УДК 519.62

С.А. Фетисова

РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ДЕЛЬТОИДНОЙ ЗАДАЧИ ПЯТИ ТЕЛ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

В статье исследуются равновесные решения ограниченной дельтоидной задачи пяти тел. Показано, что только два из одиннадцати решений являются устойчивыми, а также найдена область устойчивости решений для параметров из области устойчивости дельтоидной конфигурации. Все необходимые вычисления выполнены с помощью Системы Символьных Вычислений (ССВ) *Mathematica*.

Введение

Ньютонова ограниченная задача многих тел – одна из самых известных моделей классической механики, математики и астрономии [3]. Известно, что общее решение этой задачи до сих пор не найдено, поэтому представляет интерес поиск ее точных частных решений. Но поскольку определяющая задачу система дифференциальных уравнений очень сложна и является неинтегрируемой, то неизбежно прибегать к использованию современных компьютерных технологий для нахождения точных частных решений задачи [4]. Важное место среди них занимает Система Символьных Вычислений *Mathematica* [2], с помощью которой выполнялись все расчеты и визуализировались полученные результаты.

Постановка задачи

Пусть четыре массивных тела P_0, P_1, P_2, P_3 равномерно вращаются вокруг оси *Oz* инерциальной барицентрической системы координат с постоянной угловой скоростью ω, образуя в любой момент времени дельтоид, плоскость которого совпадает с плоскостью *Oxy*. Существование соответствующих точных решений задачи четырех тел доказано в работе [5]. Пусть пятое тело P_4, масса которого пренебрежимо мала, движется в гравитационном поле, генерируемом телами P_0, P_1, P_2, P_3. Дифференциальные уравнения движения этого тела существенно нелинейны, и найти их общее решение не представляется возможным. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти равновесные решения и исследовать их устойчивость. Начало таким исследованиям было положено в предыдущей работе [1], где были найдены равновесные положения тела P_4 и исследована их устойчивость при некоторых значениях параметров модели. Целью данной работы является исследование устойчивости равновесных решений при всех значениях параметров, при которых устойчива сама конфигурация в форме дельтоида.

Дельтоидная конфигурация

Используя относительные координаты и переходя во вращающуюся вокруг оси *Oz* систему координат, в которой тело P_0 покоится в начале координат, запишем дифференциальные уравнения движения системы n тел в виде [4]:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_j}{dt^2} - 2\dfrac{dy_j}{dt} + \dfrac{G(m_0+m_j)}{\omega^2}\dfrac{x_j}{r_i^3} = x_j - \dfrac{G}{\omega^2}\sum\limits_{k=1(k\neq j)}^{n} m_k\left(\dfrac{x_j-x_k}{r_{jk}^3}+\dfrac{x_k}{r_k^3}\right), \\ \dfrac{d^2y_j}{dt^2} + 2\dfrac{dx_j}{dt} + \dfrac{G(m_0+m_j)}{\omega^2}\dfrac{y_j}{r_i^3} = y_j - \dfrac{G}{\omega^2}\sum\limits_{k=1(k\neq j)}^{n} m_k\left(\dfrac{y_j-y_k}{r_{jk}^3}+\dfrac{y_k}{r_k^3}\right), \end{cases} \qquad (1)$$

где G – гравитационная постоянная, $m_0, m_j \ (j = 1, 2, ..., n)$ – массы тел,

$$r_j^2 = x_j^2 + y_j^2, \ r_{jk}^2 = (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2.$$

При *n = 4* и $m_4 = 0$ система (1) распадается на две независимые подсистемы, первая из которых содержит шесть уравнений и описывает движение тел P_1, P_2, P_3 в плоскости *Oxy*, а вторая определяет движение пятого тела P_4 в гравитационном поле остальных четырех тел.

