

Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

В.С. Секержицкий, И.В. Секержицкий

**ВЫРОЖДЕННЫЕ ГАЗЫ
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

Пособие

**Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2010**

УДК 524+537
ББК 22.3

*Рекомендовано редакционно-издательским советом
учреждения образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор

В.А. Плетюхов

кандидат физико-математических наук, доцент

И.И. Макоед

Секержицкий, В.С.

Вырожденные газы в магнитном поле : пособие / В.С. Секержицкий, И.В. Секержицкий [Электронный ресурс]. – Электрон. текстовые, граф., дан. (5 Мб). – Брест : БрГУ имени А.С. Пушкина, 2010. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: ПК Pentium I или выше ; 32 Мб ОЗУ ; Windows 95 ; SVGA 65536 и более цв. ; 1024x768 ; 4x CD-ROM дисковод ; мышь.

Пособие содержит задания (в том числе практические, решаемые с использованием персонального компьютера), выполнение которых может способствовать изучению специфических свойств вырожденных газов и вещества в экстремальных условиях, выработке умений и навыков самостоятельных студенческих научных исследований по данной тематике. Приведены необходимые для выполнения заданий теоретические сведения о физических свойствах ферми- и бозе-газов в магнитных полях.

Пособие предназначено студентам университетов, специализирующимся в области теоретической физики.

**УДК 524+537
ББК 22.3**

© УО «Брестский государственный
университет имени А.С. Пушкина», 2010

ВВЕДЕНИЕ

Согласно существующим представлениям, в нейтронных звездах (пульсарах) плотность вещества может превышать ядерную. При плотностях, меньших ядерной и характерных для оболочек нейтронных звезд и недр белых карликов, должны быть условия для реализации электронно-ядерной (Ae), электронно-нейтронно-ядерной (Aen) или электронно-нуклонной (enp) фаз вещества. В любой из перечисленных фаз одним из компонентов вещества является газ свободных электронов, который при плотностях $\rho > 10^6$ г/см³ релятивистский; при этом температура его вырождения превышает 10^{10} К, что значительно больше предполагаемых температур в недрах указанных астрофизических объектов. В веществе, находящемся в Aen - и enp -фазах, имеются также свободные нерелятивистские нейтроны, а в enp -фазе еще и свободные нерелятивистские протоны.

Многие астрофизические модели и оценочные расчеты основаны на использовании приближений идеальных ферми- и бозе-газов для компонентов вещества, входящего в состав исследуемых и моделируемых астрофизических объектов. При решении задач, связанных с применением разнообразных уравнений состояния вещества, необходимо знание аналитических выражений (в ряде случаев хотя бы приближенных) для термодинамических характеристик ферми- и бозе-газов.

Теоретически обоснованная и подтвержденная наблюдательными данными (по крайней мере, косвенными) возможность существования в сверхплотных звездах весьма сильных магнитных полей делает актуальной задачу об учете их влияния на физические свойства сверхплотного вещества. Для этого в первую очередь необходимы уравнения и соотношения, позволяющие проводить термодинамическое описание ферми-газов в магнитном поле. Следует заметить, что изучение свойств ферми-газа (в частности, нерелятивистского электронного газа) в магнитном поле представляет интерес не только для астрофизики, но и для физики любых систем, содержащих свободные фермионы.

Для исследования процессов, связанных со вспышками Сверхновых, представляет существенный интерес вопрос о влиянии магнитного поля на свойства ферми- и бозе-газов при высоких температурах. В горячих астрофизических объектах возможны процессы рождения электронно-позитронных и других пар «частица-античастица», поэтому вполне естественна задача исследования влияния сильного магнитного поля на параметры вещества, в состав которого входят указанные пары.

Исследование влияния магнитного поля на термодинамические характеристики идеальных ферми-газов представляет существенный интерес как для физики сверхплотных магнитных звезд, так и для физики твердого

тела и полупроводников, и потому этой проблеме посвящено большое количество научных публикаций, основу для которых составили классические работы В. Паули [1] и Л.Д. Ландау [2]. В [3] приведен способ вычисления энергетических и магнитных характеристик нерелятивистского электронного газа в магнитном поле в приближениях крайнего вырождения и невырождения, основанный на предварительном расчете большого термодинамического потенциала и использовании метода термодинамических функций. Данная методика достаточно универсальна и может успешно применяться для термодинамического описания любых идеальных крайне вырожденных и невырожденных ферми-газов и невырожденных бозе-газов (как нерелятивистских, так и релятивистских) в магнитном поле (см. [4; 5], где имеются ссылки на соответствующие оригинальные работы).

Подходы других авторов работ по данной тематике, математический аппарат и методы расчетов весьма разнообразны. Это вполне естественно, т.к. вычисление термодинамических характеристик ферми- и бозе-газов в магнитном поле в большинстве случаев не самоцель, а лишь средство для решения прикладных задач различных разделов физики.

Изучение уже установленных теоретически физических свойств сверхплотного вещества предусмотрено базовой учебной программой дисциплины специализации по теоретической физике (раздел «Избранные вопросы статистической физики и физики вещества в экстремальных условиях») для специальности 1-31 04 01-03 Физика (научно-педагогическая деятельность), разработанной на кафедре теоретической физики и астрономии учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина». Указанный раздел предполагает использование знаний, умений и навыков, полученных студентами при изучении других разделов данной программы и раздела «Термодинамика и статистическая физика» базового курса теоретической физики, для решения конкретных теоретических задач, в том числе соответствующих научной тематике кафедры и представляющих собой теоретическую основу для дипломных работ по теоретической физике.

Предлагаемое пособие, основанное на материалах авторских монографий [4; 5], содержит необходимые теоретические сведения по рассматриваемым вопросам и задания (теоретические и практические, решаемые с использованием персонального компьютера), выполнение которых может составить основу для выработки умений и навыков самостоятельных студенческих научных исследований свойств вырожденных газов и вещества в экстремальных условиях.

1 ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ФЕРМИ- И БОЗЕ-ГАЗОВ

1.1 Ферми- и бозе-газы в отсутствие внешних воздействий

Один из наиболее эффективных методов вычисления термодинамических характеристик системы с изменяемым числом частиц основан на предварительном вычислении большого термодинамического потенциала

$$\Omega = F - \Phi, \quad (1.1)$$

где F и Φ – свободная энергия Гельмгольца и термодинамический потенциал Гиббса соответственно. Как известно, естественными переменными для Ω -потенциала являются температура T , объем V и химический потенциал χ :

$$d\Omega = -SdT - PdV - Nd\chi, \quad (1.2)$$

а энтропия S , давление P и число частиц N могут быть найдены путем дифференцирования:

$$S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V,\chi}; \quad P = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial V}\right)_{T,\chi}; \quad N = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}\right)_{T,V}. \quad (1.3)$$

Другие термодинамические потенциалы выражаются через Ω -потенциал:

$$\Phi = \chi N = -\chi \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}\right)_{T,V}, \quad (1.4)$$

$$F = \Phi - PV = \Phi + \Omega = \Omega - \chi \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}\right)_{T,V}, \quad (1.5)$$

$$U = F + TS = \Omega - \chi \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}\right)_{T,V} - T \left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V,\chi}, \quad (1.6)$$

$$H = U + PV = U - \Omega = -\chi \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\chi}\right)_{T,V} - T \left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{V,\chi}. \quad (1.7)$$

Здесь U и H – внутренняя энергия и энтальпия. Таким образом, задачи нахождения необходимых термодинамических характеристик ферми- и бозегазов могут быть сведены к вычислению соответствующих Ω -потенциалов этих газов.

Рассмотрим газ из частиц, которые можно считать элементарными в условиях данной задачи. Энергии нерелятивистской и релятивистской частиц даются соответственно известными выражениями:

$$\varepsilon = mc^2 + \frac{p^2}{2m}, \quad (1.8)$$

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}, \quad (1.9)$$

где m и p – масса и импульс частицы, c – скорость света. Среднее число частиц в i -м квантовом состоянии

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \chi}{kT}\right) \pm 1}, \quad (1.10)$$

где k – постоянная Больцмана, T – температура. Формулы данного подраздела имеют аналогичный вид для фермионов и бозонов, отличаясь в некоторых случаях лишь знаком (верхний знак соответствует фермионам, а нижний – бозонам). В элементе фазового объема $4\pi p^2 dp dV$ число возможных квантовых состояний равно

$$dG = g \frac{4\pi p^2 dp dV}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (1.11)$$

где $g = 2s + 1$, s – спин частицы, \hbar – постоянная Планка. Тогда число частиц в объеме V

$$N = g \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \chi}{kT}\right) \pm 1}. \quad (1.12)$$

Вполне понятно, что используя формулы (1.8) или (1.9), можно перейти в (1.12) от интегрирования по импульсу p к интегрированию по энергии ε .

Как известно (см., например, [3, с. 181]), большой термодинамический потенциал ферми- или бозе-газа дается выражением:

$$\Omega = \mp kT \sum_i g_i \ln \left(1 \pm \exp \frac{\chi - \varepsilon_i}{kT} \right). \quad (1.13)$$

Переходя от суммирования к интегрированию, получаем:

$$\Omega = \mp \frac{gkTV}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \ln \left(1 \pm \exp \frac{\chi - \varepsilon}{kT} \right) p^2 dp. \quad (1.14)$$

Заметим, что в общем случае интеграл в (1.14) в элементарных функциях не вычисляется. Переход к интегрированию по энергии и интегрирование по частям позволяют несколько упростить выражение (1.14) (см., например, [6, с. 185]), но также приводят к интегралу, который не берется в элементарных функциях. Лишь в частных случаях невырожденных ферми- и бозе-газов и сильно вырожденного ферми-газа возможны дальнейшие аналитические преобразования выражения (1.14) и использование соотношений (1.3)–(1.7) для вычисления других термодинамических характеристик. Эти вопросы будут рассмотрены ниже.

1.2 Ферми- и бозе-газы в магнитных полях

Рассмотрим, как изменятся формулы подраздела 1.1 при наличии постоянного и однородного магнитного поля с индукцией B , действующего на фермионы или бозоны рассматриваемых газов.

Следуя классической работе Паули [1], для полной энергии нерелятивистского незаряженного фермиона можно записать:

$$\varepsilon = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + 2s\sigma\mu B, \quad (1.15)$$

где $s = \mp 1/2$ – величина проекции спина частицы на направление вектора индукции магнитного поля, σ – величина отношения собственного магнитного момента фермиона к соответствующему магнетону μ . Для нерелятивистского незаряженного бозона с $s = 0$ имеет место выражение (1.8). Далее из незаряженных частиц будут рассматриваться лишь нейтроны, причем при концентрациях, для которых справедливо нерелятивистское приближение. В этом случае справедливы формулы (1.12) и (1.14) при $g = 2$ и энергии ε , определяемой выражением (1.15).

Иначе обстоит дело с заряженными частицами, на которые достаточно сильное магнитное поле может оказывать квантующее действие [2]. Энергия нерелятивистского фермиона в этом случае [2]

$$\varepsilon = mc^2 + \frac{p_z^2}{2m} + \mu B(2n+1) + 2s\sigma\mu B, \quad (1.16)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер квантового уровня Ландау, p_z – проекция импульса p частицы на направление индукции магнитного поля, $\sigma\mu$ – собственный магнитный момент фермиона, $\mu = e\hbar/(2mc)$ – магнетон, e – модуль заряда, $s = \mp 1/2$.

Число квантовых состояний фермиона с определенным направлением спина, находящегося в объеме V и обладающего проекцией импульса от p_z до $p_z + dp_z$, при наличии магнитного поля определяется выражением [2]:

$$dG = \frac{m\mu BV}{2\pi^2\hbar^3} dp_z. \quad (1.17)$$

Тогда

$$N = \frac{m\mu BV}{2\pi^2\hbar^3} \sum_s \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \chi}{kT}\right) + 1}, \quad (1.18)$$

$$\Omega = -\frac{kTm\mu BV}{2\pi^2\hbar^3} \sum_s \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1 + \exp\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right) dp_z. \quad (1.19)$$

Аналогично для нерелятивистских заряженных бозонов с $s = 0$ запишем:

$$\varepsilon = mc^2 + \frac{p_z^2}{2m} + \mu B(2n+1), \quad (1.20)$$

$$N = \frac{m\mu BV}{2\pi^2\hbar^3} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_z}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \chi}{kT}\right) - 1}, \quad (1.21)$$

$$\Omega = \frac{kTm\mu BV}{2\pi^2\hbar^3} \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \ln\left(1 - \exp\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right) dp_z. \quad (1.22)$$

Для релятивистских заряженных микрочастиц в квантующем магнитном поле также справедливо (1.17), а значит и формулы (1.18), (1.19), (1.21) и (1.22), но выражения для энергии фермиона и бозона ($s = 0$) имеют соответственно вид [7, с. 212]:

$$\varepsilon = \sqrt{c^2 p_z^2 + \left(\sqrt{m^2 c^4 + 2mc^2 \mu B(2n+1+2s)} + 2s(\sigma-1)\mu B\right)^2}, \quad (1.23)$$

$$\varepsilon = \sqrt{c^2 p_z^2 + m^2 c^4 + 2mc^2 \mu B(2n+1)}. \quad (1.24)$$

Аналитические преобразования выражений (1.18), (1.19), (1.21) и (1.22) возможны лишь в частных случаях невырожденных ферми- и бозе-газов и сильно вырожденного ферми-газа.

2 КРАЙНЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ ФЕРМИ-ГАЗЫ

2.1 О поляризации крайне вырожденных идеальных ферми-газов в магнитном поле

2.1.1 Как известно из учебной и научной литературы по термодинамике и статистической физике, для крайне вырожденного нерелятивистского ферми-газа понятие «энергия Ферми» означает как максимальную полную, так и максимальную кинетическую энергии фермиона, численно равные химическому потенциалу. Если магнитное поле отсутствует, то данное утверждение возражений не вызывает. Однако для системы фермионов в магнитном поле положение существенно меняется.

Рассмотрим идеальный парамагнитный ферми-газ (например, нейтронный при достаточной для стабильности нейтронов концентрации электронов сверхплотного вещества) при температуре абсолютного нуля в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Полная (с точностью до слагаемого $m_n c^2$) энергия нейтрона с собственным магнитным моментом μ_n

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{nk} + 2s\mu_n B, \quad (2.1)$$

где кинетическая энергия $\varepsilon_{nk} = \frac{p_n^2}{2m_n}$, p_n и m_n – импульс и масса нейтрона, $s = \mp 1/2$. При этом химический потенциал (в данном случае максимальная полная энергия, отсчитываемая от $m_n c^2$)

$$\zeta_n(B) = \tau_{n\uparrow} - \mu_n B = \tau_{n\downarrow} + \mu_n B, \quad (2.2)$$

$\tau_{n\uparrow}$ и $\tau_{n\downarrow}$ – максимальные кинетические энергии нейтронов с магнитными моментами, соответственно параллельными и антипараллельными внешнему полю. Соответствующие графики зависимости полной энергии ε_n от импульса p_n имеют вид ветвей параболы, вдоль которых распределены квантовые состояния. В отсутствие магнитного поля заполнение квантовых состояний нейтронами с магнитными моментами, параллельными и антипараллельными полю, одинаково (рисунок 2.1 (а), сплошные линии). В магнитном поле обе ветви параболы смещаются друг относительно друга на величину $2\mu_n B$ (рисунок 2.1 (б)). При этом нарушается энергетическая равноправность обеих ориентаций магнитных моментов и, в соответствии с принципом запрета Паули и стремлением энергии системы к минимуму,

часть нейтронов меняет ориентацию магнитных моментов на противоположную (рисунок 2.1 (в)). Соответствующие графики зависимости кинетической энергии ε_{nk} от импульса p_n представлены на рисунках 2.1 (г), 2.1 (д) и 2.1(е).

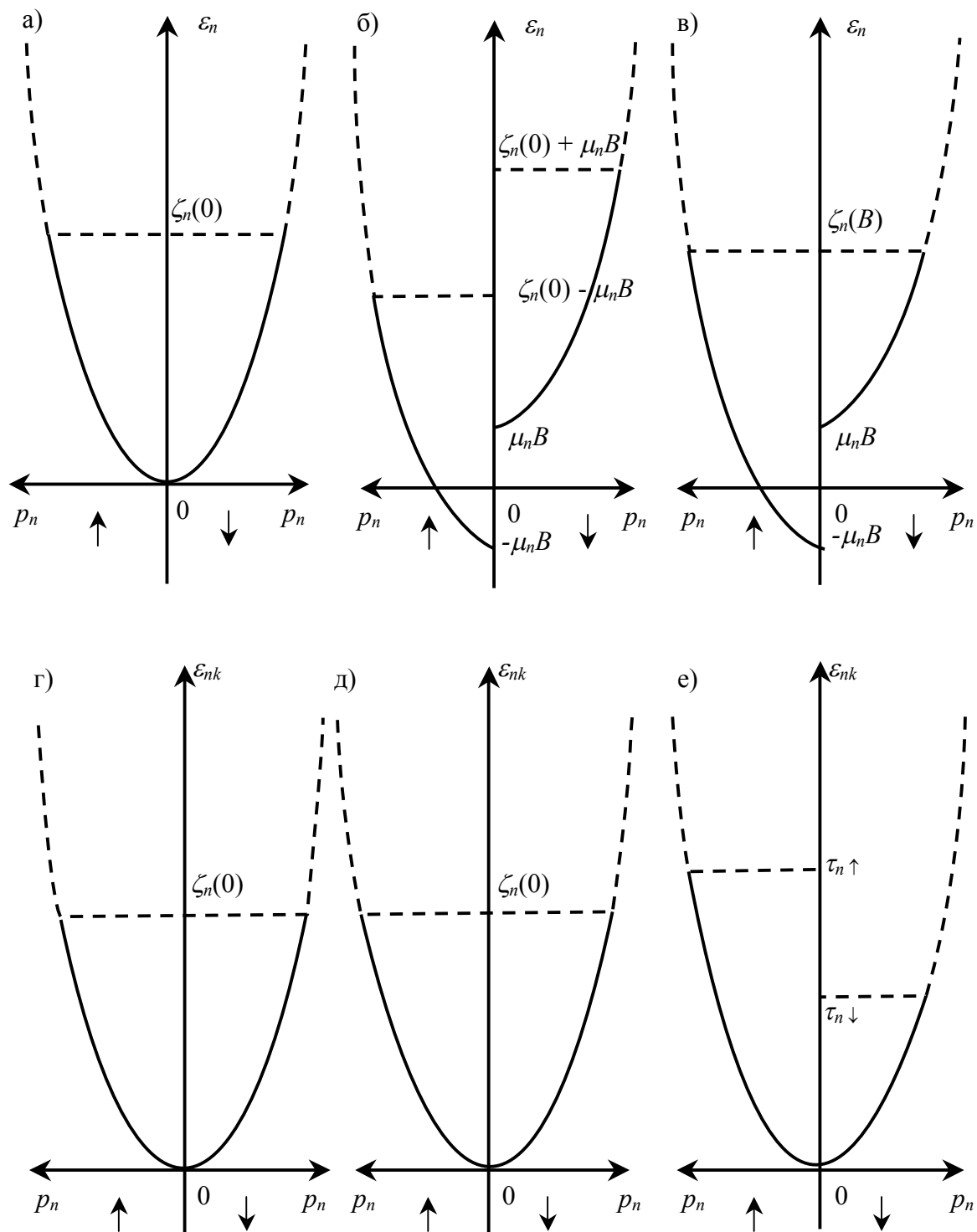


Рисунок 2.1

Концентрация нейтронов в магнитном поле находится из условия нормировки:

$$\begin{aligned}
n_n &= n_{n\uparrow} + n_{n\downarrow} = 2\pi \frac{(2m_n)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \left(\int_0^{\tau_{n\uparrow}} \sqrt{\varepsilon_{nk}} d\varepsilon_{nk} + \int_0^{\tau_{n\downarrow}} \sqrt{\varepsilon_{nk}} d\varepsilon_{nk} \right) = \\
&= \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3} (\tau_{n\uparrow}^{3/2} + \tau_{n\downarrow}^{3/2}) = \\
&= \frac{(2m_n)^{3/2}}{6\pi^2\hbar^3} \left((\zeta_n(B) + \mu_n B)^{3/2} + (\zeta_n(B) - \mu_n B)^{3/2} \right). \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что число квантовых состояний для нейтрона с определенным направлением спина, находящегося в объеме V и обладающего импульсом от p_n до $p_n + dp_n$, при наличии магнитного поля такое же, как и в отсутствие последнего:

$$dG_n = \frac{4\pi p_n^2 dp_n V}{(2\pi\hbar)^3} = 2\pi \frac{(2m_n)^{3/2} V}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\varepsilon_{nk}} d\varepsilon_{nk}. \tag{2.4}$$

Таким образом, в магнитном поле происходит частичная или полная поляризация парамагнитного ферми-газа. Степень поляризации

$$p_{0n} = \frac{n_{n\uparrow} - n_{n\downarrow}}{n_n}, \tag{2.5}$$

$n_{n\uparrow}$ и $n_{n\downarrow}$ – концентрации нейтронов с магнитными моментами, направленными по и против вектора индукции внешнего магнитного поля. Из (2.3) и (2.5) следует:

$$n_n(1 + p_{0n}) = \frac{(2m_n)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} (\zeta_n(B) + \mu_n B)^{3/2}, \tag{2.6}$$

$$n_n(1 - p_{0n}) = \frac{(2m_n)^{3/2}}{3\pi^2\hbar^3} (\zeta_n(B) - \mu_n B)^{3/2}, \tag{2.7}$$

$$(1 + p_{0n})^{2/3} - (1 - p_{0n})^{2/3} = \frac{4m_n\mu_n B}{(3\pi^2\hbar^3 n_n)^{2/3}}. \tag{2.8}$$

Последнее соотношение позволяет вычислять степень поляризации нейтронного газа заданной концентрации в зависимости от индукции магнитного поля.

Полная поляризация ($n_{n\uparrow} = n_n$, $n_{n\downarrow} = 0$) имеет место при $\mu_n B \geq \zeta_n(B)$. В этом случае

$$\tau_{n\uparrow} = 2^{2/3} \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n} = 2^{2/3} \zeta_n(0), \quad (2.9)$$

$$\zeta_n(B) = 2^{2/3} \zeta_n(0) - \mu_n B. \quad (2.10)$$

Итак, при $B \neq 0$ термин «энергия Ферми» оказывается двусмысленным: то ли его следует отнести к максимальной полной энергии, то ли к максимальной кинетической, которые существенно различаются. Данная двусмысленность и неопределенность терминологии, приводящая иногда даже к физически некорректным выводам, присуща значительному количеству научных публикаций (в том числе и ряду работ из указанных выше). На наш взгляд, имеет смысл в настоящей работе от термина «энергия Ферми» по отношению к ферми-газу в магнитном поле вообще отказаться и оперировать такими понятиями, как «максимальная полная энергия» («химический потенциал») и «максимальная кинетическая энергия», достаточно точно отражающими физическую сущность данных величин.

Аналогичная ситуация, очевидно, имеет место и при описании газа заряженных фермионов в магнитном поле с учетом диамагнетизма Ландау.

2.1.2 Рассмотрим теперь крайне вырожденный идеальный нерелятивистский электронный газ в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . В первом приближении пренебрегаем величиной аномального магнитного момента электрона и полагаем собственный магнитный момент электрона равным магнетону Бора μ_B . Используя результаты [2], выражение для полной энергии электрона в магнитном поле представим в виде:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_{ek} + 2s\mu_B B = \frac{p_{ez}^2}{2m_e} + \mu_B B(2n+1) + 2s\mu_B B, \quad (2.11)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер квантового уровня Ландау, p_{ez} – проекция импульса p_e электрона на направление индукции магнитного поля, m_e – масса электрона, $s = \mp 1/2$.

Для электронного газа график зависимости ε_e от p_{ez} в присутствии магнитного поля (рисунок 2.2 (а)) представляет собой семейство парабол, вдоль которых распределены квантовые состояния (заполненные состояния изображены сплошными линиями). Каждому значению n соответствуют две ветви параболы, смещенные друг относительно друга на величину $2\mu_B B$ (рисунок 2.2 (а)). Соответствующий график зависимости ε_{ek} от p_{ez} представлен на рисунке 2.2 (б).

Число квантовых состояний электрона с определенным направлением спина, находящегося в объеме V и обладающего проекцией импульса от p_{ez} до $p_{ez} + dp_{ez}$, при наличии магнитного поля определяется выражением [2]:

$$\begin{aligned} dG_e &= \frac{m_e \mu_B B V}{2\pi^2 \hbar^3} dp_{ez} = \frac{m_e^{3/2} \mu_B B V}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \frac{d\varepsilon_{ek}}{\sqrt{\varepsilon_{ek} - \mu_B B(2n+1)}} = \\ &= \frac{m_e^{3/2} \mu_B B V}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \frac{d\varepsilon_e}{\sqrt{\varepsilon_e - \mu_B B(2n+1+2s)}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

При этом $d\varepsilon_{ek} = d\varepsilon_e$. Легко видеть, что плотность числа квантовых состояний в энергетических переменных $g_e = \frac{1}{V} \frac{dG_e}{d\varepsilon_e} = \frac{1}{V} \frac{dG_e}{d\varepsilon_{ek}}$ является разрывной функцией энергии (как полной, так и кинетической), а для фиксированных значений B , n и s убывает с ростом энергии. Для фиксированных значений ε_e , n и s (или ε_{ek} , n и s) величина g_e с ростом индукции магнитного поля увеличивается; при этом увеличиваются «энергетические зазоры» между параболой с одинаковыми s и различными n , а также величина $2\mu_B B$ относительного смещения ветвей параболы для заданного n и различных s (см. рисунок 2.2). Таким образом, при увеличении индукции магнитного поля все большее число электронов крайне вырожденного газа попадают в состояния с меньшими значениями номера квантового уровня Ландау и $s = -1/2$, т. е. растет степень поляризации, и при достаточно больших значениях B принципиально возможна полная поляризация ферми-газа заданной концентрации. Графики зависимостей ε_e и ε_{ek} от g_e представлены на рисунке 2.3 (а, б).

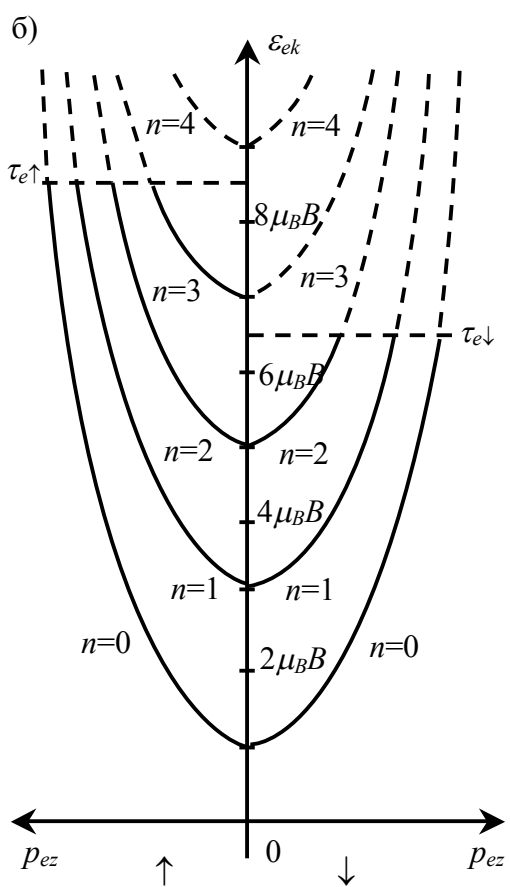
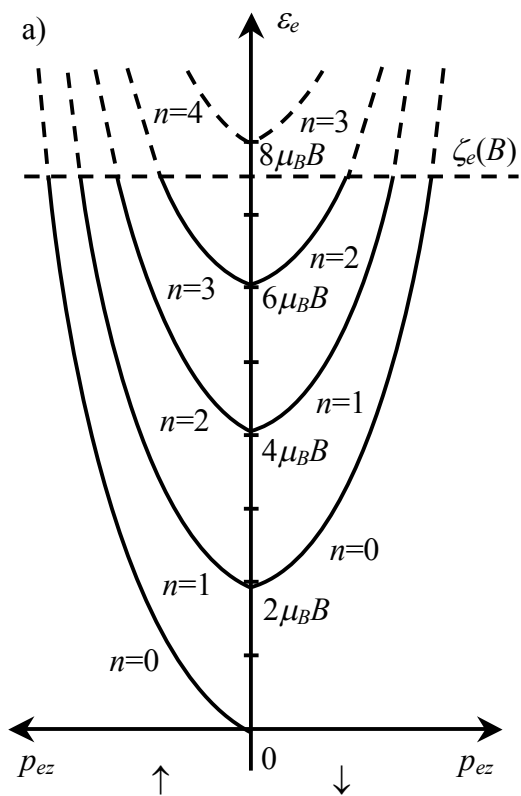


Рисунок 2.2

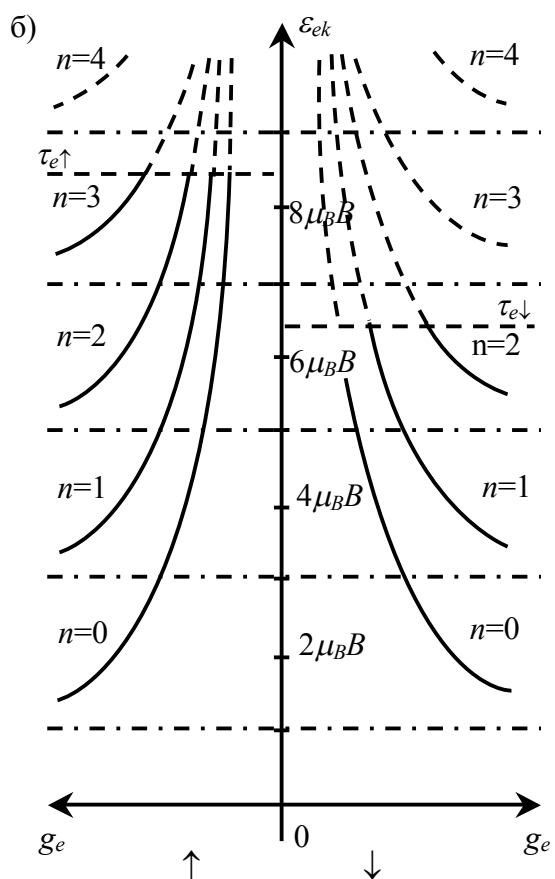
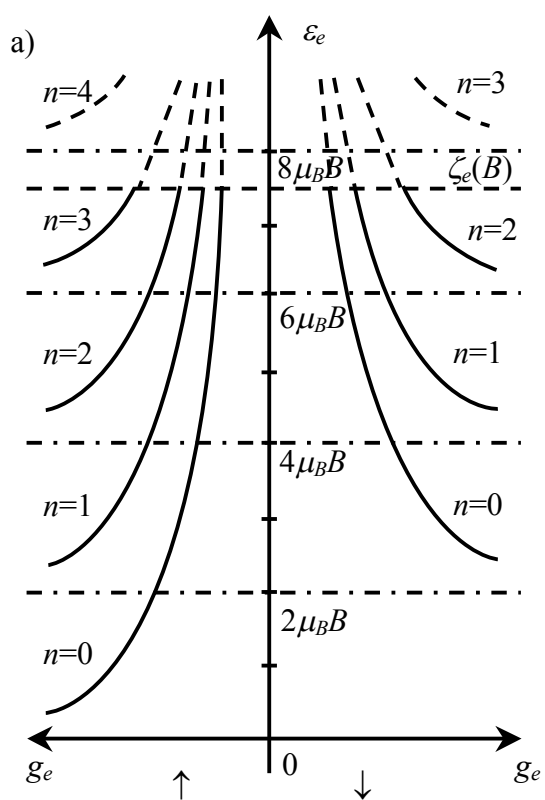


Рисунок 2.3

Концентрация электронов в магнитном поле находится из условия нормировки:

$$\begin{aligned}
n_e &= n_{e\uparrow} + n_{e\downarrow} = \frac{m_e^{3/2} \mu_B B}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \times \\
&\times \sum_n \left(\int_0^{\tau_{e\uparrow}} \frac{d\varepsilon_{ek}}{\sqrt{\varepsilon_{ek} - \mu_B B(2n+1)}} + \int_0^{\tau_{e\downarrow}} \frac{d\varepsilon_{ek}}{\sqrt{\varepsilon_{ek} - \mu_B B(2n+1)}} \right) = \\
&= \frac{2^{1/2} m_e^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left(\sqrt{\tau_{e\uparrow} - \mu_B B(2n+1)} + \sqrt{\tau_{e\downarrow} - \mu_B B(2n+1)} \right) = \\
&= \frac{2^{1/2} m_e^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left(\sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B(2n+2)} + \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B \cdot 2n} \right), \quad (2.13)
\end{aligned}$$

где $\zeta_e(B)$ – химический потенциал электронного газа, измеренный с точностью до слагаемого $m_e c^2$ (максимальная полная энергия электрона), $\tau_{e\uparrow}$ и $\tau_{e\downarrow}$ – максимальные кинетические энергии электронов с магнитными моментами, соответственно параллельными и антипараллельными внешнему полю. Суммирование в (2.13) ведется от нуля до максимальных значений n , при которых выражения под знаками радикалов неотрицательны.

Степень поляризации электронного газа

$$p_{0e} = \frac{n_{e\uparrow} - n_{e\downarrow}}{n_e}, \quad (2.14)$$

$n_{e\uparrow}$ и $n_{e\downarrow}$ – концентрации электронов с магнитными моментами, направленными по и против индукции внешнего магнитного поля. Из (2.13) и (2.14) находим:

$$n_e(1 + p_{0e}) = \frac{(2m_e)^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B \cdot 2n}, \quad (2.15)$$

$$n_e(1 - p_{0e}) = \frac{(2m_e)^{3/2} \mu_B B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B(2n+2)}. \quad (2.16)$$

Исключить величину $\zeta_e(B)$ из (2.15) и (2.16) или выразить в явном виде не представляется возможным.

Полная поляризация (см. рисунок 2.2 (а)) имеет место при

$$\zeta_e(B) \leq 2\mu_B B. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.15), получаем

$$\frac{\pi^4 \hbar^6 n_e^2}{2m_e^3 \mu_B^2 B^2} \leq 2\mu_B B \quad (2.18)$$

или

$$B \geq \frac{\pi^{4/3} \hbar^2 n_e^{2/3}}{2^{2/3} m_e \mu_B} = B^{(e)}, \quad (2.19)$$

что соответствует условию квантового предела для электронов в магнитном поле ($n = 0$, $s = -1/2$).

2.2 Термодинамические характеристики крайне вырожденных идеальных нерелятивистских ферми-газов в магнитном поле

Несложно убедиться, что выразить из формул (2.3) и (2.13) химические потенциалы ферми-газов как функции концентрации n_j соответствующих фермионов и индукции внешнего магнитного поля B в явном виде не представляется возможным. Между тем, при исследовании влияния магнитного поля на параметры сверхплотного вещества необходимы удобные для аналитических преобразований выражения химических потенциалов и других термодинамических функций замагниченных ферми-газов. В подобных случаях применяют различные параметрические представления. Мы воспользуемся здесь методикой, описанной в [3] и успешно применяемой в различных работах для описания термодинамических характеристик идеальных ферми-газов в магнитном поле при температуре $T = 0$ К. Суть данного метода, как уже отмечалось выше, состоит в предварительном вычислении большого термодинамического потенциала и использовании соотношений, связывающих другие термодинамические функции с большим термодинамическим потенциалом.

Как показано в [3], для крайне вырожденного ферми-газа большой термодинамический потенциал определяется выражением:

$$\Omega = -\sum_{(q)} (\chi - \varepsilon) \theta(\chi - \varepsilon), \quad (2.20)$$

где символом (q) обозначена совокупность аргументов, от которых зависит энергия фермиона ε ; χ – химический потенциал ферми-газа; $\theta(\chi - \varepsilon)$ – ступенчатая функция, равная 1 при $\chi > \varepsilon$ и 0 при $\chi < \varepsilon$. Для нейтральных фермионов в объеме V символ $\sum_{(q)}$ означает суммирование по двум на-

правлениям спина и интегрирование по импульсу:

$$\sum_{(q)} \dots = \sum_s \int_p \frac{V 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \dots; \quad (2.21)$$

для заряженных фермионов – суммирование по двум направлениям спина и номерам квантовых уровней Ландау и интегрирование по проекции импульса на направление магнитного поля:

$$\sum_{(q)} \dots = \sum_s \sum_n \int_p \frac{V m \mu B dp_z}{(2\pi\hbar)^2} \dots \quad (2.22)$$

Подставляя (2.4) или (2.12) в (2.30) с учетом того, что в рассматриваемых случаях принимается $\chi = \zeta$ с точностью до энергии покоя фермиона, можно найти соответствующие зависимости Ω от ζ и B .

Воспользовавшись этим методом, получим общие соотношения, применимые для описания в рамках статистической термодинамики равновесных систем крайне вырожденных ($T = 0$ К) идеальных нерелятивистских электронного, протонного и нейтронного газов в магнитном поле с учетом статических аномальных магнитных моментов микрочастиц.

Следуя [3], в результате стандартных вычислений несложно получить выражение для большого термодинамического потенциала крайне вырожденного идеального нерелятивистского ферми-газа, находящегося в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B :

$$\Omega_j(B) = \Omega_j(0) \frac{R_{5/2}(x_j)}{R_{3/2}^{5/3}(x_j)}, \quad (2.23)$$

где

$$\Omega_j(0) = -\frac{2}{5} N_j \zeta_j(0), \quad (2.24)$$

$$\zeta_j(0) = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_j} n_j^{2/3}, \quad (2.25)$$

N_j – число фермионов в объеме V_j , $n_j = N_j/V_j$ – их концентрация, m_j – масса фермиона, $j = e, p, n$ – индексы, соответствующие электронному, протонному и нейтронному газам, $R_{5/2}(x_j)$ и $R_{3/2}(x_j)$ – безразмерные функции параметра

$$x_j = \frac{\zeta_j(B)}{\mu B}, \quad (2.26)$$

ζ_j – химический потенциал; для электронов μ – магнетон Бора μ_B , для нуклонов μ – ядерный магнетон μ_π . Для заряженных фермионов

$$R_a(x_q) = a \sum_{n=0}^l \left((x_q - 2n - 1 - \sigma_q)^{a-1} + (x_q - 2n - 1 + \sigma_q)^{a-1} \right), \quad (2.27)$$

$a = 3/2, 5/2$; $q = e, p$; $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер квантового уровня Ландау. В силу свойств функции распределения Ферми-Дирака суммирование в (2.27) ведется до тех пор, пока выражение под знаком соответствующего радикала неотрицательно. Для электронейтральной среды $n_p = n_e$ и (см. также (2.13))

$$R_{3/2}(x_e) = R_{3/2}(x_p) = \frac{3\pi^2 \hbar^3 n_p}{(2m_p \mu_\pi B)^{3/2}}; \quad (2.28)$$

здесь учтено, что $m_p \mu_\pi = m_e \mu_B$. Для нейтронов (см. также (2.3))

$$R_a(x_n) = \frac{1}{2} \left((x_n - \sigma_n)^a + (x_n + \sigma_n)^a \right) = \frac{3\pi^2 \hbar^3 n_n}{(2m_n \mu_\pi B)^{3/2}}, \quad (2.29)$$

причем $(x_n - \sigma_n)^a = 0$ при $x_n \leq \sigma_n$. Здесь $\sigma_j = \mu_j / \mu$, где μ_j – собственный магнитный момент фермиона. При выводе приведенных формул принима-

лось, что спектр энергии свободного заряженного фермиона в квантующем магнитном поле

$$\varepsilon_q = \frac{p_{qz}^2}{2m_q} + \mu B(2n + 1 + 2s\sigma_q), \quad (2.30)$$

а для нейтрона

$$\varepsilon_n = \frac{p_n^2}{2m_n} + 2s\sigma_n\mu_\pi B, \quad (2.31)$$

p_{jz} – проекция импульса p_j фермиона на направление индукции магнитного поля, $s = \mp 1/2$. В приведенных соотношениях энергия фермиона отсчитывается от величины $m_j c^2$.

Формулы (2.30) и (2.31) записаны в предположении, что величины σ_j от B не зависят. Это ограничивает применимость полученных соотношений условием $B < 10^{17}$ Гс для нуклонных газов. При $B > 10^{17}$ Гс циклотронная энергия пиона превышает энергию β^- -распада нейтрона, и магнитный момент последнего зависит от B . Точная количественная теория этой зависимости до настоящего времени не разработана; качественно можно считать, что вследствие деформации в сверхсильном магнитном поле «пионной шубы» нуклона собственный магнитный момент последнего имеет тенденцию к уменьшению. Таким образом, здесь и далее мы полагаем $\sigma_p \approx 2,793$, $\sigma_n \approx 1,913$ [7]. Что же касается электронного газа, то $\sigma_e \approx 1,00116$ при $B \ll 4,414 \cdot 10^{13}$ Гс. Аномальный магнитный момент электрона имеет довольно сложную зависимость от индукции магнитного поля при $B > 4,414 \cdot 10^{13}$ Гс [7], но можно считать с достаточной степенью точности $\sigma_e \approx 1$ при любых значениях B .

Заметим также, что в обычных «земных» условиях нейтрон является нестабильной относительно бета-распада частицей, и исследование физических свойств нейтронного газа представляет интерес лишь для физики сверхплотных астрофизических объектов, характерные плотности вещества которых превышают порог появления в электронно-ядерном веществе свободных нейтронов в качестве стабильного компонента ($\rho > 10^{11}$ г/см³) [8].

2.3 Термодинамические характеристики крайне вырожденных идеальных релятивистских ферми-газов в магнитном поле

2.3.1 Воспользовавшись методом, изложенным в [3], и учитывая, что спектр энергии свободного заряженного релятивистского фермиона в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B определяется выражением [7]

$$\varepsilon_q = \sqrt{c^2 p_z^2 + \left(\sqrt{m_q^2 c^4 + 2m_q c^2 \mu B (2n + 1 + 2s)} + 2s(\sigma_q - 1)\mu B \right)^2}, \quad (2.32)$$

для большого термодинамического потенциала идеального ферми-газа при $T = 0$ К получим:

$$\Omega_q(B) = -\frac{N_q}{2} \sqrt{\chi_q^2(0) - m_q^2 c^4} \frac{R_1}{R_2^{4/3}}. \quad (2.33)$$

Здесь m_q – масса фермиона, p_{qz} – проекция его импульса p_q на направление вектора индукции поля, n – номер квантового уровня Ландау, $s = \mp 1/2$, μ – соответствующий магнетон, σ_q – величина отношения собственного магнитного момента частицы к магнетону μ , N_q – число частиц в объеме V_q , χ_q – химический потенциал,

$$R_1 = \frac{3}{2} \sum_s \sum_n \left(\sqrt{X_q^2 + Y_q} \sqrt{X_q^2 - Z_q} - \frac{1}{2} (Y_q + Z_q) \ln \left| \frac{\sqrt{X_q^2 + Y_q} + \sqrt{X_q^2 - Z_q}}{\sqrt{X_q^2 + Y_q} - \sqrt{X_q^2 - Z_q}} \right| \right), \quad (2.34)$$

$$R_2 = \frac{3}{2} \sum_s \sum_n \sqrt{X_q^2 - Z_q}, \quad (2.35)$$

$$X_q^2 = \frac{\chi_q^2(B) - m_q^2 c^4}{2m_q c^2 \mu B}; \quad Y_q = \frac{m_q c^2}{2\mu B}, \quad (2.36)$$

$$Z_q = 2n + 1 + 2s + \frac{(\sigma_q - 1)^2}{4Y_q} + 2s(\sigma_q - 1) \sqrt{1 + \frac{2n + 1 + 2s}{Y_q}}, \quad (2.37)$$

$$\chi_q^2(0) - m_q^2 c^4 = (3\pi^2)^{2/3} c^2 \hbar^2 n_q^{2/3}; \quad (2.38)$$

суммирование в (2.34) и (2.35) ведется до тех пор, пока $X_q^2 \geq Z_q$.

Полученные формулы описывают свойства крайне вырожденного идеального релятивистского газа заряженных фермионов в магнитном поле, не оказывающем влияния на величины аномальных магнитных моментов микрочастиц. Это ограничивает их применимость условием $B \ll 4,414 \cdot 10^{13}$ Гс для электронов и $B \leq 10^{17}$ Гс для протонов (см. подраздел 2.2). При $B > 10^{13}$ Гс мы вправе принять $\sigma_e \approx 1$, что не отразится существенно на численных расчетах термодинамических величин, но значительно их упростит. При этом

$$Z_e = 2n + 1 + 2s, \quad (2.39)$$

$$\varepsilon_e = \sqrt{c^2 p_z^2 + m_e^2 c^4 + 2m_e c^2 \mu_B B(2n + 1 + 2s)}. \quad (2.40)$$

2.3.2 Известно, что магнитное поле оказывает заметное квантующее действие на движение электрона, если ларморовский радиус последнего порядка и меньше длины волны де Бройля. Полагая импульс электрона равным импульсу Ферми при $B = 0$, несложно показать, что магнитное поле будет квантующим для релятивистских электронов при

$$B > B_{\kappa e} = \frac{\chi_e^2(0) - m_e^2 c^4}{4\pi m_e c^2 \mu_B} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \left(\frac{N_e}{V}\right)^{2/3}}{4\pi m_e \mu_B}. \quad (2.41)$$

Для протонов электронейтральной плазмы нижняя граница квантующего магнитного поля та же. В таблице 2.1 приведены значения $B_{\kappa e}$ для заданных концентраций электронов.

Таблица 2.1

$n_e, \text{см}^{-3}$	$\sqrt{\chi_e^2(0) - m_e^2 c^4}, \text{МэВ}$	$B_{ке}, \text{Гс}$
10^{27}	$6,2 \cdot 10^{-2}$	10^{11}
10^{28}	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$4,6 \cdot 10^{11}$
10^{29}	$2,7 \cdot 10^{-1}$	$2,2 \cdot 10^{12}$
10^{30}	$6,1 \cdot 10^{-1}$	10^{13}
10^{31}	1,3	$4,6 \cdot 10^{13}$
10^{32}	2,7	$2,2 \cdot 10^{14}$
10^{33}	6,1	10^{15}
10^{34}	1,3·10	$4,6 \cdot 10^{15}$
10^{35}	2,7·10	$2,2 \cdot 10^{16}$
10^{36}	6,1·10	10^{17}

При величинах B , меньших указанных в таблице 2.1, мы вправе считать газ парамагнитным и не учитывать квантование Ландау. В частности, для $\sigma_e = 1$ имеем в этом случае:

$$\varepsilon_e = \sqrt{c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4 + 4m_e c^2 \mu_B B s}, \quad (2.42)$$

$$R_1 = \frac{1}{8} \sum_s \left(\sqrt{X_e^2 + Y_e} \sqrt{X_e^2 - 2s} (2X_e^2 - 3Y_e - 10s) + \frac{3}{2} (Y_e + 2s)^2 \ln \left| \frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + \sqrt{X_e^2 - 2s}}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - \sqrt{X_e^2 - 2s}} \right| \right), \quad (2.43)$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \sum_s (X_e^2 - 2s)^{3/2}, \quad (2.44)$$

Для протонов $\sigma_p = \text{const}$ при $B < 10^{17}$ Гс. При этом энергия взаимодействия протона с магнитным полем $\sigma_p \mu_p B < 1$ МэВ, что существенно меньше $m_p c^2 \sim 1$ ГэВ. Аналогичная ситуация имеет место и для нейтронного газа. Поэтому для нуклонов целесообразно ограничиться лишь нерелятивистским приближением, что вполне приемлемо для описания свойств вещества при плотностях, меньших ядерной. Соответствующие выражения для термодинамических характеристик крайне вырожденных нерелятивистских ферми-газов в магнитном поле приведены в подразделе 2.2.

3 ФЕРМИ- И БОЗЕ-ГАЗЫ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

3.1 Невырожденные идеальные ферми- и бозе-газы в отсутствие внешних воздействий

Ферми- или бозе-газ подчиняется статистике Максвелла-Больцмана, если в функциях распределений Ферми-Дирака или Бозе-Эйнштейна

$$f = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \chi}{kT}\right) \pm 1} \quad (3.1)$$

можно пренебречь единицей в сравнении с экспонентой, т. е.

$$\exp\frac{\varepsilon - \chi}{kT} \gg 1 \quad (3.2)$$

при любых значениях энергии ε , в том числе и при $\varepsilon = mc^2$. Таким образом, критерий невырождения ферми- или бозе-газа имеет вид:

$$\exp\frac{mc^2 - \chi}{kT} = \exp\left(-\frac{\chi}{kT}\right) \exp\frac{mc^2}{kT} \gg 1. \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что распределению

$$f = \exp\frac{\chi - \varepsilon}{kT} \quad (3.4)$$

соответствует большое по модулю отрицательное значение химического потенциала χ , если температуры «релятивистские» ($kT \geq mc^2$), или же любое неположительное значение χ , если температуры «нерелятивистские» ($kT \ll mc^2$).

Для нерелятивистского невырожденного газа элементарных частиц в отсутствие внешних воздействий из условия нормировки следует:

$$N = g \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \exp\left(\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right) p^2 dp = \frac{gV}{8} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \left(\frac{2m}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} (kT)^{3/2}. \quad (3.5)$$

Здесь N – число частиц в объеме V , $g = 2s + 1$, s – спин частицы, p и m – ее импульс и масса, $\zeta = \chi - mc^2$, $\varepsilon = mc^2 + p^2 / (2m)$.

В релятивистском случае

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2} \quad (3.6)$$

и

$$\begin{aligned} N &= \frac{gV}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \exp\left(\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right) p^2 dp = \\ &= \frac{gVm^3 c^3}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \int_1^\infty \exp(-\eta x) \sqrt{x^2 - 1} x dx, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\eta = \frac{mc^2}{kT}$, $x = \frac{\varepsilon}{mc^2}$. Интеграл в (3.7) вычисляется следующим образом [9, с. 337]:

$$\int_1^\infty \exp(-\eta x) \sqrt{x^2 - 1} x dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\eta} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) K_2(\eta) = \frac{1}{\eta} K_2(\eta), \quad (3.8)$$

где Γ – гамма-функция, $K_2(\eta)$ – модифицированная функция Бесселя. Таким образом,

$$N = \frac{gVm^2 ckT}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) K_2(\eta). \quad (3.9)$$

Сравнивая (3.5) и (3.9), получаем

$$N^{(rel)} = N^{(нерел)} \exp\left(\frac{mc^2}{kT}\right) \sqrt{\frac{2mc^2}{\pi kT}} \cdot K_2\left(\frac{mc^2}{kT}\right). \quad (3.10)$$

Большой термодинамический потенциал в общем случае любого идеального ферми- или бозе-газа определяется выражением [3, с. 182]:

$$\Omega = \mp kTg \int_0^\infty \frac{V 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \ln\left(1 \pm \exp\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right). \quad (3.11)$$

В (3.11) верхние знаки относятся к фермионам, нижние – к бозонам. Если имеет место неравенство (3.2), то

$$\ln\left(1 \pm \exp\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right) \approx \pm \exp\frac{\chi - \varepsilon}{kT} \quad (3.12)$$

и

$$\Omega = -\frac{gVkT}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \exp\left(\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right) p^2 dp = -NkT \quad (3.13)$$

для любой зависимости $\varepsilon(p)$.

Тогда легко получить выражения для других термодинамических параметров релятивистского газа, например, для энтропии S и средней полной энергии E :

$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_{\chi,V} = Nk + kT\left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{\chi,V} = Nk\left(2 - \frac{\chi}{kT} - \frac{\eta}{K_2(\eta)} \frac{dK_2(\eta)}{d\eta}\right) = \\ &= Nk\left(2 - \frac{\chi}{kT} - \frac{\eta K_0(\eta) + 2K_1(\eta)}{K_2(\eta)}\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} E &= \Omega + \chi N + TS = NkT\left(1 - \frac{\eta}{K_2(\eta)} \frac{dK_2(\eta)}{d\eta}\right) = \\ &= Nk\left(1 - \frac{\eta K_0(\eta) + 2K_1(\eta)}{K_2(\eta)}\right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Бесселевы функции могут быть представлены в виде асимптотических рядов лишь при $\eta \gg 1$ (при «нерелятивистских» температурах $kT \ll mc^2$) [10, с. 169]:

$$K_0(\eta) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} \exp(-\eta) \cdot \left(1 - \frac{1}{8\eta} + \frac{9}{128\eta^2} - \dots\right), \quad (3.16)$$

$$K_1(\eta) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} \exp(-\eta) \cdot \left(1 + \frac{3}{8\eta} + \frac{3}{128\eta^2} + \dots \right), \quad (3.17)$$

$$K_2(\eta) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\eta}} \exp(-\eta) \cdot \left(1 + \frac{15}{8\eta} + \frac{105}{128\eta^2} + \dots \right). \quad (3.18)$$

Известно [10, с. 168], что

$$K_2(\eta) = K_0(\eta) + 2K_1(\eta)/\eta, \quad (3.19)$$

поэтому ограничиваться в представлениях (3.16)–(3.18) грубым первым приближением при численных расчетах вряд ли корректно

Заметим, что при термодинамическом описании газа из фермионных (электронно-позитронных, мюонных) или бозонных (пионных) пар химический потенциал χ полагается равным нулю [6, с. 343]. В этом случае критерию невырождения (3.3) соответствует условие $\eta \gg 1$, и применимы асимптотические представления (3.16)–(3.18).

3.2 Термодинамические характеристики невырожденных идеальных нерелятивистских ферми- и бозе-газов в магнитном поле

3.2.1 Воспользовавшись методом, изложенным в [3], получим общие соотношения, применимые для описания, в рамках статистической термодинамики равновесных систем, горячих идеальных нерелятивистских электронного, протонного и нейтронного газов в магнитном поле. Большой термодинамический потенциал в этом случае определяется выражением:

$$\Omega = -kT \sum_{(q)} \exp \frac{\chi - \varepsilon}{kT}. \quad (3.20)$$

Как и для крайне вырожденных ферми-газов, символ $\sum_{(q)}$ для нейтральных

фермионов означает суммирование по двум направлениям спина и интегрирование по импульсу, для заряженных фермионов – суммирование по двум направлениям спина и номерам квантовых уровней Ландау и интегрирование по проекции импульса на направление магнитного поля. Подставляя (2.30) или (2.31) в (3.20) с учетом того, что в рассматриваемых случаях принимается $\chi = \zeta$ с точностью до энергии покоя фермиона, мож-

но найти соответствующие зависимости Ω_j от ζ_j , T и B ($j = n, e, p$ соответственно).

Следуя [3], в результате стандартных вычислений несложно получить выражение для большого термодинамического потенциала горячего нерелятивистского газа заряженных фермионов, находящегося в при температуре T в объеме V_q в присутствии постоянного и однородного магнитного поля с индукцией B :

$$\begin{aligned}\Omega_q(B) &= -kT \sum_s \sum_{n=0}^{+\infty} \int \frac{m_q \mu B V_q}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\zeta_q - \varepsilon_q}{kT}\right) dp_{qz} = \\ &= -kT \frac{m_q \mu B V_q}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\zeta_q(B)}{kT}\right) \sum_s \exp\left(-\frac{\mu B \cdot 2s \sigma_q}{kT}\right) \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p_{qz}^2}{2m_q kT}\right) dp_{qz}.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p_{qz}^2}{2m_q kT}\right) dp_{qz} = 2 \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{p_{qz}^2}{2m_q kT}\right) dp_{qz} = \sqrt{2\pi m_q kT}, \quad (3.22)$$

$$\sum_s \exp\left(-\frac{\mu B \cdot 2s \sigma_q}{kT}\right) = \exp\left(\frac{\sigma_q \mu B}{kT}\right) + \exp\left(-\frac{\sigma_q \mu B}{kT}\right) = 2 \operatorname{ch} \frac{\sigma_q \mu B}{kT}, \quad (3.23)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\mu B}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\mu B}{kT}\right)} = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\mu B}{kT}}, \quad (3.24)$$

получаем

$$\Omega_q(B) = -\frac{V_q}{4} \left(\frac{2m_q}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2} (kT)^{5/2} \exp\left(\frac{\zeta_q(B)}{kT}\right) \cdot \frac{\alpha_q \operatorname{ch}(\sigma_q \alpha_q)}{\operatorname{sh} \alpha_q}; \quad q = e, p. \quad (3.25)$$

Для нейтронного газа аналогичное выражение имеет вид:

$$\Omega_n(B) = -\frac{V_n}{4} \left(\frac{2m_n}{\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} \exp\left(\frac{\zeta_n(B)}{kT} \right) \cdot \text{ch}(\sigma_n \alpha_n), \quad (3.26)$$

В приведенных выше выражениях μ – магнетон Бора для электронов и ядерный магнетон для нуклонов,

$$\alpha_j = \frac{\mu B}{kT}, \quad (3.27)$$

При $B \rightarrow 0$ $\alpha_j \rightarrow 0$, $\text{ch}(\sigma_j \alpha_j) \rightarrow 1$, $\frac{\text{sh}\alpha_j}{\alpha_j} \rightarrow 1$, и из (3.25), (3.26) получаем:

$$\Omega_j(B) \rightarrow \Omega_j(0) = -\frac{V_j}{4} \left(\frac{2m_j}{\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} \exp\left(\frac{\zeta_j(0)}{kT} \right); \quad j = e, p, n. \quad (3.28)$$

Из (3.25) и (3.26) выразим число фермионов в объеме V_j :

$$N_q = -\left(\frac{\partial \Omega_q}{\partial \zeta_q} \right)_{V_q, T, B} = \frac{V_q}{4} \left(\frac{2m_q kT}{\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\zeta_q(B)}{kT} \right) \cdot \frac{\alpha_q \text{ch}(\sigma_q \alpha_q)}{\text{sh}\alpha_q}, \quad (3.29)$$

$$N_n = -\left(\frac{\partial \Omega_n}{\partial \zeta_n} \right)_{V_n, T, B} = \frac{V_n}{4} \left(\frac{2m_n kT}{\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{\zeta_n(B)}{kT} \right) \cdot \text{ch}(\sigma_n \alpha_n). \quad (3.30)$$

Отсюда находим химический потенциал ферми-газа заданной концентрации $n_j = N_j / V_j$ в зависимости от температуры и индукции магнитного поля:

$$\zeta_q(B) = \zeta_q(0) - kT \ln \frac{\alpha_q \text{ch}(\sigma_q \alpha_q)}{\text{sh}\alpha_q}, \quad (3.31)$$

$$\zeta_n(B) = \zeta_n(0) - kT \ln(\text{ch}(\sigma_n \alpha_n)), \quad (3.32)$$

где

$$\zeta_j(0) = -kT \ln A_j, \quad A_j = \frac{1}{4n_j} \left(\frac{2m_j kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (3.33)$$

Легко видеть, что в сильном магнитном поле $\zeta_j(B)$ – большое по модулю отрицательное число.

Формулы (3.29) и (3.30) дают возможность определить вклад в общую концентрацию ферми-газа концентраций фермионов с магнитными моментами, ориентированными по полю и против поля соответственно:

$$\frac{n_{j\uparrow}}{n_j} = \frac{\exp(2\sigma_j \alpha_j)}{\exp(2\sigma_j \alpha_j) + 1}, \quad (3.34)$$

$$\frac{n_{j\downarrow}}{n_j} = \frac{1}{\exp(2\sigma_j \alpha_j) + 1}, \quad (3.35)$$

а также степень поляризации ферми-газа:

$$P_{0j} = \frac{n_{j\uparrow} - n_{j\downarrow}}{n_j} = \frac{\exp(2\sigma_j \alpha_j) - 1}{\exp(2\sigma_j \alpha_j) + 1}. \quad (3.36)$$

Заметим, что при $B = 0$ $n_{j\uparrow} = n_{j\downarrow} = n_j/2$, а при $B \rightarrow \infty$ $n_{j\uparrow} \rightarrow n_j$, $n_{j\downarrow} \rightarrow 0$, т. е. сверхсильное магнитное поле способствует ориентации магнитных моментов микрочастиц в направлении вектора индукции, что вполне соответствует теории парамагнетизма Паули.

Сравнивая (3.29) и (3.30) с (3.25) и (3.26) соответственно, находим, что $\Omega_j(B) = \Omega_j(0) = -N_j kT$. Следовательно, давление $P_j = \frac{\partial \Omega_j}{\partial V_j}$ ферми-газа

заданной концентрации при высокой температуре не зависит от индукции магнитного поля: $P_j(B) = P_j(0)$ при $n_j = \text{const}$.

Приведенные выше соотношения позволяют сформулировать критерии невырождения идеальных нерелятивистских ферми-газов в магнитном поле. Как уже отмечалось, газ можно считать невырожденным, если

$$\exp \frac{\zeta_j}{kT} \ll 1. \quad (3.37)$$

С учетом (3.29) и (3.30) находим:

$$\frac{4n_q \pi^{3/2} \hbar^3}{(2m_q kT)^{3/2}} \frac{\text{sh} \alpha_q}{\alpha_q \text{ch}(\sigma_q \alpha_q)} \ll 1, \quad (3.38)$$

$$\frac{4n_n \pi^{3/2} \hbar^3}{(2m_n kT)^{3/2}} \frac{1}{\text{ch}(\sigma_n \alpha_n)} \ll 1. \quad (3.39)$$

Несложно убедиться, что наряду с высокой температурой сильное магнитное поле способствует невырождению нерелятивистского ферми-газа с данной концентрацией частиц.

Аналогичная ситуация, очевидно, имеет место и для случая релятивистских (ультрарелятивистских) электронов, но математически строгого подтверждения этому пока нет.

Ферми-газы вещества холодных сверхплотных астрофизических объектов типа белых карликов и нейтронных звезд можно, с достаточной степенью точности, считать крайне вырожденными, т. к. их возможные температуры из-за больших нейтринных потерь при больших плотностях на несколько порядков ниже соответствующих температур вырождения [8], и характерные (а также гипотетические) для этих объектов магнитные поля вряд ли способны снять вырождение фермионов. Для горячих же астрофизических объектов (Сверхновые в различных стадиях эволюции и т. п.) при описании вещества подъядерной области плотностей с использованием модели ферми-газов следует учитывать возможность подавления вырождения фермионов магнитным полем.

3.2.2 Перейдем к рассмотрению невырожденного нерелятивистского газа заряженных бозонов в магнитном поле. Спектр энергии свободного заряженного бозона в квантующем магнитном поле

$$\varepsilon = \frac{p_z^2}{2m} + \mu B(2n + 1), \quad (3.40)$$

а символ $\sum_{(q)}$ в выражении (3.20) означает теперь суммирование по номерам n квантовых уровней Ландау и интегрирование по проекции импульса на направление магнитного поля p_z . Как и для ферми-газов, считаем $\chi = \zeta$ с точностью до энергии покоя частицы. По аналогии с фермионами, получаем:

$$\begin{aligned}
\Omega(B) &= -kT \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m\mu BV}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\zeta - \varepsilon}{kT}\right) dp_z = \\
&= -kT \frac{m\mu BV}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\zeta(B)}{kT}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\mu B(2n+1)}{kT}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{p_z^2}{2mkT}\right) dp_z = \\
&= -\frac{V}{8} \left(\frac{2m}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2} (kT)^{5/2} \exp\left(\frac{\zeta(B)}{kT}\right) \cdot \frac{\alpha}{\text{sh}\alpha}; \quad \alpha = \frac{\mu B}{kT}. \tag{3.41}
\end{aligned}$$

$$N = \frac{V}{8} \left(\frac{2mkT}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\zeta(B)}{kT}\right) \cdot \frac{\alpha}{\text{sh}\alpha}, \tag{3.42}$$

$$\zeta(B) = \zeta(0) - kT \ln \frac{\alpha}{\text{sh}\alpha}, \tag{3.43}$$

$$\zeta(0) = -kT \ln A, \quad A = \frac{1}{4n} \left(\frac{2mkT}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2}. \tag{3.44}$$

3.3 Термодинамические характеристики невырожденных идеальных релятивистских ферми- и бозе-газов в магнитном поле

3.3.1 Рассмотрим невырожденный идеальный релятивистский ферми-газ (например, электронный) в магнитном поле. Энергия заряженного фермиона с массой m и собственным магнитным моментом, равным магнетону μ , дается выражением

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_z^2 + 2mc^2 \mu B(2n+1+2s)}. \tag{3.45}$$

Тогда число фермионов в объеме V равно

$$\begin{aligned}
N &= \sum_s \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m\mu BV}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right) dp_z = \frac{m\mu BV}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \times \\
&\times 2 \int_{\varepsilon_{\min}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) d\left(\sum_s \sum_n \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 c^4 - 2mc^2 \mu B(2n+1+2s)}\right). \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$x = \frac{\varepsilon}{mc^2}, \quad \eta = \frac{mc^2}{kT}, \quad \gamma = \frac{2\mu B}{mc^2}, \quad u^2 = \gamma(2n+1+2s), \quad (3.47)$$

перепишем (3.46) в виде

$$N = \frac{m^2 c \mu B V}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \int_{x_{\min}}^{\infty} \exp(-\eta x) d\left(\sum_s \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^2 - 1 - u^2}\right). \quad (3.48)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_s \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^2 - 1 - u^2} &= \sqrt{x^2 - 1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x^2 - 1 - 2n\gamma} = \\ &= \sqrt{x^2 - 1} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{2n\gamma}{x^2 - 1}}\right) = \sqrt{x^2 - 1} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sqrt{1 - \frac{n}{n_{\max}}}\right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\sum_{n=1}^{n_{\max}} \sqrt{1 - \frac{n}{n_{\max}}} \approx 0,68n_{\max} - 0,35, \quad (3.50)$$

$$\sum_s \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^2 - 1 - u^2} \approx \sqrt{x^2 - 1} \left(0,3 + 1,36 \frac{x^2 - 1}{2\gamma}\right), \quad (3.51)$$

получаем

$$\begin{aligned} N &= \frac{m^2 c \mu B V}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \left(0,3 \int_1^{\infty} \exp(-\eta x) \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} + \right. \\ &+ \left. \frac{2,04}{\gamma} \int_1^{\infty} \exp(-\eta x) \sqrt{x^2 - 1} dx\right) = \\ &= \frac{m^2 c \mu B V}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \left(0,3K_1(\eta) + \frac{2,04}{\gamma\eta} K_2(\eta)\right) = \\ &= \frac{m^2 c V k T}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) (0,3\alpha K_1(\eta) + 1,02K_2(\eta)), \end{aligned} \quad (3.52)$$

где $K_1(\eta)$ и $K_2(\eta)$ – бесселевы функции, $\alpha = \frac{\gamma\eta}{2} = \frac{\mu B}{kT}$.

Учитывая, что большой термодинамический потенциал $\Omega = -NkT$, можно получить выражения для других термодинамических параметров невырожденного идеального релятивистского ферми-газа в магнитном поле. Однако, как отмечалось в подразделе 3.1, бесселевы функции можно представить в виде асимптотических рядов лишь при $\eta \gg 1$.

Идеальный газ нейтральных невырожденных релятивистских фермионов в магнитном поле мы не рассматриваем, поскольку отсутствуют возможные астрофизические приложения в этом случае.

3.3.2 Рассмотрим теперь невырожденный идеальный релятивистский бозе-газ в магнитном поле. Энергия заряженного бозона с массой m дается выражением

$$\varepsilon = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_z^2 + 2mc^2 \mu B(2n+1)}. \quad (3.53)$$

Тогда

$$\begin{aligned} N &= \sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m\mu BV}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi - \varepsilon}{kT}\right) dp_z = \frac{m\mu BV}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \times \\ &\times 2 \int_{\varepsilon_{\min}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) d\left(\sum_n \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 c^4 - 2mc^2 \mu B(2n+1)}\right) = \\ &= \frac{m^2 c \mu BV}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \int_{x_{\min}}^{\infty} \exp(-\eta x) d\left(\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^2 - 1 - \gamma(2n+1)}\right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x^2 - 1 - \gamma(2n+1)} &= \sqrt{x^2 - 1 - \gamma} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \frac{2n\gamma}{x^2 - 1 - \gamma}}\right) = \\ &= \sqrt{x^2 - 1 - \gamma} \left(1 + \sum_{n=1}^{n_{\max}} \sqrt{1 - \frac{n}{n_{\max}}}\right) \approx \\ &\approx \sqrt{x^2 - 1 - \gamma} \left(0,65 + 0,68 \frac{x^2 - 1 - \gamma}{2\gamma}\right), \end{aligned} \quad (3.55)$$

получаем

$$\begin{aligned}
N &= \frac{m^2 c \mu B V}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \left(0,65 \int_{\sqrt{1+\gamma}}^{\infty} \exp(-\eta x) \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1-\gamma}} + \right. \\
&+ \left. \frac{1,02}{\gamma} \int_{\sqrt{1+\gamma}}^{\infty} \exp(-\eta x) \sqrt{x^2-1-\gamma} x dx \right) = \\
&= \frac{m^2 c \mu B V}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \frac{\sqrt{1+\gamma}}{\gamma \eta} \times \\
&\times \left(0,65 \gamma \eta K_1(\sqrt{1+\gamma} \eta) + 1,02 \sqrt{1+\gamma} K_2(\sqrt{1+\gamma} \eta) \right) = \\
&= \frac{m^2 c V k T}{2 \pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \sqrt{1+\gamma} \times \\
&\times \left(1,30 \alpha K_1(\sqrt{1+\gamma} \eta) + 1,02 \sqrt{1+\gamma} K_2(\sqrt{1+\gamma} \eta) \right). \tag{3.56}
\end{aligned}$$

При выводе (3.56) использованы соотношения [9, с. 330, 337]:

$$\int_{\sqrt{1+\gamma}}^{\infty} \exp(-\eta x) \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1-\gamma}} = \sqrt{1+\gamma} K_1(\sqrt{1+\gamma} \eta), \tag{3.57}$$

$$\int_{\sqrt{1+\gamma}}^{\infty} \exp(-\eta x) \sqrt{x^2-1-\gamma} x dx = \frac{1+\gamma}{\eta} K_2(\sqrt{1+\gamma} \eta). \tag{3.58}$$

Аналогично случаю фермионов, бесселевы функции можно представить в виде асимптотических рядов лишь при $\sqrt{1+\gamma} \eta \gg 1$.

3.4 Газы из пар «частица-античастица» в магнитном поле

Задача о рождении электронно-позитронных пар в горячем веществе за счет столкновения частиц имеет важное значение для определения критерия устойчивости звезд на поздней стадии эволюции. Этот процесс, наряду с термической диссоциацией ядер и URCA-процессом, является «холодильником», который отводит тепло из недр далеко проэволюционировавшей звезды, что приводит к нарушению гидродинамического равновесия и вспышке сверхновой [12].

Поскольку в горячих астрофизических объектах возможны процессы рождения не только электронно-позитронных, но и других пар «частица-античастица», естественна задача исследования влияния сильного магнит-

ного поля на параметры вещества, в состав которого входят указанные пары.

Рассмотрим образование фермионных (например, мюонных) пар в результате теплового движения частиц звездной плазмы, считая, что рождающиеся частицы находятся в равновесии с излучением:

$$\mu^+ + \mu^- \rightarrow \gamma, \quad (3.59)$$

где γ – один или несколько γ -квантов. Т. к. мюоны не могут образоваться в свободном состоянии в результате каких-либо иных процессов, можно считать, что концентрации $n_\mu^- = n_\mu^+$, а для химических потенциалов записать равенство:

$$\chi_\mu^+ = \chi_\mu^- \equiv 0. \quad (3.60)$$

Температура, при которой энергия теплового движения мюонов становится релятивистской $T_\mu = m_\mu c^2 / k = 1,23 \cdot 10^{12}$ К, поэтому вплоть до температур $T \sim 10^{12}$ К эти частицы можно считать нерелятивистскими. В связи с тем, что мюоны возникают в горячем веществе звезды только за счет энергии теплового движения, их необходимо считать невырожденными.

Применим полученные в подразделе 3.2 соотношения для термодинамического описания газа из фермионных пар в магнитном поле. Считая собственный магнитный момент фермиона равным его магнетону $\mu = e\hbar / (2mc)$ и учитывая (3.60), представим большой термодинамический потенциал в виде (см. (3.25))

$$\begin{aligned} \Omega^\pm(B) &= -\frac{V^\pm(B)}{4} \left(\frac{2m}{\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{kT}\right) \cdot \alpha \cdot \text{cth} \alpha = \\ &= -N^\pm(B) \cdot kT. \end{aligned} \quad (3.61)$$

При этом

$$\Omega^\pm(0) = -\frac{V^\pm(0)}{4} \left(\frac{2m}{\pi\hbar^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{kT}\right) = -N^\pm(0) \cdot kT, \quad (3.62)$$

т.е. при фиксированной температуре отношение давлений замагниченного и немагнетического газов равно отношению концентраций и равно

$$\frac{P^\pm(B)}{P^\pm(0)} = \frac{n^\pm(B)}{n^\pm(0)} = \alpha \cdot \text{cth}\alpha, \quad (3.63)$$

где $\alpha = \mu B / kT$.

Аналогичные соотношения можно записать для невырожденного идеального нерелятивистского газа из бозонных (например, пионных) пар (собственный магнитный момент пиона равен нулю):

$$\pi^+ + \pi^- \rightarrow \gamma, \quad (3.64)$$

$$\chi_\pi^+ = \chi_\pi^- \equiv 0, \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \Omega^\pm(B) &= -\frac{V^\pm(B)}{8} \left(\frac{2m}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{kT}\right) \cdot \frac{\alpha}{\text{sh}\alpha} = \\ &= -N^\pm(B) \cdot kT; \quad \alpha = \mu B / kT \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\frac{P^\pm(B)}{P^\pm(0)} = \frac{n^\pm(B)}{n^\pm(0)} = \frac{\alpha}{\text{sh}\alpha}, \quad (3.67)$$

Используя формулы подраздела 3.3, можно получить также соответствующие соотношения для термодинамических характеристик невырожденных идеальных релятивистских газов из фермионных или бозонных пар.

4 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задание 4.1

Изучение явления поляризации крайне вырожденных идеальных ферми-газов в магнитном поле

4.1.1 Для нерелятивистских протонов в приближении крайнего вырождения построить графики зависимостей полной ε_p и кинетической ε_{pk} энергий протона от проекции импульса p_{pz} протона на направление индукции \vec{B} постоянного и однородного магнитного поля. Использовать выражение для полной энергии протона в магнитном поле:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{pk} + 2s\sigma_p\mu_y B = \frac{p_{pz}^2}{2m_p} + \mu_y B(2n+1) + 2s\sigma_p\mu_y B, \quad (4.1)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$; $s = \mp 1/2$; m_p – масса протона, $\sigma_p \approx 2,793$ – величина отношения собственного магнитного момента протона к ядерному магнетону μ_y .

Решение задания 4.1.1

Графики зависимостей ε_p и ε_{pk} от p_{pz} представлены на рисунках 4.1 и 4.2:

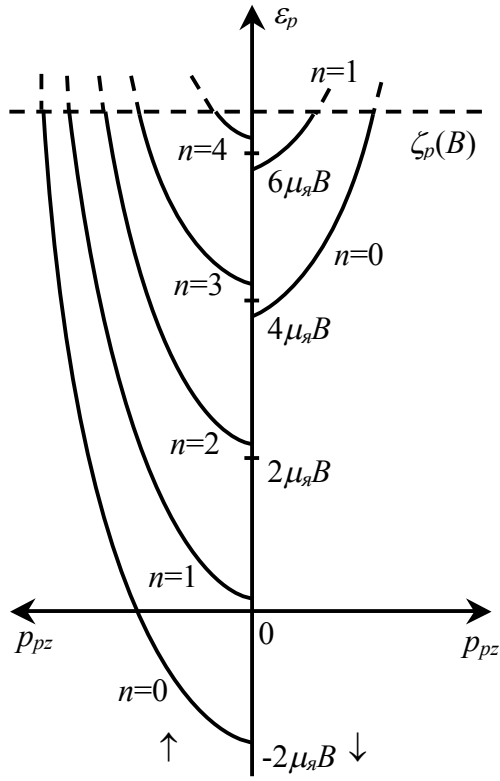


Рисунок 4.1

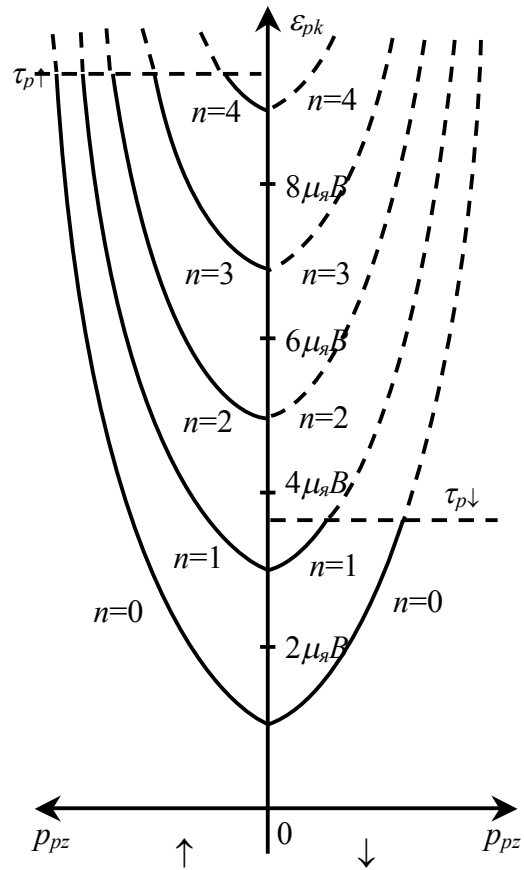


Рисунок 4.2

4.1.2 Записать выражение для числа квантовых состояний протона с определенным направлением спина, находящегося в объеме V и обладающего проекцией импульса от p_{pz} до $p_{pz} + dp_{pz}$, при наличии магнитного поля (аналогичное выражению (2.12) для числа квантовых состояний электрона).

Решение задания 4.1.2

Число квантовых состояний протона с определенным направлением спина, находящегося в объеме V и обладающего проекцией импульса от p_{pz} до $p_{pz} + dp_{pz}$, при наличии магнитного поля дается выражением:

$$\begin{aligned} dG_p &= \frac{m_p \mu_y BV}{2\pi^2 \hbar^3} dp_{pz} = \frac{m_p^{3/2} \mu_y BV}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \frac{d\varepsilon_{pk}}{\sqrt{\varepsilon_{pk} - \mu_y B(2n+1)}} = \\ &= \frac{m_p^{3/2} \mu_y BV}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \frac{d\varepsilon_p}{\sqrt{\varepsilon_p - \mu_y B(2n+1 + 2s\sigma_p)}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Несложно убедиться, что $\frac{dG_p}{dp_{pz}} = \frac{dG_e}{dp_{ez}}$, поскольку $m_p \mu_y = m_e \mu_B$, но при

этом $g_p = \frac{1}{V} \frac{dG_p}{d\varepsilon_p} = \frac{1}{V} \frac{dG_p}{d\varepsilon_{pk}} \neq g_e$. Здесь g_p также является разрывной функцией энергии, а для фиксированных значений ε_p , n и s (или ε_{pk} , n и s) величина g_p увеличивается с ростом B .

4.1.3 Для нерелятивистских протонов в приближении крайнего вырождения построить графики зависимостей полной ε_p и кинетической ε_{pk} энергий протона от плотности числа квантовых состояний q_p протона на направление индукции \vec{B} постоянного и однородного магнитного поля. Использовать выражение (4.1) для полной энергии протона в магнитном поле.

Решение задания 4.1.3

Графики зависимостей ε_p и ε_{pk} от q_p представлены на рисунках 4.3 и 4.4:

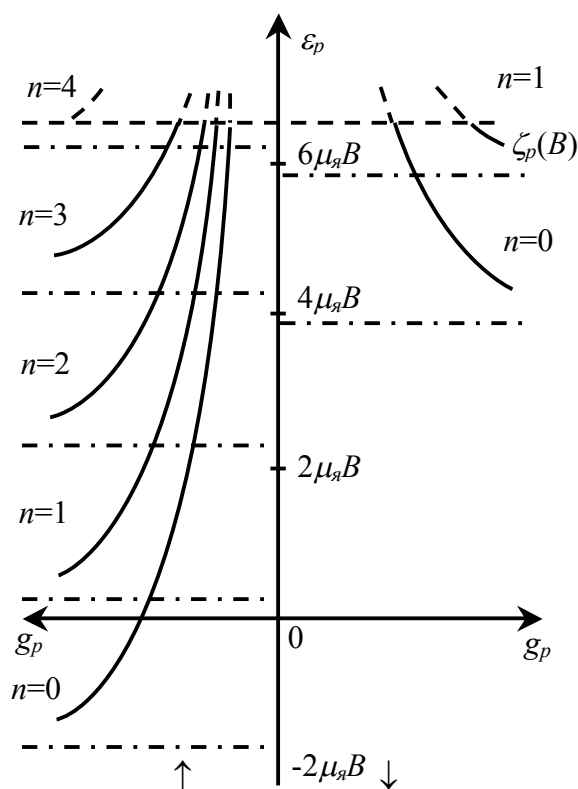


Рисунок 4.3

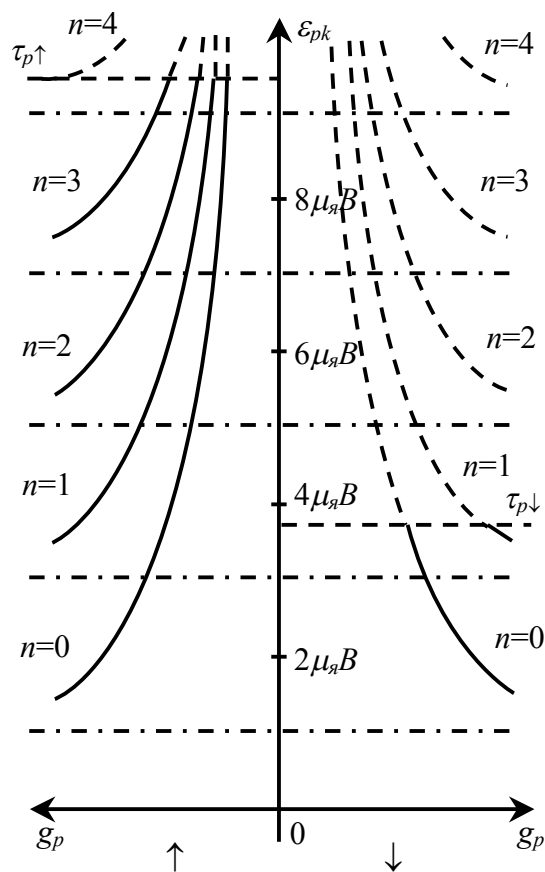


Рисунок 4.4

Легко видеть, что при увеличении индукции магнитного поля, как и в случае электронов, растет степень поляризации протонного газа и имеется принципиальная возможность его полной поляризации.

4.1.4 Из условия нормировки получить выражение для концентрации крайне вырожденного идеального протонного газа в магнитном поле.

Решение задания 4.1.4

Концентрация протонов в магнитном поле определяется выражением:

$$\begin{aligned}
 n_p &= n_{p\uparrow} + n_{p\downarrow} = \frac{m_p^{3/2} \mu_j B}{2^{1/2} \pi^2 \hbar^3} \times \\
 &\times \sum_n \left(\int_0^{\tau_{p\uparrow}} \frac{d\varepsilon_{pk}}{\sqrt{\varepsilon_{pk} - \mu_j B(2n+1)}} + \int_0^{\tau_{p\downarrow}} \frac{d\varepsilon_{pk}}{\sqrt{\varepsilon_{pk} - \mu_j B(2n+1)}} \right) = \\
 &= \frac{2^{1/2} m_p^{3/2} \mu_j B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left(\sqrt{\tau_{p\uparrow} - \mu_j B(2n+1)} + \sqrt{\tau_{p\downarrow} - \mu_j B(2n+1)} \right) = \\
 &= \frac{2^{1/2} m_p^{3/2} \mu_j B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \left(\sqrt{\zeta_p(B) - \mu_j B(2n+1 + \sigma_p)} + \right. \\
 &\left. + \sqrt{\zeta_p(B) - \mu_j B(2n+1 - \sigma_p)} \right), \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

где $\zeta_p(B)$ – химический потенциал протонного газа, измеренный с точностью до слагаемого $m_p c^2$ (максимальная полная энергия протона); $\tau_{p\uparrow}$, $n_{p\uparrow}$ и $\tau_{p\downarrow}$, $n_{p\downarrow}$ – максимальные кинетические энергии и концентрации протонов с магнитными моментами, соответственно параллельными и антипараллельными внешнему полю. Суммирование в (4.3) ведется от нуля до максимальных значений номеров квантовых уровней Ландау n , при которых выражения под знаками радикалов неотрицательны.

4.1.5 Получить соотношения, с помощью которых можно найти степень поляризации крайне вырожденного идеального протонного газа в магнитном поле. Сформулировать условие полной поляризации указанного газа и сравнить его с условием квантового предела сверхсильного магнитного поля ($n = 0$, $s = -1/2$).

Решение задания 4.1.5

Учитывая, что степень поляризации протонного газа

$$p_{0p} = \frac{n_{p\uparrow} - n_{p\downarrow}}{n_p}, \quad (4.4)$$

из (4.3) и (4.4) получаем:

$$n_p(1 + p_{0p}) = \frac{(2m_p)^{3/2} \mu_\gamma B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_p(B) - \mu_\gamma B(2n + 1 - \sigma_p)}, \quad (4.5)$$

$$n_p(1 - p_{0p}) = \frac{(2m_p)^{3/2} \mu_\gamma B}{\pi^2 \hbar^3} \sum_n \sqrt{\zeta_p(B) - \mu_\gamma B(2n + 1 + \sigma_p)}. \quad (4.6)$$

Исключить величину $\zeta_p(B)$ из (4.5) и (4.6) или выразить в явном виде не представляется возможным.

Полная поляризация имеет место, если

$$\zeta_p(B) \leq \mu_\gamma B(1 + \sigma_p). \quad (4.7)$$

Подставляя это выражение в (4.5), находим

$$\frac{\pi^2 \hbar^3 n_p}{2m_p^{3/2} \mu_\gamma^{3/2} B^{3/2}} \leq \sqrt{\sigma_p} + \sqrt{\sigma_p - 1} + \sqrt{\sigma_p - 2}. \quad (4.8)$$

Итак, протонный газ полностью поляризован, если

$$B \geq \frac{\pi^{4/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2^{2/3} m_p \mu_\gamma (\sigma_p^*)^{1/3}} = \frac{B^{(p)}}{(\sigma_p^*)^{1/3}}, \quad (4.9)$$

где

$$\sigma_p^* = \left(\sqrt{\sigma_p} + \sqrt{\sigma_p - 1} + \sqrt{\sigma_p - 2} \right)^2 \approx 15,214, \quad (4.10)$$

$B^{(p)}$ – значение индукции, соответствующее квантовому пределу сверхсильного магнитного поля для протонов (при $B \geq B^{(p)}$ $n = 0$, $s = -1/2$, $\zeta_p(B) \leq \mu_y B(3 - \sigma_p)$). При $n_p = n_e$ имеет место $B^{(p)} = B^{(e)} \approx 3,8 \cdot 10^{-7} n_p^{2/3}$ Гс.

Таким образом, критерий полной поляризации для электронов совпадает с критерием квантового предела, а для протонов критерий квантового предела более жесткий, чем критерий полной поляризации.

Задание 4.2

Изучение влияния магнитного поля на термодинамические характеристики крайне вырожденных идеальных нерелятивистских ферми-газов

4.2.1 Используя формулу (2.23) для большого термодинамического потенциала в параметрическом представлении и метод термодинамических функций, получить выражения для химического потенциала ζ_j и максимальной кинетической энергии τ_j частицы в общем случае произвольного крайне вырожденного идеального нерелятивистского ферми-газа в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Проиллюстрировать с помощью соответствующих графиков зависимости указанных величин от индукции магнитного поля для электронного, протонного и нейтронного газов.

Решение задания 4.2.1

Полное число частиц

$$N_j = - \left(\frac{\partial \Omega_j(B)}{\partial \zeta_j} \right)_{V_j, B}. \quad (4.11)$$

Учитывая, что (см. формулы подраздела 2.2)

$$R_{3/2}(x_j) = \frac{3\pi^2 \hbar^3 n_j}{(2m_j \mu B)^{3/2}} = \left(\frac{\zeta_j(0)}{\mu B} \right)^{3/2}, \quad x_j = \frac{\zeta_j(B)}{\mu B}, \quad (4.12)$$

$$\Omega_j(B) = -\frac{2}{5} N_j \zeta_j(0) \frac{R_{5/2}(x_j)}{R_{3/2}^{5/3}(x_j)} = -\frac{2}{5} N_j \zeta_j(0) \left(\frac{\mu B}{\zeta_j(0)} \right)^{5/2} R_{5/2}(x_j), \quad (4.13)$$

$$\frac{dR_{5/2}(x_j)}{dx_j} = \frac{5}{2} R_{3/2}(x_j), \quad (4.14)$$

находим химический потенциал, отсчитываемый от энергии покоя фермиона:

$$\zeta_j(B) = \zeta_j(0) \frac{x_j}{R_{3/2}^{2/3}(x_j)}, \quad (4.15)$$

Формулы (2.30) и (2.31) определяют полную энергию соответствующего фермиона в магнитном поле; при вычислении кинетических энергий мы должны опустить в этих формулах последние слагаемые. Если значения p_{jz} и p_j в (2.30) и (2.31) максимальны, то $\varepsilon_j = \zeta_j(B)$. Тогда максимальная кинетическая энергия фермиона

$$\tau_j(B) = \zeta_j(B) + \sigma_j \mu B = \zeta_j(0) \frac{x_j + \sigma_j}{R_{3/2}^{2/3}(x_j)} = \tau_j(0) \frac{x_j + \sigma_j}{R_{3/2}^{2/3}(x_j)}. \quad (4.16)$$

Для графической иллюстрации приведенных соотношений учтем, что

$$\frac{\zeta_j(B)}{\zeta_j(0)} = \frac{x_j}{R_{3/2}^{2/3}(x_j)}, \quad \frac{\tau_j(B)}{\tau_j(0)} = \frac{x_j + \sigma_j}{R_{3/2}^{2/3}(x_j)}, \quad \frac{\zeta_j(0)}{\mu B} = R_{3/2}^{2/3}(x_j). \quad (4.17)$$

Задавая значения параметра x_j , несложно табулировать представленные в (4.17) безразмерные величины и строить соответствующие графики (см. рисунок 4.5).

Легко видеть, что термодинамические характеристики заряженных фермионов осциллируют в магнитном поле. Каждому значению номера квантового уровня Ландау n соответствуют два пика (для электронов при выбранном масштабе эти пики практически сливаются: например, для $n = 1$ имеем $\zeta_e(B)/\zeta_e(0) = 1,21$ и $\zeta_e(B)/\zeta_e(0) = 1,19$ при $\zeta_e(0)/(\mu B) = 1,65$ и $\zeta_e(0)/(\mu B) = 1,69$ соответственно). Характеристики парамагнитного нейтронного газа осцилляций не имеют, т. к. движение нейтрона в магнитном поле не квантуется. В отличие от электронного газа химические потенциалы нуклонов при любых значениях магнитного поля меньше, чем без поля.

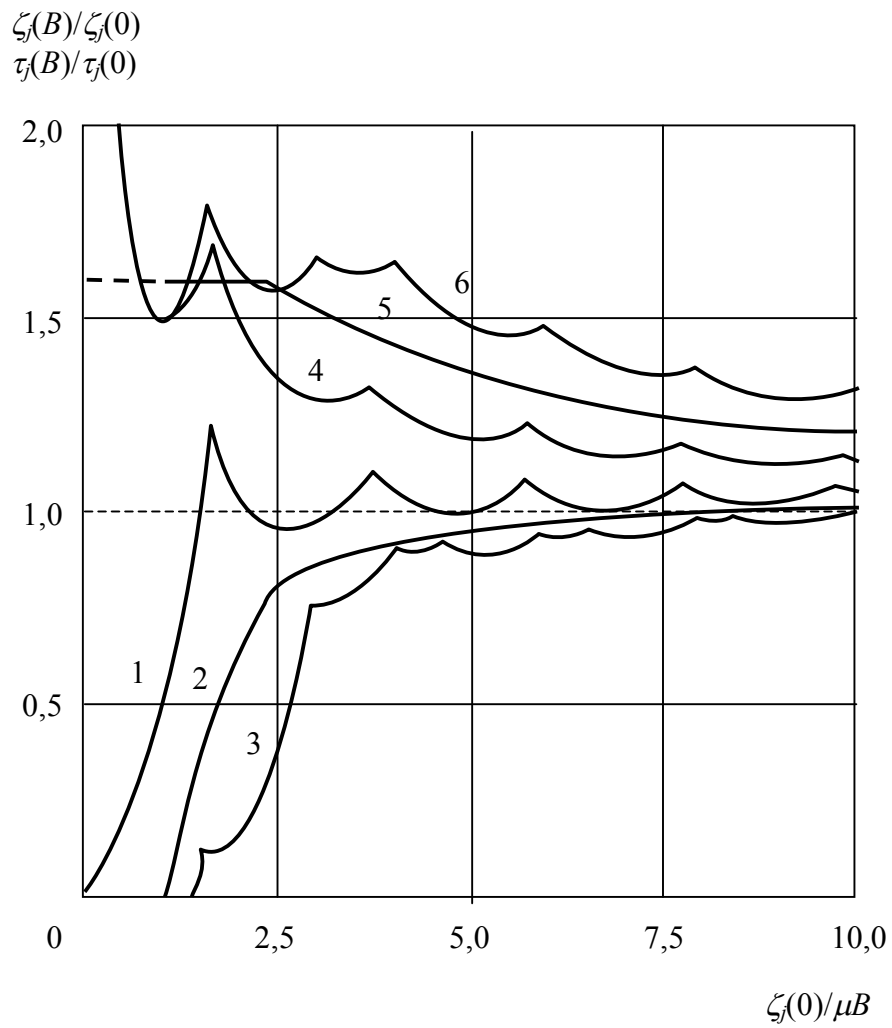


Рисунок 4.5 – Зависимости химических потенциалов (1–3) и максимальных кинетических энергий (4–6) крайне вырожденных идеальных электронного (1; 4), нейтронного (2; 5) и протонного (3; 6) газов от индукции магнитного поля

4.2.2 Используя формулу (2.23) для большого термодинамического потенциала в параметрическом представлении и метод термодинамических функций, получить выражение для давления P_j в общем случае произвольного крайне вырожденного идеального нерелятивистского ферми-газа в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Проиллюстрировать с помощью соответствующих графиков зависимость давления от индукции магнитного поля для электронного, протонного и нейтронного газов.

Решение задания 4.2.2

Давление

$$P_j(B) = -\frac{\Omega_j(B)}{V_j} = P_j(0) \frac{R_{5/2}(x_j)}{R_{3/2}^{5/3}(x_j)}, \quad (4.18)$$

где

$$P_j(0) = \frac{2}{5} n_j \zeta_j(0). \quad (4.19)$$

Графики представлены на рисунке 4.6.

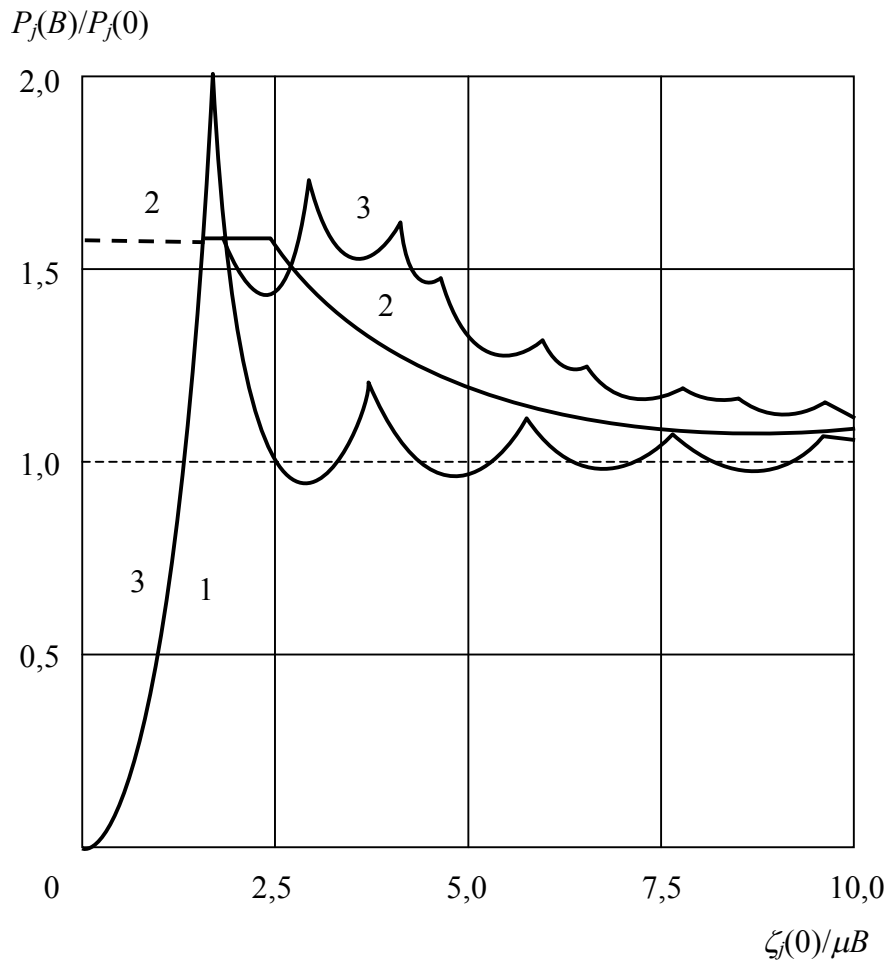


Рисунок 4.6 – Зависимости давлений крайне вырожденных идеальных электронного (1), нейтронного (2) и протонного (3) газов от индукции магнитного поля

4.2.3 Используя формулу (2.23) для большого термодинамического потенциала в параметрическом представлении и метод термодинамических функций, получить выражения для средних полной E_j и кинетической T_j энергий в общем случае произвольного крайне вырожденного идеального нерелятивистского ферми-газа в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Проиллюстрировать с помощью соответствующих графиков зависимости указанных величин от индукции магнитного поля для электронного, протонного и нейтронного газов.

Решение задания 4.2.3

Средняя полная энергия ферми-газа в магнитном поле:

$$\begin{aligned} E_j(B) &= \Omega_j(B) + N_j \zeta_j(B) = \frac{2}{3} E_j(0) \frac{2,5x_j R_{3/2}(x_j) - R_{5/2}(x_j)}{R_{3/2}^{5/3}(x_j)} = \\ &= P_j(0) V_j \frac{2,5x_j R_{3/2}(x_j) - R_{5/2}(x_j)}{R_{3/2}^{5/3}(x_j)}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где

$$P_j(0) = \frac{2}{5} n_j \zeta_j(0), \quad E_j(0) = \frac{3}{2} V_j P_j(0). \quad (4.21)$$

Формулы записаны без слагаемых, определяющих энергию покоя фермионов.

Выражение для средней кинетической энергии ферми-газа в магнитном поле может быть представлено в виде

$$T_j(B) = E_j(B) - \frac{5}{3} E_j(0) \frac{R(x_j)}{R_{3/2}^{5/3}(x_j)}, \quad (4.21)$$

где для заряженных и нейтральных фермионов соответственно:

$$R(x_q) = \frac{3}{2} \sigma_q \sum_{n=0}^l \left((x_q - 2n - 1 - \sigma_q)^{1/2} - (x_q - 2n - 1 + \sigma_q)^{1/2} \right), \quad (4.22)$$

$$R(x_n) = \frac{1}{2} \left((x_n - \sigma_n)^{3/2} - (x_n + \sigma_n)^{3/2} \right). \quad (4.23)$$

Графики представлены на рисунке 4.7. