4в), которое по форме совпадает с условием калибровки Фейнмана, но не является дополнительным условием в вышеуказанном смысле, а входит в исходную систему как равноправное уравнение.

Прежде всего, легко убедиться, что функции $A_\mu(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют уравнениям Даламбера

$$\Box A_\mu(x) = 0 , \tag{6}$$

$$\Box \varphi(x) = 0 , \tag{7}$$

следовательно, система (4) действительно описывает безмассовое поле. Общие решения уравнений (6), (7) можно представить в виде суперпозиции плоских волн:

$$A_\mu(x) = \sum_k N_k \left(C_{\mu k}\, e^{ikx} + C^+_{\mu k}\, e^{-ikx} \right), \tag{8}$$

$$\varphi(x) = \sum_k N_k \left(\varphi_k\, e^{ikx} + \varphi^+_k\, e^{-ikx} \right). \tag{9}$$

Здесь N_k нормировочный множитель (при данном k), $C_{\mu k}, C^+_{\mu k}, \varphi_k, \varphi^+_k$ – амплитуды волн, $kx = k_\mu x_\mu$ – скалярное произведение четырехмерного волнового вектора $k_\mu = (\underline{k}, i\omega)$, удовлетворяющего условию

$$k^2 = k_\mu{}^2 = \underline{k}^2 - \omega^2 = 0 , \tag{10}$$

и четырехмерного радиус-вектора $x_\mu = (\underline{r}, it)$.

Для исключения нефизических решений системы (4) разложим амплитуды $C_{\mu k}, C^+_{\mu k}$ по полному базису

$$e^{(1)}_\mu ,\ e^{(2)}_\mu , k_\mu , n_\mu \tag{11}$$

со свойствами

$$e^{(i)}_\mu e^{(j)}_\mu = \delta ij , \quad e^{(i)}_\mu k_\mu , \quad e^{(i)}_\mu n_\mu = 0 , \quad n_\mu{}^2 = -1 . \tag{12}$$

(Особенностью этого базиса является его неортогональность, так как он содержит изотропный вектор k_μ (см. (10)) и $k_\mu n_\mu \neq 0$). Искомое разложение может быть записано в виде:

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2} c_{ki}\, e^{(i)}_\mu + c_{k3}\, k_\mu + c_{k0}\, n_\mu , \tag{13}$$

$$C^+_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2} c^+_{ki}\, e^{(i)}_\mu + c^+_{k3}\, k_\mu + c^+_{k0}\, n_\mu . \tag{14}$$

Теперь учтем, что система (4) инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x), \tag{15}$$

где произвол в выборе калибровочной функции $\lambda(x)$ ограничен условием-уравнением

$$\Box\lambda(x) = 0\,. \tag{16}$$

Уравнение (16) означает, что $\lambda(x)$ можно представить в виде, аналогичном (8), (9):

$$\lambda(x) = \sum_k N_k \left(\lambda_k e^{ikx} + \lambda_k^+ e^{-ikx}\right), \tag{17}$$

λ_k, λ_k^+ – произвольные амплитуды. Подставляя разложения (8) и (17) в (15), получим калибровочные преобразования для амплитуд:

$$\delta C_{\mu k} = i\lambda_k k_\mu\,, \quad \delta C_{\mu k}^+ = -ik_\mu \lambda_\mu^+\,. \tag{18}$$

Таким образом, амплитуды $C_{\mu k}$, $C_{\mu k}^+$ определяются с точностью до несущественных слагаемых $i\lambda_k k_\mu$ и $-i\lambda_k^+ k_\mu$ соответственно. В разложениях (13), (14) роль таких несущественных слагаемых выполняют члены $c_{k3} k_\mu, c_{k3}^+ k_\mu$.Отбрасывая их, получаем для $C_{\mu k}$, $C_{\mu k}^+$ выражения:

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2} c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k0} n_\mu\,, \tag{19}$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^{2} c_{ki}^+ e_\mu^{(i)} + c_{k0}^+ n_\mu\,. \tag{20}$$

Окончательные выражения для амплитуд классического поля представим, перейдя в обычный ортонормированный базис

$$e_\mu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\lambda}\,, \tag{21}$$

первые два орта которого $(\lambda = 1, 2)$ соответствуют поперечным поляризациям и совпадают с ортами $e_\mu^{(i)}$ базиса (11), (12), третий $(\lambda = 3)$ и четвертый $(\lambda = 4)$ – продольной и скалярной поляризациям потенциала $A_\mu(x)$. При этом выполняются соотношения

$$e_\mu^{(\lambda)} e_\mu^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'}\,, \quad e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu}\,. \tag{22}$$

Векторы k_μ, n_μ в базисе (21), (22) имеют структуру

$$k_\mu = (0, 0, \omega, i\omega), \quad n_\mu = (0, 0, 0, i), \tag{23}$$

а амплитуды $C_{\mu k}$ (19), $C_{\mu k}^+$ (20) принимают вид:

$$C_{\mu k} = \sum_{\lambda = 1, 2, 4} c_{k\lambda} e_\mu^{(\lambda)}\,, \quad C_{\mu k}^+ = \sum_{\lambda = 1, 2, 4} c_{k\lambda}^+ e_\mu^{(\lambda)}\,, \tag{24}$$

где введено обозначение $c_{k4} = i c_{k0}$, $c^{+}_{k4} = i c^{+}_{k0}$.

