УДК 53.05:681.3

Е.Е. Пролиско

ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОТРИЦАТЕЛЬНО-БИНОМИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ, ЗАРЕГИСТРИРОВАННЫХ ПРОИЗВОЛЬНЫМ СЧЕТЧИКОМ II ТИПА (МЕТОД ОСЛАБЛЕНИЯ ПОТОКА)

Предлагается простая процедура, обеспечивающая оценку интенсивности нестационарного отрицательно-биномиального потока, прошедшего регистратор с продлевающимся мертвым временем (счетчик II типа). В основе метода лежит регистрация как исследуемого потока, так и этого же потока, ослабленного в известное количество раз. Предлагаемая процедура работает при неизвестном распределении длительности мертвого времени при самых общих ограничениях.

Случайные потоки являются одним из важнейших источников информации в обширном классе современных научных экспериментов: в оптике, ядерной физике, астрофизике и т.д. [1]. Случайный поток можно представить как последовательность точек на временной оси, при этом, не считая различий в координатах, данные точки неразличимы. Эти точки называют также однородными событиями. Интервалы между появлениями событий и их количество на заданном интервале, в общем случае, являются случайными.

В теории случайных потоков весьма важным является понятие производящего функционала (ПФЛ), который определяется как [1; 2]

$$L[u,\Omega] = \left\langle \prod_{i=1}^{n} \left[1 + u(t_i)\right] \right\rangle_{n,\, t_1,\ldots,t_n}, \tag{1}$$

где $u(t)$ – произвольная пробная функция, а смысл угловых скобок $\langle\ \rangle_{n,\, t_1,\ldots,t_n}$ состоит в усреднении значения функции, стоящей внутри этих скобок, по числу n появившихся точек и по координатам этих точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Отрицательно-биномиальным называют поток, каждая реализация которого представляет собой реализацию пуассоновского потока с интенсивностью $\lambda(t) = \xi\bar{\lambda}(t)$, где $\bar{\lambda}(t)$ – средняя интенсивность потока в момент t, а ξ – независимая случайная величина, принимающая только неотрицательные значения, с математическим ожиданием равным 1. Значение ξ в течение одной реализации остается неизменным, но для каждой новой реализации принимает случайное значение, независимое от предыдущих. Отрицательно-биномиальный поток является моделью импульсной флуоресценции, отклика отдаленных слоев при лазерном зондировании атмосферы и т.д. [1].

Вид ПФЛ отрицательно-биномиального потока зависит от вида распределения ξ. В реальных случаях эта случайная величина имеет, как правило, показательное распределение [1; 4] и для него

$$L[u,\Omega] = \left[1 - \int_{\Omega} \bar{\lambda}(t)\, u(t)\, dt\right]^{-1}, \tag{2}$$

Одним из основных искажающих факторов при определении характеристик случайных потоков является мертвое время устройства регистрации. В течение мертвого времени длительности τ любое событие, поступившее на вход системы, теряется. В конкретных устройствах величина и характер мертвого времени зависят от многих факторов. В современной литературе, посвященной регистрации физических потоков, различают два типа мертвого времени: *непродлевающееся* и *продлевающееся*.

Непродлевающееся мертвое время, которое называют также мертвым временем I типа, возникает только после зарегистрированных событий. Входные события, попавшие в зону действия мертвого времени I типа, не регистрируются, но и не продлевают его. Данный тип мертвого времени характерен, прежде всего, для дискриминаторов и преобразователей время-код [1].

Продлевающееся мертвое время, или мертвое время II типа, возникает после любых входных событий независимо от факта их регистрации. Данный тип мертвого времени характерен, как правило, для детекторов – устройств, преобразующих поток физических частиц в поток электрических импульсов, для схем временной привязки, преобразующих электрические импульсы с выхода детектора в стандартные электрические импульсы и для схем исключения наложения импульсов [1].

Длительность мертвого времени полагаем случайной величиной, принимающей неотрицательные значения и описываемую условной функцией распределения $B(x|z)$, задающей вероятность окончание мертвовременного интервала не позднее момента x, если он начался в момент z. Если распределение длительности мертвого времени не зависит от момента его начала, полагаем, что распределение длительности мертвого времени задается функцией распределения $D(\tau) = D(x - z)$. Для этого случая имеет смысл ввести в рассмотрение математическое ожидание длительности мертвого времени

$$\bar{\tau} = \int_0^\infty \tau\, dD(\tau) = \int_0^\infty [1 - D(\tau)]d\tau .$$

Замечание. Важной характеристикой регистрации является величина $\bar{\lambda}\bar{\tau}$. Так, если $\lambda\bar{\tau}$ очень мало, то регистрируются практически все события входного потока (на практике для этого достаточно $\bar{\lambda}\bar{\tau} < 0{,}01$). Если же $\bar{\lambda}\bar{\tau}$ очень велико, то мертвовременные интервалы перекрывают практически все моменты наступления событий входного потока и выходной поток практически нулевой, это достигается при $\bar{\lambda}\bar{\tau} > 100$.

Аналитический аппарат, описывающий искажающее влияние непродлевающегося мертвого времени для некоторых классов входных потоков и видов мертвого времени, приведен в ряде работ, например [1; 3; 4].

Наиболее значимые результаты получены для случая продлевающегося мертвого времени [1; 4; 5]. Аналитическое выражение для $\nu(t)$ – интенсивности выходного потока, после преобразований счетчиком II типа имеет вид [1; 4]

$$\nu(t) = \left.\frac{\partial L^A[u,\Omega]}{\partial u(z)}\right|_{u(z)=1(z-t)+B(t|z)}, \tag{3}$$

где $L^A[u,\Omega]$ – ПФЛ входного потока. В случае отрицательно-биномиального потока (3) с учетом (2) примет вид

$$\nu(t)=\bar{\lambda}(t)\left\{1+\int_{T_1}^{t}\bar{\lambda}(z)[1-B(t\mid z)]dz\right\}^{-2}. \qquad (4)$$

Для отрицательно-биномиального потока при заданном распределении ξ единственной характеристикой является средняя интенсивность $\bar{\lambda}(t)$. Таким образом, задача анализа потока сводится к получению оценки средней интенсивности $\tilde{\lambda}(t)$ этого потока по зарегистрированной интенсивности $\nu(t)$. Актуальной проблемой является поиск методов оценки, позволяющих исключить влияние мертвого времени.

Пусть имеется нестационарный отрицательно-биномиальный поток с неизвестной интенсивностью $\bar{\lambda}(t)$, прореженный мертвым временем II типа. Обозначим выходную интенсивность этого потока, прошедшего счетчик II типа как $\nu_0(t)$. Введем для упрощения $R(t)=\int_{T_1}^{t}\bar{\lambda}(z)[1-B(t\mid z)]dz$, тогда (4) перепишется как

$$\nu_0(t)=\bar{\lambda}(t)[1+R(t)]^{-2}. \qquad (5)$$

Пусть у нас имеется возможность ослабить входной поток в известное количество k раз. Тогда, из общих соображений, полагаем, что поток останется отрицательно-биномиальным со средней интенсивностью $\bar{\lambda}(t)/k$. Интенсивность этого потока после регистратора $\nu_1(t)$, согласно (4) и (5), должна иметь вид

$$\nu_1(t)=\frac{\bar{\lambda}(t)}{k}\left\{1+\int_{T_1}^{t}\frac{\bar{\lambda}(\tau)}{k}[1-B(t\mid\tau)]d\tau\right\}^{-2}=\frac{\bar{\lambda}(t)}{k}\left[1+\frac{R(t)}{k}\right]^{-2}=\frac{\bar{\lambda}(t)k}{[k+R(t)]^2}. \qquad (6)$$

В уравнениях (5) и (6) известными являются $\nu_0(t)$, $\nu_1(t)$ (как измеряемые характеристики) и k, а неизвестными $R(t)$ и $\bar{\lambda}(t)$. Таким образом, получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Поскольку нас интересует только $\bar{\lambda}(t)$, то можно из (5) выразить $R(t)$

$$R(t)=\sqrt{\frac{\bar{\lambda}(t)}{\nu_0(t)}}-1. \qquad (7)$$

Подставив (7) в (6), можно выразить $\bar{\lambda}(t)$. После некоторых преобразований получаем

$$\bar{\lambda}(t)=k\nu_1(t)+2\nu_1(t)\left[\sqrt{\frac{\bar{\lambda}(t)}{\nu_0(t)}}-1\right]+\frac{\nu_1(t)}{k}\left[\sqrt{\frac{\bar{\lambda}(t)}{\nu_0(t)}}-1\right]^2. \qquad (8)$$

Решая (8) относительно $\bar{\lambda}(t)$, получаем два решения

$$\bar{\lambda}_1(t)=\nu_0(t)\nu_1(t)\left[\frac{(k-1)\left(\sqrt{k\nu_0(t)}+\sqrt{\nu_1(t)}\right)}{k\nu_0(t)-\nu_1(t)}\right]^2 \qquad (9а)$$

$$\bar{\lambda}_2(t)=\nu_0(t)\nu_1(t)\left[\frac{(k-1)\left(\sqrt{k\nu_0(t)}-\sqrt{\nu_1(t)}\right)}{k\nu_0(t)-\nu_1(t)}\right]^2 \qquad (9б)$$

Замечание. На практике применимо только решение (9а). Решение (9б) является, по-видимому, лишним корнем.

Процедуру оценки интенсивности в реальных регистраторах, в несколько упрощенном виде, можно представить в следующем виде. Интервал измерения $[T_1, T_2]$ разбивается на m равных отрезков (временных каналов) точками $t_p = T_1 + p \cdot \Delta t$, где $\Delta t = (T_2 - T_1)/m$ – ширина временного канала. После чего проводят N повторений эксперимента, по которым получают оценки исследуемого потока. Так если $\nu(t)$ – интенсивность потока в момент t, то ее оценкой является $\tilde{\nu}_p$ – средняя интенсивность в p-м временном канале, где $p = [t/\Delta t] + 1$ ($[x]$ здесь обозначает целую часть от x). Для получения данной характеристики достаточно подсчитать количество событий n_p, зарегистрированных в p-м временном канале за N прогонов. Значение $\tilde{\nu}_p$ определяется как [1; 4]

$$\tilde{\nu}_p = \frac{n_p}{N \cdot \Delta t}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9а) получаем оценки зарегистрированной интенсивности $\tilde{\lambda}_p$.

Полученные результаты были проверены на имитационных моделях. На рисунке 1 представлен случай: входной поток – нестационарный

$$\bar{\lambda}(t) = 3 \cdot \exp\left\{-\frac{(t-1{,}5)^2}{0{,}3}\right\} + 1{,}5 \cdot \exp\left\{-\frac{(t-3)^2}{0{,}5}\right\} + 0{,}2\ ,$$

коэффициент ослабления $k = 3$, объем выборок в каждом измерении $n = 100\,000$, интервал моделирования $\Omega = [0, 5]$, мертвое время не зависит от своего начала и распределено равномерно на интервале [1; 2] (все единицы измерения условные). Тонкими линиями на рисунке обозначены зарегистрированные интенсивности $\nu_0(t)$ и $\nu_1(t)$, пунктиром – «идеальная» средняя интенсивность входного потока $\bar{\lambda}(t)$, а сплошной жирной линией – ее оценка $\tilde{\lambda}(t)$, полученная из k, $\nu_0(t)$ и $\nu_1(t)$ по формуле (9а).

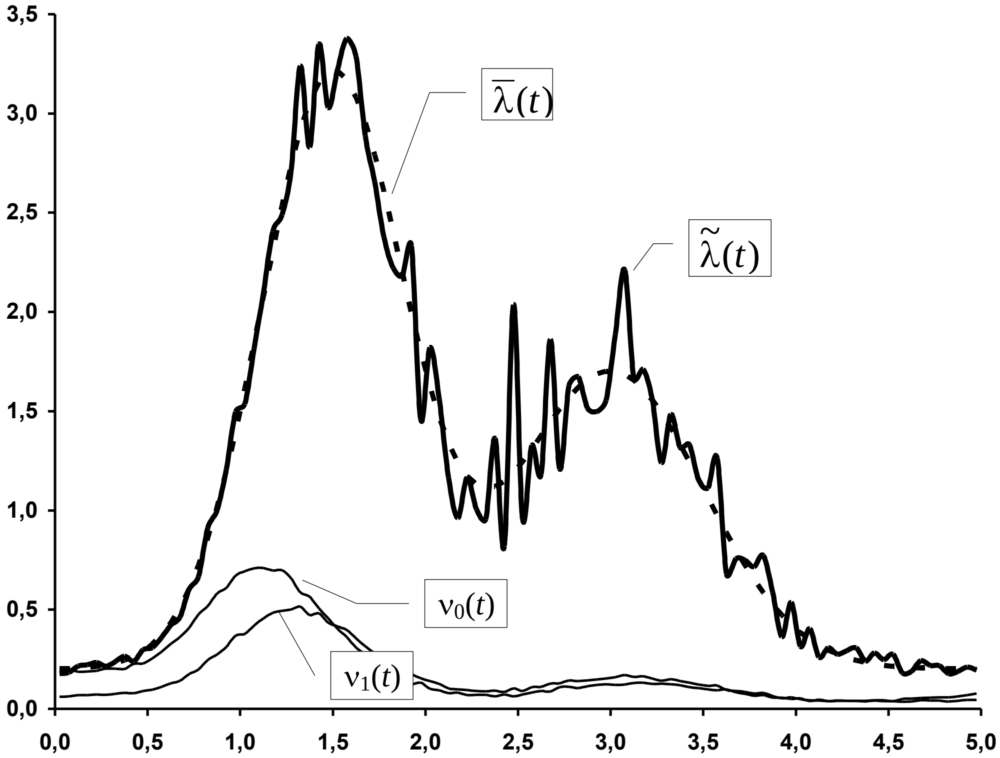

Рисунок 1 – Оценка входной интенсивности отрицательно-биномиального потока, полученная методом ослабления

Точность оценки интенсивности будем связывать с ее дисперсией. Оценкой дисперсии оценки зарегистрированного потока является [4]

$$\sigma^2(\tilde{\nu}_p) = \frac{\tilde{\nu}_p(1-\tilde{\nu}_p\Delta t)}{N\cdot\Delta t}. \tag{11}$$

Поскольку дисперсия данной оценки, в общем случае, может зависеть от момента времени, то введем условия:

1) распределение длительности мертвого времени не зависит от момента его начала, т.е. $B(x|z) = D(x-z) = D(\tau)$;

2) входной поток – стационарный, т.е. $\overline{\lambda}(t) = \overline{\lambda} = \text{const}$;

3) начало появления событий потока и вызванных ими мертвовременных интервалов было задолго до начала регистрации. В этом случае, с учетом условия 1), на всем интервале измерения зарегистрированные потки также стационарны с интенсивностью

$$\nu = \overline{\lambda}\left(1+\overline{\lambda}\overline{\tau}\right)^{-2}. \tag{12}$$

4) ширина временного канала Δt достаточно мала, так что выполняется условие $\nu\cdot\Delta t \ll 1$, что для реальных регистраторов выполняется практически во всех случаях. При этом условии формулу (11) с большой точностью можно представить в виде

$$\sigma^2(\tilde{\nu}) \approx \frac{\tilde{\nu}}{N\cdot\Delta t}. \tag{13}$$

Пусть в результате экспериментов получены оценки $\tilde{\nu}_0$ и $\tilde{\nu}_1$. Так как эти оценки – независимы, то для дисперсии оценки $\tilde{\lambda}$ справедливо [1]

$$\sigma^2(\tilde{\lambda}) = \left[\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\nu_0}\right]^2 \sigma^2(\tilde{\nu}_0) + \left[\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\nu_1}\right]^2 \sigma^2(\tilde{\nu}_1), \tag{14}$$

Из (12) следует

$$\nu_0 = \frac{\bar{\lambda}}{\left(1+\bar{\lambda}\bar{\tau}\right)^2}, \quad \nu_1 = \frac{\bar{\lambda}}{k\left(1+\bar{\lambda}\bar{\tau}/k\right)^2} = \frac{\bar{\lambda}k}{\left(k+\bar{\lambda}\bar{\tau}\right)^2}. \tag{15}$$

Частные производные, стоящие в (14), получим из (9а). С учетом (15) после преобразований получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\nu_0} = -\dfrac{\left(1+\bar{\lambda}\bar{\tau}\right)^3}{k-1} \\ \dfrac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\nu_1} = \dfrac{\left(k+\bar{\lambda}\bar{\tau}\right)^3}{k\left(k-1\right)} \end{cases} \tag{16}$$

Снова воспользовавшись выражениями (15) из (13), получим

$$\sigma^2(\tilde{\nu}_0) = \frac{\bar{\lambda}}{N\cdot\Delta t\left(1+\bar{\lambda}\bar{\tau}\right)^2}, \quad \sigma^2(\tilde{\nu}_1) = \frac{\bar{\lambda}}{N\cdot\Delta t\cdot k\left(1+\bar{\lambda}\bar{\tau}/k\right)^2} = \frac{\bar{\lambda}k}{N\cdot\Delta t\left(k+\bar{\lambda}\bar{\tau}\right)^2}, \tag{17}$$

Подставляя (16) и (17) в (14) окончательно получаем оценку дисперсии результата, которую можно представить как

$$\sigma^2(\tilde{\lambda}) = \frac{\bar{\lambda}}{N\,\Delta t}\cdot\frac{k^4 + 4k^3\bar{\lambda}\bar{\tau} + k + 4k\bar{\lambda}\bar{\tau} + (k+1)\left(\bar{\lambda}\bar{\tau}\right)^2\left[6k + \left(\bar{\lambda}\bar{\tau}\right)^2\right] + 8k\left(\bar{\lambda}\bar{\tau}\right)^3}{k\left(k-1\right)^2}. \tag{18}$$

На рисунке 2 представлен результат расчетов по формуле (18). Исследуется регистратор, для которого $\bar{\tau} = 1{,}5$, коэффициент ослабления меняется от 1,5 до 100. Сплошная линия соответствует $\bar{\lambda} = 1$, крупный пунктир – $\bar{\lambda} = 2$, а мелкий соответствует $\bar{\lambda} = 4$ (все единицы – условные). Для удобства ось ординат имеет логарифмическую шкалу.

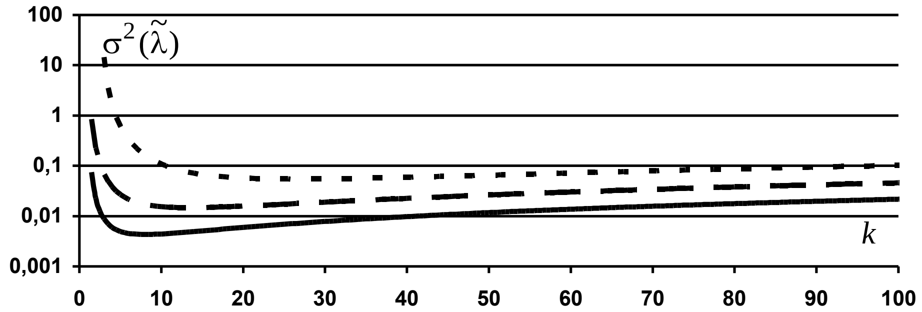

Рисунок 2 – Зависимость дисперсии оценки от коэффициента *k*

Из примера на рисунке 2 видно, что при значениях k близких к 1 дисперсия оценки очень велика, с ростом k она быстро падает до некоторого оптимального значения, а потом более медленно растет.

В связи с последним весьма актуальной является задача выбора оптимальной величины k для заданного режима регистрации. Формально эту задачу можно решить, решив уравнение

$$\partial(\sigma^2(\tilde{\lambda}))/\partial k = 0 \tag{19}$$

относительно параметра k.

Частная производная, стоящая в левой части уравнения (19), имеет вид

$$\frac{\partial\sigma^2(\tilde{\lambda})}{\partial k} = \frac{\bar{\lambda}}{N\Delta t}\cdot\frac{k^5 - 3\cdot k^4 - 2A(4+3A)\cdot k^3 - 2(1+4A+9A^2+8A^3+A^4)\cdot k^2 - 3A^4\cdot k + A^4}{k^2(k-1)^3},$$

где $A = \bar{\lambda}\bar{\tau}$. Очевидно, что: 1) корень уравнения (19) не зависит от N и Δt, а зависит только от произведения $\bar{\lambda}\bar{\tau}$; 2) получаем уравнение пятой степени, которое аналитически не разрешимо.

На рисунке 3 представлены результаты численного решения уравнения (19).

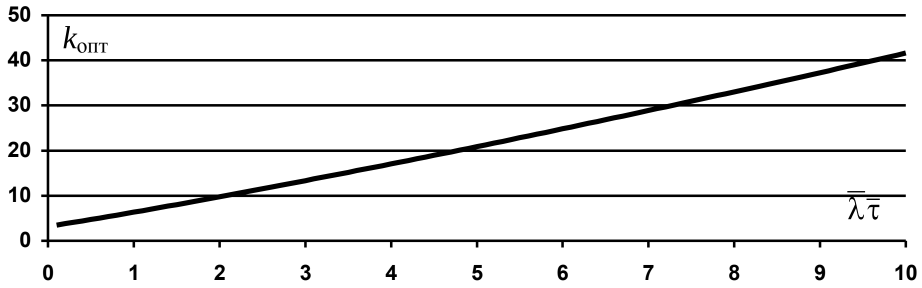

Рисунок 3 – Определение оптимального коэффициента ослабления

Из рисунка видно, что график зависимости очень близок к прямой линии. Практически достаточно точно его можно аппроксимировать параболой

$$k_{опт} = 0{,}0593\left(\bar{\lambda}\bar{\tau}\right)^2 + 3{,}2731\bar{\lambda}\bar{\tau} + 3{,}0265 \tag{20}$$

Если исследователь имеет возможность подбирать коэффициент ослабления k, то процедуру прецизионной оценки интенсивности отрицательно-биномиального потока можно представить как состоящую из двух шагов (каждый из которых состоит из двух этапов – измерение исходного потока и ослабленного). На первом шаге используется произвольное ослабление, которое дает предварительное значение оценки входной интенсивности. На втором шаге эта предварительная оценка служит опорным значением для расчета $k_{опт}$ по формуле (20) и, используя его, получаем оценку входной интенсивности с максимальной точностью.

Замечание. Из примера на рисунке 2 видно, что в случае если нет возможности воспользоваться в точности оптимальным ослаблением во втором измерении, то выгоднее выбрать ослабление большей величины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апанасович, В. В. Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте / В. В. Апанасович, А. А. Коляда, А. Ф. Чернявский. – Минск : Университетское. – 1988. – 254 с.

2. Большаков, И. А. Прикладная теория случайных потоков / И. А. Большаков, В. С. Ракощиц. – М. : Сов. радио. – 1978. – 248 с.

3. Апанасович, В. В. Потери событий в системах регистрации нестационарных пуассоновских потоков сигналов / В. В. Апанасович, Е. Е. Пролиско // Изв. вузов. Приборостроение. – Т. XXXI. – 1988. – С. 3–7.

4. Пролиско, Е. Е. Анализ временных характеристик случайных потоков в системах с мертвым временем : дис. … канд. техн. наук. – Брест. – 1992. – 152 с.

5. Апанасович, В. В. Счет фотонов регистратором с «мертвым временем» / В. В. Апанасович, Е. Е. Пролиско // Оптико-механическая промышленность. – № 10. – 1988. – С. 14–15.

E.E. Prolisko. **The Estimation of Intensity of Non-stationary Negative-binomial Streams Registered by a Counter of the Second Type (Method Weakened of Stream)**

The simple procedure providing an estimation of intensity of a non-stationary negative-binomial stream passed through the registrar with continuing dead time (the counter of the 2nd type) is offered. Registration, both a researched stream, and the same stream weakened in known quantity of times lies in the basis of the method. The offered procedure works at unknown distribution of duration of dead time at the most general restrictions.