При $m_1 = m_2$ первая подсистема имеет решение вида:

$$x_1 = -x_2 = X, \ x_3 = 0, \ y_1 = y_2 = aX, \ y_3 = bX, \tag{2}$$

где *X* – масштабный множитель, а безразмерные параметры *a, b* определяют форму конфигурации. При $b > a$ решение (2) соответствует дельтоидной конфигурации тел P_0, P_1, P_2, P_3. Вводя безразмерные параметры $\mu_1 = m_1/m_0 = m_2/m_0$, $\mu_2 = m_3/m_0$ и безразмерные координаты и подставляя решение (2) в первую подсистему системы (1), получаем только три независимых уравнения, которые и определяют параметры *a, b,* ω при заданных значениях μ_1, μ_2 [1]:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \frac{\mu_1}{4} + \frac{1}{(1+a^2)^{3/2}} + \frac{\mu_2}{(1+(a-b)^2)^{3/2}}, \\
a\omega^2 &= \frac{a(1+2\mu_1)}{(1+a^2)^{3/2}} + \frac{\mu_2}{b^2} + \frac{\mu_2(a-b)}{(1+(a-b)^2)^{3/2}}, \\
b\omega^2 &= \frac{2a\mu_1}{(1+a^2)^{3/2}} + \frac{1+\mu_2}{b^2} + \frac{2\mu_1(a-b)}{(1+(a-b)^2)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Как видно, первое уравнение системы (3) определяет угловую скорость вращения конфигурации ω, причем условие $\omega^2 > 0$ всегда выполняется. Подставляя ω^2 из первого уравнения системы во второе и третье, получаем систему двух уравнений относительно переменных *a, b*, содержащую два параметра μ_1, μ_2, причем эта система имеет решение, удовлетворяющее условию $b > a$ при любых значениях $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$ [5]. Следует отметить, что условие существования вещественного решения (*a, b,* ω) системы (3) эквивалентно условию образования телами P_0, P_1, P_2, P_3 центральной конфигурации во вращающейся системе координат.

Устойчивость дельтоидной конфигурации

В работе [7] был проведен анализ устойчивости дельтоидной конфигурации в плоской ньютоновой задаче четырех тел в линейном приближении. Показано, что на плоскости параметров $0\mu_1\mu_2$ существует лишь небольшая область, для значений параметров μ_1, μ_2 из которой дельтоидная конфигурация является устойчивой в линейном приближении. Граница этой области найдена численно и показана на рисунке 1.

