УДК 519.6+517.983.54

О.В. Матысик

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

В гильбертовом пространстве для решения операторных уравнений I рода с положительным ограниченным самосопряженным оператором предлагается явный итерационный метод с переменным шагом. Исследована сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства, при этом для получения априорных оценок погрешности не требуется знания истокопредставимости точного решения. Получены достаточные условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость итерационного метода в обычной норме гильбертова пространства. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода простой итерации.

1. Постановка задачи. В действительном гильбертовом пространстве H решается операторное уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – положительный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением. Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Для отыскания этого решения применим явную схему метода итераций с переменным шагом

$$\begin{gathered} x_{n+1} = (E - \alpha_{n+1}A)x_n + \alpha_{n+1}y, \quad x_0 = 0, \\ \alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь E – единичный оператор. В случае приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ соответствующие методу (2) итерации примут вид:

$$\begin{gathered} x_{n+1,\delta} = (E - \alpha_{n+1}A)x_{n,\delta} + \alpha_{n+1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \\ \alpha_{3n+1} = \alpha, \quad \alpha_{3n+2} = \beta, \quad \alpha_{3n+3} = \gamma, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{3}$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при достаточно малых δ и $n\delta$ и достаточно больших n.

Далее будем считать $\|A\| = 1$.

2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций в исходной норме гильбертова пространства. Методы (2)–(3) впервые были предложены в работе [1], в которой была показана их сходимость при $\lambda \in (0,1]$, положительных α, β, γ и условиях

$$\left.\begin{aligned} &|(1-\alpha\lambda)| < 1, \ (\text{т.е. } 0 < \alpha < 2), \\ &|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)| < 1, \\ &|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)| < 1, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

а также в предположении, что решение уравнения (1) является истокообразно представимым с некоторым показателем $s > 0$.

З а м е ч а н и е 1. *Условие* $\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)\right|<1$ *равносильно совокупности условий* $\alpha\beta<\alpha+\beta$ *и* $(\alpha+\beta)^2<8\alpha\beta$ (*см.* [2]). *Отсюда* $\alpha+\beta<8$.

В статье [1] доказана

Т е о р е м а 1. *Если* $x=A^s z,\ s>0$, *то при условии* (4) *для метода* (3) *справедлива оценка погрешности* $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|\le s^s\left[\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-s}\|z\|+\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta.$

Отсюда при $n_{\text{опт}}=s\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)^{-1}e^{-s/(s+1)}\delta^{-1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$ получаем неравенство $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_{\text{опт}}\le(1+s)e^{-s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}$.

Сравним метод (3) с явным методом простой итерации [3]

$$x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}+\alpha\left(y_\delta-Ax_{n,\delta}\right),\ x_{0,\delta}=0. \tag{5}$$

Нетрудно увидеть [3], что оптимальная оценка для метода (3) при неточности в правой части уравнения (1) оказывается такой же, как и оптимальная оценка для метода простой итерации (5). Следовательно, метод (3) не дает преимущества в мажорантных оценках по сравнению с методом простой итерации. Но он дает выигрыш в следующем. В методе простой итерации с постоянным шагом (5) требуется условие $0<\alpha\le1{,}25$, а в методе (3) $0<\alpha<2,\ \alpha+\beta<8$, а γ выбирается из условия $\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)\right|<1$. Итак, выбирая α,β,γ соответствующим образом, можно сделать $n_{\text{опт}}$ в методе (3) меньшим, чем для метода простой итерации с постоянным шагом. Таким образом, используя метод (3), для достижения оптимальной точности потребуется сделать число итераций по крайней мере в 2,5 раза меньше, чем методом итераций (5).

3. Сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства при точной и приближенной правой части уравнения. Изучим сходимость итерационного метода (3) в случае единственного решения в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)},\ x\in H$. При этом, как обычно, число итераций n нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности δ. Полагаем, что $x_{0,\delta}=0$ и рассмотрим разность

$$x-x_{n,\delta}=\left(x-x_n\right)+\left(x_n-x_{n,\delta}\right). \tag{6}$$

По индукции нетрудно показать [1], что $x_n=A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m\right]y$, где $k,l,m-$натуральные показатели и $k+l+m=n$. Тогда запишем первое слагаемое из равенства (6) в виде

$$x-x_n=A^{-1}y-A^{-1}\left[E-(E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m\right]y=(E-\alpha A)^k(E-\beta A)^l(E-\gamma A)^m x.$$

Как было показано в [1] $x - x_n$ бесконечно мало в норме пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки необходима дополнительная информация на гладкость точного решения x – его истокообразная представимость. При использовании энергетической нормы нам это дополнительное предположение не потребуется. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора A имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = (A(x - x_n), x - x_n) =$$
$$= \left(A(E-\alpha A)^k (E-\beta A)^l (E-\gamma A)^m x, (E-\alpha A)^k (E-\beta A)^l (E-\gamma A)^m x\right) =$$
$$= \left(A(E-\alpha A)^{2k} (E-\beta A)^{2l} (E-\gamma A)^{2m} x, x\right) = \int_0^1 \lambda(1-\alpha\lambda)^{2k} (1-\beta\lambda)^{2l} (1-\gamma\lambda)^{2m}\ d(E_\lambda x, x),$$

где E_λ – соответствующая оператору A спектральная функция.

Для оценки интересующей нас нормы найдем при $\lambda \in [0,1]$ максимум подынтегральной функции $\varphi(\lambda) = \lambda(1-\alpha\lambda)^{2k} (1-\beta\lambda)^{2l} (1-\gamma\lambda)^{2m}$. Потребуем, чтобы при $\lambda \in (0,1]$, положительных α, β, γ выполнялось условие (4). В работе [1] показано, что для достаточно больших n справедливо $\lambda(1-\alpha\lambda)^k (1-\beta\lambda)^l (1-\gamma\lambda)^m \le [(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-1}$,

поэтому $\lambda(1-\alpha\lambda)^{2k} (1-\beta\lambda)^{2l} (1-\gamma\lambda)^{2m} \le [2(k\alpha + l\beta + m\gamma)e]^{-1}$.

В дальнейшем, для простоты, считаем, что $k = l = m = \frac{n}{3}$ $(n = 3p,\ p \in N)$. Поэтому для таких n справедлива оценка $\max\limits_{\lambda \in [0,1]} |\varphi(\lambda)| \le \left[\frac{2n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e\right]^{-1}$. Следовательно, при условии (4) получим следующую оценку $\|x - x_n\|_A \le \left[\frac{2n}{3}(\alpha + \beta + \gamma)e\right]^{-1/2} \|x\|$.

Оценим второе слагаемое в (6). Как показано в [1], имеет место равенство

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E-\alpha A)^{n/3} (E-\beta A)^{n/3} (E-\gamma A)^{n/3}\right](y - y_\delta) =$$
$$= \int_0^1 \lambda^{-1}\left[1 - (1-\alpha\lambda)^{n/3} (1-\beta\lambda)^{n/3} (1-\gamma\lambda)^{n/3}\right] dE_\lambda (y - y_\delta).$$

Тогда

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = (A(x_n - x_{n,\delta}), x_n - x_{n,\delta}) = \Big(\left[E - (E-\alpha A)^{n/3} (E-\beta A)^{n/3} (E-\gamma A)^{n/3}\right](y - y_\delta),$$
$$A^{-1}\left[E - (E-\alpha A)^{n/3} (E-\beta A)^{n/3} (E-\gamma A)^{n/3}\right](y - y_\delta)\Big) =$$
$$= \left(A^{-1}\left[E - (E-\alpha A)^{n/3} (E-\beta A)^{n/3} (E-\gamma A)^{n/3}\right]^2 (y - y_\delta), y - y_\delta\right) =$$

$$=\int_0^1 \lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]^2 d\left(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta\right).$$

Обозначим через $\xi_n(\lambda)$ подынтегральную функцию и оценим ее сверху при условии (4). Сначала при (4) докажем, что $|\omega_n(\lambda)|=$ $=\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]\right|\le\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma).$ Это тоже самое, что методом математической индукции доказать неравенство $\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_n\lambda)\right]\right|\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

Обозначим левую часть последнего неравенства через $z_n(\lambda)$.

