УДК 101.1:510.2

Н.В. Михайлова

ФИЛОСОФИЯ МАТЕМАТИКИ В ИСТОРИЧЕСКОЙ ЭВОЛЮЦИИ НАПРАВЛЕНИЙ РАЗВИТИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ НАУКИ

В статье подчеркивается что, новые философско-математические концепции содержат в себе как наследие предшествующих концепций, так и методологическую открытость к будущим обобщениям. Поэтому эволюцию философских концепций обоснования математики можно считать движущей силой научного прогресса. Основная тенденция в исторической эволюции направлений развития фундаментальной науки – объяснить каждое частное явление, то есть поместить его в такой более общий контекст, в котором старые концепции не отмирают, а ограничиваются в своей содержательной части до более узкой сферы применения. В работе показывается, что эволюция взглядов на пути рационального обоснования математического знания приводит к необходимости синтеза разнородных подходов к философскому обоснованию математики.

Введение

Обращение математиков к философии и методологии происходит в такие периоды, когда требует осмысления большой разнородный и часто методологически противоречивый накопленный математический материал. Для философов математики ориентиром в такой познавательной деятельности может служить стабильность и историческая устойчивость тех областей математики, которые, несмотря на историческую эволюцию направлений развития фундаментальной науки и на природу математики, указывают на истинные границы формальных математических теорий. Они дают тем самым рациональные аргументы для оправдания философских программ исторического развития математики в ее конкретных разделах. Главная методологическая трудность состоит в определении границ “обосновательного слоя”, установившегося при разных методологических подходах к проблеме развития математического знания.

Итог исследований по основаниям математики прошлого столетия состоит в том, что или следует отказаться от построения программ обоснования вообще, или надо воспользоваться новой обосновательной методологией, с помощью которой можно попытаться некоторым образом реабилитировать актуальное бесконечное, имеющее непосредственное онтологическое обоснование через оправдание некоторой части трансфинитной математики. Таким образом, можно уйти от финитизма в программах обоснования, существенно расширяя тем самым возможности формалистского подхода, в русле которого развивается современная математика. Говоря о развитии математики XX столетия, В.М. Тихомиров заметил: “Во второй половине столетия математика стала приобретать характер истинно интернациональной науки. Начала осуществляться мысль Гильберта о том, что для математика весь культурный мир представляет собой единую культуру” [1, с. 3]. Новые достижения в науке всегда осмысливаются в рамках уже существующих теорий, что обеспечивает теоретическую прочность новых концепций их развития.

Конечной целью программ обоснования должен стать естественный синтез различных философско-мировоззренческих традиций применительно к философии математики, с целью создания единой методологической программы развития математики. Не следует забывать также и то, что математика всегда была и остается хорошим подспорьем для философско-мировоззренческого осмысления мира. Формирование новых принципов рационального осмысления математики влияет не только на статус абсолютно достоверного познания, но и на модели рационального роста научного знания. Ведущими математическими теориями XVII – первой половины XIX веков были различные исчисления, дальнейшее развитие которых приводило иногда к логическим противоречиям в основаниях математики. Разрешение этих трудностей было невозможно в рамках старых методологий и теорий, что и обусловило новые тенденции в историческом развитии математики: частичное обесценивание когнитивных регуляторов математического знания, расширение методологических границ в программах обоснования, ломка различных стереотипов и привычных форм взаимодействия с остальным знанием.

В связи с бурным развитием экспериментальных исследований в западноевропейской философии Нового времени происходило формирование нового физического идеала научности. Так Френсис Бэкон считал, что самое лучшее из всех доказательств есть опыт, если только он коренится в эксперименте и поэтому рассматривал математику как вспомогательное средство, как приложение к естественной философии. Переход от математического к физическому идеалу научности можно считать одним из крупнейших изменений в рамках фундаменталистской парадигмы, поскольку в первом случае в качестве обосновывающих принципов выступали аксиомы и постулаты разума, а во втором – познавательные эмпирические элементы. Однако, наряду с этим, и в рамках математического стандарта научности, происходили собственные изменения, как, например, отказ от требований самоочевидности и наглядности аксиом, с заменой их на условия независимости, непротиворечивости и полноты.

Несмотря на поразительную плодотворность математических методов, математики, с присущим им критицизмом, выявляли шаткости нового фундамента математики, что является “свидетельством исключительной интеллектуальной смелости, принципиальности, самокритичности математиков” [2, с. 105]. При этом следует иметь в виду, что, с точки зрения математической практики, математики поступают вполне рационально, заботясь больше о корректности отдельных доказательств, чем о непротиворечивости в целом, поскольку непротиворечивость теории – это необходимое следствие достоверности отдельных доказательств. Фундаментальные науки в абстрактных построениях далеко ушли от классического понимания математической строгости. Но их традиционная ориентация на математический идеал научности просматривается и в наше время. В XX веке эта тенденция ярко выражена в творчестве выдающегося немецкого математика Давида Гильберта. Один из последних периодов деятельности Гильберта был посвящен обоснованию математики путем ее полной формализации с последующим математическим доказательством непротиворечивости формализованной математики.

Знаменитая методологическая программа Гильберта, посвященная понятию математического доказательства, включала следующие три этапа: формализацию доказательства, полноту теории и критерий разрешимости. Старое математическое определение доказуемости необходимо для того, чтобы можно было задавать вопросы о том, в каком смысле для того или иного утверждения существует доказательство. Полнота построенной формальной теории означает, что любое истинное утверждение должно быть доказуемо в смысле указанной формализации понятия доказательства. Первый пункт этой программы был успешно выполнен. В настоящее время для большинства математиков “теорема” – это то, что может быть доказано в системе аксиом теории множеств Цермело-Френкеля. Если бы удалось в полном объеме реализовать второй пункт программы, то тогда разрешимость была бы эквивалентна в некотором формальном языке понятию “истинности”. Однако в 30-е годы XX столетия Куртом Гёделем по существу было показано, что никакая достаточно сильная теория с явно заданным списком аксиом не может быть полной. Поэтому в полной общности ответить на вопрос о доказуемости произвольного математического утверждения невозможно. Но это обстоятельство не является преградой для развития математики.

Всякая научная область, по Гильберту, жизнеспособна, пока в ней избыток новых проблем. Недостаток новых проблем означает отмирание или прекращение самостоятельного развития. Методологическое единство математики было для Давида Гильберта результатом не только глубокого убеждения, но и его богатого научного опыта. Развитие математики связано с двумя важнейшими факторами: ее приложениями и решением научных проблем. На первом и втором Международных конгрессах математиков, которые регулярно проводятся уже более 100 лет, состоялись доклады крупнейших математиков того времени – Анри Пуанкаре и Давида Гильберта, посвященные указанным компонентам развития математики, а именно, вопросам, связанным с физикой, и проблемам, возникающим в самой математике. На совместном заседании секции истории и библиографии и секции преподавания и методологии проходившего в Париже 2-го Международного конгресса математиков 8 августа 1900 года Давид Гильберт выступил со своим докладом "Математические проблемы". Из предложенных Гильбертом 23 проблем первые 6 из них относятся к обоснованию и аксиоматизации математических дисциплин, а в остальных рассматриваются более специальные вопросы.

На последнем пленарном заседании президент конгресса Анри Пуанкаре выступил с докладом "О роли интуиции и логики в математике". Важным фактором развития математики является систематическая разработка новых фундаментальных теорий. Содержательных докладов об этой составляющей развития современной математики не было ни на первых математических конгрессах, ни на последующих конгрессах. "Быть может, потому, – замечает академик-математик Д.В. Аносов, – что не нашлось третьего математика такого ранга, как Пуанкаре и Гильберт, или потому, что наличие этой третьей компоненты очевидно?" [3, с. 29]. Доклад Гильберта был, как бы спровоцирован докладом Пуанкаре. Не касаясь проблем, сформулированных Пуанкаре и разбросанных по его работам, Гильберт, по его словам "как бы на пробу", решил показать, что важнейшие стимулы для развития математики содержатся внутри ее самой. Благодаря свойственной Давиду Гильберту широте научных интересов его проблемы содержали круг вопросов, затрагивающих значительную часть математики.