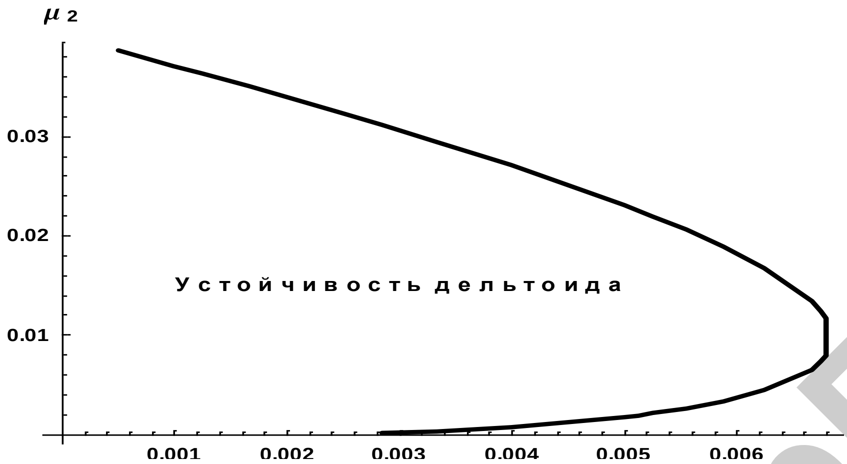

Рисунок 1 – Область устойчивости дельтоидной конфигурации

Нахождение равновесных решений

Дифференциальные уравнения, определяющие движение тела P_4 в плоскости Oxy, получаются из (1) при $j = 4$ и $m_4 = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_4}{dt^2} - 2\dfrac{dy_4}{dt} + \dfrac{Gm_0}{\omega^2}\dfrac{x_4}{r_4^3} = x_4 - \dfrac{G}{\omega^2}\left(m_1\left(\dfrac{x_4 - x_1}{r_{41}^3} + \dfrac{x_1}{r_1^3}\right) + \right. \\ \left. + m_2\left(\dfrac{x_4 - x_2}{r_{42}^3} + \dfrac{x_2}{r_2^3}\right) + m_3\left(\dfrac{x_4 - x_3}{r_{43}^3} + \dfrac{x_3}{r_3^3}\right)\right), \\ \dfrac{d^2y_4}{dt^2} + 2\dfrac{dx_4}{dt} + \dfrac{Gm_0}{\omega^2}\dfrac{y_4}{r_4^3} = y_4 - \dfrac{G}{\omega^2}\left(m_1\left(\dfrac{y_4 - y_1}{r_{41}^3} + \dfrac{y_1}{r_1^3}\right) + \right. \\ \left. + m_2\left(\dfrac{y_4 - y_2}{r_{42}^3} + \dfrac{y_2}{r_2^3}\right) + m_3\left(\dfrac{y_4 - y_3}{r_{43}^3} + \dfrac{y_3}{r_3^3}\right)\right). \end{cases}$$

Равновесным положениям тела P_4 соответствуют постоянные значения координат x_4 и y_4. Приравняв в дифференциальных уравнениях, определяющих движение тела P_4, все производные к нулю, и принимая во внимание (2), мы можем получить равновесные положения тела P_4 как решения следующей системы двух уравнений, зависящей от параметров модели:

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{1}{\omega^2}\left(\dfrac{x_4}{\left(x_4^2 + y_4^2\right)^{3/2}} + \mu_1\left(\dfrac{x_4 - 1}{\left((x_4 - 1)^2 + (y_4 - a)^2\right)^{3/2}} + \dfrac{x_4 + 1}{\left((x_4 + 1)^2 + (y_4 - a)^2\right)^{3/2}}\right) + \right. \\ \left. + \dfrac{\mu_2 x_4}{\left(x_4^2 + (y_4 - b)^2\right)^{3/2}}\right), \\ y_4 = \dfrac{1}{\omega^2}\left(\dfrac{y_4}{\left(x_4^2 + y_4^2\right)^{3/2}} + 2\mu_1\left(\dfrac{2(y_4 - a)}{\left((x_4 - 1)^2 + (y_4 - a)^2\right)^{3/2}} + \dfrac{a}{\left(1 + a^2\right)^{3/2}}\right) + \right. \\ \left. + \mu_2\left(\dfrac{y_4 - b}{\left(x_4^2 + (y_4 - b)^2\right)^{3/2}} + \dfrac{1}{b^2}\right)\right). \end{cases} \qquad (4)$$

Система (4) существенно нелинейна и может быть проанализирована только численно. С помощью системы *Mathematica* [6] для различных значений параметров были построены графики двух кривых, описанных уравнениями (4). Точки пересечения этих кривых представляют собой искомые положения равновесия. Соответствующий анализ при различных значениях параметров μ_1, μ_2 из области устойчивости дельтоидной конфигурации (рисунок 1) показал, что в плоскости *Oxy* существует четыре пары симметричных относительно оси *Oy* равновесных положений тела P_4 и три равновесных положения на оси *Oy*. Таким образом, всего имеется 11 равновесных решений системы (4).

Например, для $\mu_1 = 0{,}005,\ \mu_2 = 0{,}01$ (μ_1, μ_2 принадлежат области устойчивости дельтоидной конфигурации) из системы (3) получаем $a = 0{,}77,\ b = 1{,}26$ и имеем 11 равновесных решений системы (4). Графики кривых для данных значениях параметров изображены на рисунке 2.

Графический метод дает приближенные значения координат положений равновесия N_i *(i = 1,…,11)*. Для их точного определения мы воспользовались функцией *FindRoot* системы *Mathematica* [6] и получили координаты положений равновесия с точностью до пяти знаков после запятой:

$N_1(-1{,}25924;\ 0{,}019222)$ $N_2(1{,}25924;\ 0{,}019222)$

$N_3(-1{,}12356;\ 0{,}864738)$ $N_4(1{,}12356;\ 0{,}864738)$

$N_5(-0{,}885968;\ 0{,}683974)$ $N_6(0{,}885968;\ 0{,}683974)$

$N_7(-0{,}626097;\ 1{,}10408)$ $N_8(0{,}626097;\ 1{,}10408)$

$N_9(0;\ -1{,}25119)$ $N_{10}(0;\ 1{,}08581)$ $N_{11}(0;\ 1{,}46203)$

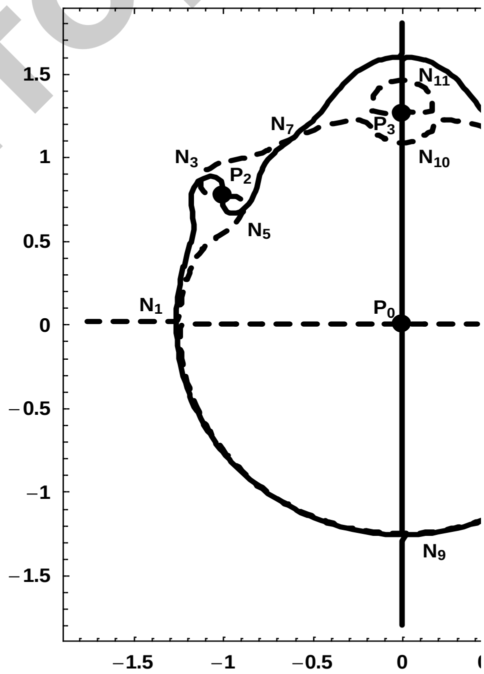

Рисунок 2 – Положения равновесия тела P_4

Устойчивость равновесных решений

Теперь необходимо исследовать устойчивость полученных равновесных решений N_i *(i = 1,…,11)*. Для этого приведем систему дифференциальных уравнений (1) к нормальной форме Коши и линеаризуем ее в окрестности каждой точки равновесия N_i *(i = 1,…,11)*, после чего исследуем свойства собственных значений матрицы линеаризованной системы.

Используя систему *Mathematica* [6], проведем линеаризацию системы дифференциальных уравнений (1) в окрестности каждой точки равновесия N_i *(i = 1,…,11)*. Вносим возмущения:

$$x_4 = x_4 + \delta x_4, \quad y_4 = y_4 + \delta y_4,$$

где $\delta x_4, \delta y_4$ – малые возмущения равновесного решения системы (4). Затем разлагаем правую часть каждого уравнения системы (4) в ряд Тейлора по степеням возмущений $\delta x_4, \delta y_4$ с точностью до первого порядка. В результате уравнения возмущенного движения тела P_4 в окрестности каждого из равновесных решений в линейном приближении могут быть представлены в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x, \tag{5}$$

где вектор x имеет компоненты $x = \left(x_4, y_4, \frac{dx_4}{dt}, \frac{dy_4}{dt} \right)$, A – квадратная матрица четвертого порядка вида:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 & 0 & 2 \\ k_3 & k_4 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы k_i *(i = 1,…,4)* сложным образом зависят от параметров модели и имеют довольно громоздкий вид, поэтому для их определения воспользуемся СКА *Mathematica* [2]. Используя функцию *Eigenvallues*, которая дает список собственных значений квадратной матрицы, исследуем собственные значения матрицы *A*. Отметим, что рассматриваемые равновесные решения могут быть устойчивыми, если все собственные значения матрицы *A* являются чисто мнимыми числами.

Численный анализ системы (5) показал, что устойчивыми в линейном приближении являются только два из одиннадцати равновесных решений системы (4). Этими решениями являются N_1 и N_2. При этом устойчивость наблюдается лишь при значениях параметров μ_1, μ_2 из небольшой области на плоскости $0\mu_1\mu_2$, которая является подобластью области линейной устойчивости самой дельтоидной конфигурации четырех тел P_0, P_1, P_2, P_3. Полученная область изображена на рисунке 3. Остальные девять равновесных решений N_i *(i = 3,…,11)* неустойчивы при любых значениях параметров μ_1, μ_2.