При n = 1 получим $z_1(\lambda)=\alpha_1\le\alpha_1$, т.е. при n = 1 рассматриваемое неравенство справедливо. Предположим, что доказываемое неравенство верно при n = k, т.е. выполняется $z_k(\lambda)=\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)\right]\right|\le\sum_{i=1}^{k}\alpha_i$, и докажем его справедливость при n = k+1. Итак, получим

$$z_{k+1}(\lambda)=\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)(1-\alpha_{k+1}\lambda)\right]\right|=$$
$$=\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)+(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)\alpha_{k+1}\lambda\right]\right|=$$
$$=\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)\right]+(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)\alpha_{k+1}\right|\le$$
$$\le\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)\right]\right|+\alpha_{k+1}\left|(1-\alpha_1\lambda)\ldots(1-\alpha_k\lambda)\right|\le\sum_{i=1}^{k}\alpha_i+\alpha_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i\,.$$

Поэтому по индукции справедливость рассматриваемого неравенства доказана. Следовательно, при (4) выполняется $|\omega_n(\lambda)|\le\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma).$

Вернемся к оценке положительной функции $\xi_n(\lambda)$, имеем

$$\xi_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]^2=$$
$$=\left|\lambda^{-1}\left[1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right]\right|\,\left|1-(1-\alpha\lambda)^{n/3}(1-\beta\lambda)^{n/3}(1-\gamma\lambda)^{n/3}\right|\le$$
$$\le\frac{n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\left(1+\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)\right|^{n/3}\right)\le\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma),$$

так как при условии (4) справедливо $\left|(1-\alpha\lambda)(1-\beta\lambda)(1-\gamma\lambda)\right|^{n/3}<1$. Итак, для любых $n\ge1$ $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|_A^2\le\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)\delta^2$, поэтому $\left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|_A\le\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,\ n\ge1.$

Поскольку $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A \le \left\|x-x_n\right\|_A + \left\|x_n-x_{n,\delta}\right\|_A \le \left\|x-x_n\right\|_A + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta$, $n \ge 1$ и при $n\to\infty$ $\left\|x-x_n\right\|_A \to 0$, то для сходимости $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A \to 0$, $n\to\infty$, достаточно, чтобы $\sqrt{n}\,\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$. Таким образом, если в процедуре (3) выбрать число итераций $n=n(\delta)$, зависящих от δ так, чтобы $\sqrt{n}\,\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$, то получим регуляризующий метод, обеспечивающий сходимость к точному решению уравнения (1) в энергетической норме гильбертова пространства. Итак, доказана

Т е о р е м а 2. *Итерационная процедура* (3) *при условии* (4) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций* n *выбирать так, чтобы* $\sqrt{n}\,\delta\to 0$, $n\to\infty$, $\delta\to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A \le \left[\frac{2n}{3}(\alpha+\beta+\gamma)e\right]^{-1/2}\|x\| + \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} n^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta,\ n\ge 1. \tag{7}$$

Оптимизируем полученную оценку (7) по *n*, т.е. при заданном δ найдем такое значение числа итераций *n*, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по *n* от правой части равенства (7), получим $3^{1/2}(\alpha+\beta+\gamma)^{-1/2}e^{-1/2}\|x\| = 3^{-1/2}2(\alpha+\beta+\gamma)^{1/2}\delta n$, отсюда

$$n_{\text{опт}} = 3(\alpha+\beta+\gamma)^{-1} e^{-1/2}(2\delta)^{-1}\|x\|. \tag{8}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (7), найдем ее оптимальное значение

$$\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le 2e^{-1/4}\delta^{1/2}\|x\|^{1/2}. \tag{9}$$