Устранив продольную составляющую вектора $A_\mu(x)$, найдем выражение для энергии исследуемого поля через оставшиеся амплитуды потенциалов. Лагранжиан системы (4) может быть записан следующим образом:

$$L = \frac{1}{2}\varphi^2 - A_\mu \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) + \frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} \,. \tag{25}$$

Отсюда для тензора энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial\left(\dfrac{\partial U_A}{\partial x_\mu}\right)} \frac{\partial U_A}{\partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu} L$$

и его компоненты T_{44} имеем:

$$T_{\mu\nu} = -A_\mu \partial_\nu \varphi - F_{\mu\alpha} \partial_\nu A_\alpha - \delta_{\mu\nu} L \,, \tag{26}$$

$$T_{44} = -A_4 \partial_4 \varphi - F_{4\alpha} \partial_4 A_\alpha - L \,. \tag{27}$$

Подставляя в (27) разложения (8), (9), (24) и вводя вместо амплитуд $\varphi_k , \varphi^{+}_k$ скалярного поля амплитуды

$$b_k = \frac{\varphi_k}{\omega} \,, \quad b^{+}_k = \frac{\varphi^{+}_k}{\omega} \,, \tag{28}$$

получим для энергии $E = \int T_{44}\, d^3 x$ выражение

$$E = \frac{1}{2}\sum_k \omega\left[\sum_{\lambda=1,2,4}\left(c_{k\lambda} c^{+}_{k\lambda} + c^{+}_{k\lambda} c_{k\lambda}\right) + b_k b^{+}_k + b^{+}_k b_k\right] , \tag{29}$$

где учтено, что $N_k = \dfrac{1}{\sqrt{2V\omega}}$, V – нормировочный объем.

Вторичное квантование осуществляется путем замены амплитуд $c_{k\lambda} , c^{+}_{k\lambda} , b_k , b^{+}_k$ на операторы, удовлетворяющие следующим перестановочным соотношениям:

$$\left[c_{k\lambda} , c^{+}_{k'\lambda'}\right]_- = \delta_{kk'}\delta_{\lambda\lambda'} , \quad \lambda,\lambda' = 1,\, 2,\, 4, \tag{30}$$

$$\left[b_k , b^{+}_{k'}\right]_- = \delta_{kk'} \tag{31}$$

и все остальные коммутаторы равны нулю. Из условий квантования (30), (31) вытекает, что собственными значениями операторов $c^{+}_{k\lambda} c_{k\lambda}$ $(\lambda = 1,2,4)$, $b^{+}_k b_k$ являются целые положительные числа или нуль.

Уравнение (4в), являющееся составной частью системы (4), для квантованного поля сформулируем в виде условия, накладываемого не на операторы $\widehat{A}_\mu(x)$, $\widehat{\varphi}(x)$, а на волновые функции ψ, описывающие состояния электромагнитного поля, на которые действуют эти операторы. Именно будем предполагать, что

$$\left(\partial_\mu \hat{A}_\mu(x) + \hat{\varphi}(x)\right)_+ \psi = 0, \qquad (32)$$

где $\left(\partial_\mu \hat{A}_\mu(x) + \hat{\varphi}(x)\right)_+$ – часть оператора $\left(\partial_\mu \hat{A}_\mu(x) + \hat{\varphi}(x)\right)$, содержащая только положительные частоты. Из (32) получаем

$$\sum_k \omega\left(b_k - c_{k4}\right)e^{ikx}\psi = 0,$$

откуда следует, что функция ψ при всех k должна удовлетворять условию

$$\left(b_k - c_{k4}\right)\psi = 0. \qquad (33)$$

Учитывая, что операторы b_k и b_k^+, а также операторы c_{k4} и $-c_{k4}^+$ эрмитовски сопряжены, имеем также

$$\psi\left(b_k^+ + c_{k4}^+\right) = 0. \qquad (34)$$

Из условий (33), (34) вытекает, что

$$\left(\psi, \left(b_k^+ - c_{k4}^+\right)\left(b_k - c_{k4}\right)\psi\right) + \left(\psi, \left(b_k^+ + c_{k4}^+\right)\left(b_k + c_{k4}\right)\psi\right) = 0,$$

то есть

$$\left(\psi, \left(b_k^+ b_k + c_{k4}^+ c_{k4}\right)\psi\right) = 0. \qquad (35)$$

Благодаря соотношению (35) исчезают средние значения той части оператора энергии, которые связаны со скалярными колебаниями. Таким образом, мы можем рассматривать только поперечные колебания и дальнейшая процедура вторичного квантования осуществляется в полном соответствии с квантованием обычного электромагнитного поля [5].

В заключение авторы выражают благодарность профессору В. И. Стражеву за полезные советы и замечания, позволившие улучшить содержание работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirac, P. A. M. Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1927, v. 114, p. 243.
2. Прохоров, Л. В. Квантование электромагнитного поля / Л. В. Прохоров // УФН. – 1988. – Т. 154, вып. 2. – С. 299–320.
3. Ферми, Э. Научные труды / Э. Ферми. – М. : Наука, 1971. – Т. 1. – С. 302–375.
4. Плетюхов, В. А. Массивные калибровочно-инвариантные теории и безмассовые поля / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Весці АНБ. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 1. – С. 80–88.
5. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. – М. : Наука, 1969. – 623 с.

V.A. Pletyukhov, P.P. Andrusevich. **On Quantization of Some Maxwell Type Equations System**

The generalized Maxwell equations including an additional gradient term are considered. The classical and the quantum formulations of the theory is given.