Историкам математики до сих пор не всегда понятны причины, которыми руководствовался Давид Гильберт при постановке той или иной задачи, поскольку только часть его работ предшествуют докладу "Математические проблемы", например, исследования по алгебраической теории чисел и теории инвариантов, тогда как остальные, например, исследования по основаниям и логике, появляются намного позже. Давид Гильберт удачно выбирал образцы нерешенных задач, не ошибаясь в оценке их важности, но даже такому математическому гению не всегда удавалось правильно оценить их сравнительную сложность. Например, он считал, что гипотеза Римана, то есть основная часть 8-й проблемы, будет доказана еще при его жизни. Он надеялся, что самые молодые из присутствующих доживут до решения проблемы Ферма, хотя ее нет в списке проблем, ее и так все помнили. Но, он был уверен, что даже им не суждено узнать об иррациональности $2^{\sqrt{2}}$ и вообще о решении 7-й проблемы. Мы можем сейчас с уверенностью утверждать, что все вышло наоборот.

Гипотеза Римана до сих пор не доказана, доказательство теоремы Ферма, благодаря усилиям многих математиков, было найдено в конце XX века, а иррациональность $2^{\sqrt{2}}$ была доказана за 14 лет до смерти Гильберта. Тем не менее, эта ошибка гения указывает на то, что он действительно умел выбирать труднейшие задачи. Напомним, что именно пифагорейцы сделали открытие, связанное с $\sqrt{2}$, которое перевернуло их взгляды. Они доказали, что отношение диагонали к стороне квадрата нельзя выразить отношением целых чисел, то есть оно иррационально. Поскольку эмпирически проверить несоизмеримость диагонали со стороной невозможно, то многие считают, что математика как наука началась с этой теоремы Теэтета, который дал ясное и законченное доказательство, хотя практически невозможно установить, кому же принадлежит данный результат. Со временем было осознано, что добиться общепризнанных и неопровержимых результатов в математике можно, лишь применяя строго логические рассуждения.

Заметим, что если вместо формальных систем и элементарных теорем о них рассмотреть для сравнения использование целых чисел, то при таком сопоставлении можно было бы развить аналогию между теоремой Гёделя о неполноте и иррациональностью числа $\sqrt{2}$. Греческая геометрия стараниями Евклида и его последователей сделалась значительно более строгой благодаря тому, что стала полагаться только на логический вывод из явно сформулированных предложений. Хотя классические аксиомы Евклида и служили продолжительное время образцом точных наук, они все же являлись трудно уловимым смешением кажущихся определений и точных постулатов, и, вообще говоря, не независимы друг от друга. Аналогичный процесс в теории множеств выдающихся немецких математиков занял уже не 300, а всего лишь 35 лет. Если Георг Кантор сыграл роль Фалеса – роль основателя и первооткрывателя теории множеств, исходя из интуитивных представлений, то его ученик Эрнест Цермело сыграл роль Евклида, создав в 1908 году аксиоматическую теорию множеств. На самом деле, как Евклид являлся одним из многих в длинном ряду греческих геометров – творцов евклидовой геометрии, так и Цермело был лишь первым из полдюжины математических авторитетов – создателей аксиоматической теории множеств.

Как отмечают историк математики С.С. Демидов и математик А.Н. Паршин, анализировавшие современное состояние математических проблем Гильберта, их решение составляет одну из наиболее увлекательных страниц истории математики XX века. “Сегодня, когда нам известна история решения проблем на протяжении целого столетия, мы видим, что проблемы эти оказались не равнозначными по сложности и иногда сформулированы так, что понимание сути зависит от того, какой смысл вкладывается в ту или иную гильбертовскую формулировку” [4, с. 582]. Одной из причин кризиса, разразившегося в конце XX века, стал тот факт, что понятие множества в математике было априорным. Георг Кантор пытался дать ему определение, например, в его примечаниях к “учению о многообразиях” он поясняет, что под множеством понимают всякую совокупность определенных элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона. С современной точки зрения это определение довольно расплывчато. С некоторой долей иронии его называют “наивным”, сравнивая его с определением Евклида для точки как “места без длины и ширины”.

Теория множеств, в которой понятие множества считается априорным, называется в современной математической литературе наивной, в отличие от аксиоматизированной теории множеств, в которой понятие множества задается с помощью систем аксиом. Фундаментальные первичные понятия математики, как правило, вводятся двумя способами: содержательным, или как было сказано выше наивным, и формальным, или аксиоматическим. Кантор считал, вполне в духе современной математики, что совокупность является множеством, если ее можно мыслить как единое без противоречия. В отличие от современных математиков Кантора не удовлетворяло чисто формальное определение и он искал позитивное содержание нового понятия. В его понимании множества выделяется целостность, образованная в результате действия определенного закона его формирования. В современном формальном подходе к понятию множества законоообразный характер образования множества остается незамеченным.

В абстрактной теории множеств особое положение занимает одна аксиома, которую часть математиков с трудом принимала на веру, как в свое время и известный постулат о параллельных в геометрии. Мы имеем в виду аксиому выбора. Аксиома выбора демонстративно неэффективна и шок, вызванный ею и появившимися практически тогда же парадоксами теории множеств, заставил, наконец, осознать, что слишком многое в математике конца XIX века стало неконструктивным. Трудности, связанные с этой аксиомой, порождены широтой, которая придается любой совокупности множеств, хотя большинству людей аксиома выбора, впрочем, как и постулат о параллельных, кажется интуитивно правдоподобной. Речь идет о том, что для бесконечной совокупности множеств по существу нет способа составить новое множество поочередной выборкой элементов из всех членов заданной совокупности. В определенном смысле, признание аксиомы выбора – это тоже акт веры. Неудивительно, что единственным аргументом в пользу принятия аксиомы выбора является убежденность в том, что Бог обладает могуществом для сотворения соответствующей функции выбора. С точки зрения платонистов, вопрос об истинности аксиомы выбора имеет объективный характер. Поэтому одни из них, в соответствии со своей позицией, принимают ее, другие отрицают ее, а есть и также, кто принимает аксиому выбора с рядом ограничений.

Американский математик Поль Коэн и его коллега Ройбен Херш характеризуют полезность этой аксиомы следующим образом: “Оказывается, из невинной с виду аксиомы выбора следуют некоторые неожиданные и чрезвычайно сильные выводы. Например, мы получаем возможность использовать индуктивное построение для доказательства утверждений об элементах в любом множестве...” [5, с. 47]. Поначалу казалось, что созданная в конце XIX века Георгом Кантором теория множеств может стать универсальным фундаментом для всех теоретических разделов математики. Однако вскоре выяснилось, что этот теоретико-множественный фундамент выглядит не вполне надежным, в связи с обнаруженными внутренними трудностями новой теории. До сих ор многих удивляет триумфальное шествие канторовской программы в математике. Для этого есть немалые основания. Возможно поэтому, в учебной, философской и научно-популярной литературе как бы, между прочим, сообщается об изъянах канторовской программы. Наиболее существенной из этих проблем была неполнота теории множеств.

Даже проведенная Эрнестом Цермело и усовершенствованная несколько лет спустя Абрагамом Френкелем формальная аксиоматизация “наивных” принципов рассуждений Кантора, избавив ее от известных парадоксов, не позволила дать ответ на многие простые вопросы о множествах, например, выяснить, существуют ли теоретически неизмеримые по Лебегу множества действительных чисел. Для этого требовались новые принципы или аксиомы, важнейшей из которых оказалась аксиома выбора, введенная Цермело. В реальном мире таких абстракций нет – они являются лишь идеальными образованиями, но ведь все математические абстракции таковы: ни число, ни точка, ни функция не воспринимаются органами чувств человека, хотя для них не требуют недостаточного нам “созерцания”. Бесконечные множества ничуть не хуже в этом отношении. Теория множеств Цермело-Френкеля, несмотря на все критические замечания, самая фундаментальная на сегодня, и на ее основе строятся основные разделы современного математического и функционального анализа. Выяснению роли этой аксиомы в математике посвящено немало работ, основной из которых считают статью польского математика Вацлава Серпинского “Аксиома Zermelo и ее роль в теории множеств и в анализе” (1918).

Например, в популярном стандартном университетском курсе Г.М. Фихтенгольца “Основы математического анализа” слова “аксиома выбора” вообще не встречаются, однако большинство содержащихся в нем утверждений в той или иной степени связано с этой аксиомой, хотя может быть и опосредовано. Так понятие предела функции одного переменного определяется двумя способами: с помощью последовательностей и неравенств, использующих язык ε-δ. Эквивалентность этих двух определений доказывается только с помощью аксиомы выбора. Отмеченная двойственность остается и при определении пределов интегральных сумм. Та же двойственность сохраняется и при определении дуги плоской кривой. Без аксиомы выбора определения предельной точки и точки сгущения, предела функции через пределы последовательностей и на языке ε-δ и так далее являются существенно различными. Без этой аксиомы нельзя было бы, в зависимости от удобства рассуждений или вычислений, пользоваться тем или иным определением. В математике появились бы два разных определения, например, предела функции или интеграла Римана, а при доказательстве теорем анализа пришлось бы изобретать более изощренные способы рассуждений.

Аксиома выбора имеет внешне простую и весьма привлекательную формулировку, настолько естественную, что ее применение до начала XX века не осознавалось явно. Какая из математических систем (с аксиомой выбора, без нее или допускающая ее с некоторыми ограничениями) самая полезная зависит от того, какой математической концепции – платонизма или антиплатонизма – мы придерживаемся. Отсутствие аксиомы выбора не обеспечивает само по себе реализации чистых теорем существования с помощью явно определенных множеств. С точки зрения двойственности рассмотренных понятий, ограничение “определенными множествами” обеспечивает реализацию аксиомы выбора лишь при условии, что эти определения явно вполне упорядочены и само отношение между определением и определяемым множеством тоже определимо. Заметим, что в математике существуют многочисленные нетривиальные эквивалентные утверждения или аналоги аксиомы выбора, что впрочем, и не удивительно, если вспомнить о подобном феномене, сопровождавшем аксиому параллельности в геометрии. Это типичная ситуация для каждого фундаментального математического утверждения.

В современной математической литературе имеются различные, хотя и внешне эквивалентные, формулировки аксиомы выбора, а также ее следствия и альтернативы. Диапазон мнений об аксиоме Цермело довольно широк. Сомнения и споры вызывали в основном следующие два принципиальных момента. Во-первых, речь идет о реализации выбора бесконечной последовательности элементов, во-вторых, выбор элемента из произвольного неупорядоченного множества – это тоже логическая проблема. Выбираемые с ее помощью множества или функции определяются не единственным образом; их существование принимается, но принципиально не дается средства предпочесть что-либо одно. Говоря о выборах с помощью аксиомы Цермело, создатель Московской математической школы, философствующий академик Н.Н. Лузин утверждал, что ее сторонник “выбирает и грезит” по-своему, поэтому нет, не только возможности сообщить своему собеседнику о проделанных в бесконечном количестве выборах, но даже трудно быть согласным с самим собой. За старыми дискуссиями по поводу аксиомы выбора стояли глубокие и интересные проблемы.

Специалисты по математической логике и основаниям математики высказывают сомнения в том, что вопрос логической независимости этой аксиомы действительно точно отражает сущность проблемы. Так как, с математической точки зрения, аксиома выбора не противоречит остальным аксиомам теории множеств, то нет причин не применять ее в математических доказательствах. С другой стороны характер этой аксиомы сильно отличает ее от остальных аксиом, поэтому есть смысл и в том, чтобы исследовать модели теории множеств, которые не удовлетворяют аксиоме выбора. Как отмечает специалист по математической логике Томас Йех, “ситуация аналогична неевклидовым геометриям: изучая такие модели, мы узнаем, какие теоремы в действительности опираются на аксиому выбора и какие связи между следствиями и различными ослабленными формами этой аксиомы” [6, с. 58]. Убедительность доказательства зависит от багажа математических знаний, поскольку для профессионально подготовленного математика доказательство может быть достаточно коротким, а для новичка такое доказательство может оказаться довольно сложным.

История развития математики подтверждает, что никакая ограниченная идейная база, никакой фиксированный метод не дают возможности решать все проблемы математики, даже при достаточности и неизменности ее аксиом. Не существует общего метода, который определял бы по аксиоматическому описанию любой теории, противоречива она или нет. Идеальные понятия математики – это эффективные орудия человеческой мысли, способствующие решению новых проблем, требующих новых фундаментальных идей. В этом смысле классическая математика – неисчерпаемый источник идей, которые можно классифицировать по паре дополнительных способов описания “платонизм – антиплатонизм”. С точки зрения дополнительных категорий в эпистемологии можно утверждать, что рациональные и иррациональные подходы, а также классические и неклассические стратегии познания характеризуют целостное математическое мышление.

Поиски окончательного ответа на проблемные вопросы развития математики не должны выливаться в имитацию математического исследования, когда философия и история математики пытается следовать в собственных стандартах строгости только за самой математикой. “Последние полвека были безусловно золотым периодом математики. В частности, было решено множество важных, много лет стоявших перед наукой проблем” [7, с. 6]. Хотя чистая математика все еще остается наиболее методологически обоснованным научным знанием, ее притязания на уникальный статус становится все менее философски обоснованными. Надежда на решение методологической задачи по достижению полной определенности путем формирования прочных оснований математики была поколеблена сначала гёделевскими результатами, а затем и возможным появлением в обозримом будущем математических рассуждений такой сложности, о которой никто из математиков помыслить не может. Для того, чтобы собрать единую картину, нужно объединение различных подходов.

Заключение

Современные кризисы в философии математики, которые носят эпистемологический характер, не связаны с онтологией математики. Поэтому для углубления философии математики, в контексте эволюции взглядов на сущность природы математики на пути рационального обоснования развития математического знания необходим синтез различных потоков философско-математической мысли. Для выхода в новое смысловое пространство необходим синтез различных точек зрения, в том числе и ставших достоянием истории философии математики и фундаментальной науки, поскольку все они контекстуально написаны на языке математики. Именно внутренняя логика историко-философского процесса как логика последовательно возникающих программ развития математики стимулирует выделение проблемного поля философии математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихомиров, В. Математика в первой половине XX века / В.Тихомиров // Квант. – 1999. – № 1. – С. 3–9.

2. Визгин, Вл. П. “Завоевание физики духом математики” и его отражение в художественной литературе (по романам Р. Музиля и Ч. Сноу) / Вл. П.Визгин // Исследования по истории физики и механики. 1993-1994. – М. : Наука, 1997. – С. 102–112.

3. Аносов, Д. В. Взгляд на математику и нечто из нее / Д.В.Аносов. – М. : Изд-во МЦНМО, 2000. – 32 с.

4. Демидов, С. С. Математические проблемы / С. С.Демидов, А. Н.Паршин // Д. Гильберт. Избранные труды. Том II. – М. : Изд-во “Факториал”, 1998. – С. 580–591.
5. Коэн, П. Дж., Херш, Р. Неканторовская теория множеств / П. Дж. Коэн, Р. Херш // Природа. – 1969. – № 4. – С. 43–55.
6. Йех, Т. Дж. Об аксиоме выбора / Т. Дж. Йех // Справочная книга по математической логике: В четырех частях. Часть II. Теория множеств. – М. : Наука, 1982. – С. 35–63.
7. Тихомиров, В. Математика во второй половине XX века / В.Тихомиров // Квант. – 2001. – № 2. – С. 2–7.

Mikhailova N.V. **Philosophy of mathematics in historical evolution of directions of development of fundamental science**

The description of the concrete parts of mathematics in their detailed workout is the task of the historians of mathematics but the reconstruction of the methodological evolution of mathematical theory is the task of the philosophers of mathematics The new philosophy-mathematical conceptions contain both the heritage of the previous conceptions and the methodological openness to the future generalizations. That’s why the evolution of the philosophical conceptions of basing of mathematics may be considered to be the moving force of the scientific progress. The main tendency in the historical evolution of the directions of the development of the fundamental science is to explain every private phenomena, that means to place it into a such more general context, in which the old conceptions do not die out but are limited in their condense part till the narrowest sphere of usage. In this paper it is shown that the evolution of views on the way of the rational basing of the mathematical knowledge leads to the necessity of synthesis of different approaches to the philosophical basing of mathematics.