Заключение

Мы исследовали устойчивость равновесных решений ограниченной дельтоидной задачи пяти тел. Вычисления показали, что устойчивыми в линейном приближении являются только два из одиннадцати равновесных решений системы (4), причем устойчивость наблюдается лишь при значениях параметров μ_1, μ_2 из небольшой подобласти на плоскости $0\mu_1\mu_2$ области линейной устойчивости самой дельтоидной конфигурации четырех тел P_0, P_1, P_2, P_3. Область устойчивости равновесных решений найдена численно. Остальные девять равновесных решений неустойчивы при любых значениях параметров μ_1, μ_2.

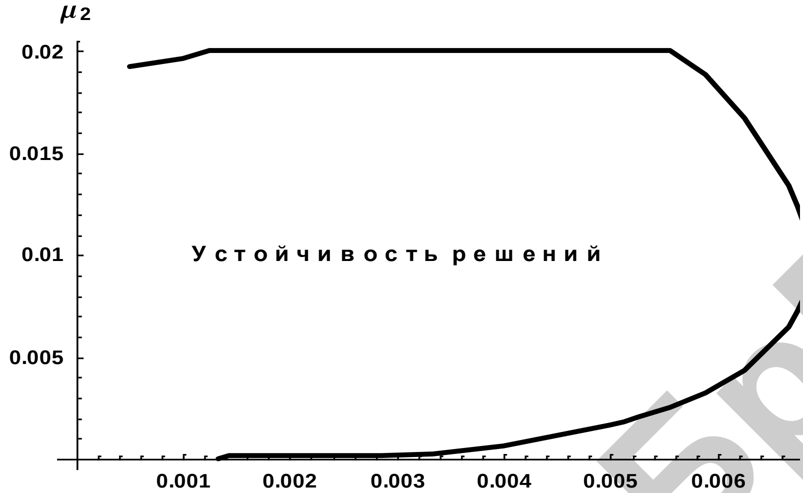

Рисунок 3 – Область устойчивости равновесных решений

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fetisova, S. On the Newtonian deltoid problem / S. Fetisova, E. A. Grebenikov // Computer Algebra Systems in Teaching and Research : proc. of the 4th International Workshop CASTR'2007, Siedlce, Poland, Jan. 31 – Feb. 3, 2007 / University of Podlasie ; Eds. : L. Gadomski [and others]. – Siedlce, 2007.– P. 112–116.

2. Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. – Wolfram Media / Cambridge Univ. Press, 1999. – 1470 p.

3. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / В. К. Абалакин [и др.] ; под ред. Г. Н. Дубошина. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1976. – 854 с.

4. Гребеников, Е. А. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел / Е. А. Гребеников, Д. Козак-Сковородкина, М. Якубяк. – М. : Изд-во РУДН, 2002. – 209 с.

5. Прокопеня, А. Н. О симметричных гомографических решениях ньютоновой задачи четырех тел / А. Н. Прокопеня // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры : материалы междунар. конф. DE&CAS'2005, Брест, 5–8 окт. 2005 г. : в 2 ч. / БГПУ ; редкол. : И. В. Гайшун [и др.]. – Минск, 2005. – Ч. 1. – С. 321–327.

6. Прокопеня, А. Н. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений / А. Н. Прокопеня, А. В. Чичурин. – Минск : Изд-во БГУ, 1999. – 265с.

7. Фетисова, С. А. Об устойчивости дельтоидной конфигурации четырех тел / С. А. Фетисова // Инновационные технологии управления в экономике’2007 : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2007 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. С. А. Тузика ; редкол. : В. Я. Асанович [и др.]. – Брест, 2007. – С. 152.

S.A. Fetisova. **Equilibrium Solutions of the Restricted Deltoid Problem of Five Bodies and their Stability**

In this paper the stability of equilibrium solutions of the restricted deltoid problem of five bodies is researched. It is shown, that only two of eleven solutions are stable, and the area of stability solutions for parameters from stability area of deltoid configuration is found. All necessary calculations are realized with the help of the System of Symbolical Calculations (SSC) *Mathematica*.