Из (9) вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметров α,β,γ. Но $n_{\text{опт}}$ зависит от α,β,γ и поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α,β,γ возможно большими, удовлетворяющими условию (4), и так, чтобы $n_{\text{опт}}\in \mathrm{Z}$. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. *При условии* (4) *оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса* (3) *в энергетической норме гильбертова пространства имеет вид* (9) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (8).

Сравним метод (3) в энергетической норме с хорошо известным методом (5). В статье [4] для явного метода простой итерации (5) с $0<\alpha\le 1{,}25$ при $n_{\text{опт}} = \left(\frac{35}{27}\right)^{-1/2}\alpha^{-1}e^{-1/2}\delta^{-1}\|x\|$ получена оптимальная оценка $\left\|x-x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le$ $\le \left(\frac{35}{27}\right)^{1/4} e^{-1/4}(2\delta)^{1/2}\|x\|^{1/2}$. Отсюда легко увидеть, что порядки оптимальных оценок погрешности для методов (3) и (5) одинаковы. Более того, используя метод итераций (3), для достижения оптимальной точности потребуется сделать число итераций по крайней мере в 4 раза меньше, чем методом итераций (5).

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*.

Эти условия дает

Т е о р е м а 4. *Если выполнены условия*: 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε – *фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < 1)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из 1) и 2) имеем $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) = 0$.

Отсюда получим

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|^2 = \int_0^1 d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), x - x_{n,\delta}\right) = \int_0^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) =$$

$$= \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\lambda} d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) \le \frac{1}{\varepsilon} \int_\varepsilon^1 d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 d\left(E_\lambda\left(x - x_{n,\delta}\right), A\left(x - x_{n,\delta}\right)\right) = \frac{1}{\varepsilon} \left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^2.$$

Поэтому из $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \to 0$, $n \to \infty$ следует $\left\|x - x_{n,\delta}\right\| \to 0$, $n \to \infty$. Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е 2. *Так как* $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^{n/3}(E - \beta A)^{n/3}(E - \gamma A)^{n/3}\right] y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta = 0$. *Таким образом, если решение x и приближенная правая часть* y_δ *таковы, что* $E_\varepsilon x = 0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta = 0$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к* x *в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства и, следовательно, для сходимости приближений* (3) *в норме пространства H не требуется предположения истокопредставимости точного решения.*

З а м е ч а н и е 3. *Вышеизложенные в статье результаты для уравнения* (1) *в случае самосопряженного положительного оператора А аналогичны результатам для этого же уравнения, но уже с произвольным оператором А, не обладающим свойством самосопряженности или положительности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савчук, В. Ф. Итеративный метод с переменным шагом решения некорректных задач / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Математические исследования Сб. ст. / БрГУ им. А. С. Пушкина ; под ред. И. Г. Кожуха. – Брест, 1998. – Вып. 1. – С. 31–35.

2. Лисковец, О. А. Метод простых итераций с попеременно чередующимся шагом для уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Докл. АН БССР. – 1977. – Т. 21. – № 1. – С. 9–12.

3. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.

4. Лисковец, О. А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I–го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.

***O.V. Matysik.* Convergence the Iteration Method with Variable Step of Solving Incorrect Problems in Energy Norm of Hilbert Space**

In the Hilbert space for solving operator equations of type I with affirmative limited self–adjoined operator the evident iteration method with variable step is proposed. Convergence property of procedure in energy norm of Hilbert space has been investigated; here it is not required to know source representability of exact solution in order to get apriori estimations of error. The sufficient conditions are received when convergence of iteration method in ordinary norm of Hilbert space goes out of the convergence in Energy Norm. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of simple iteration has been done.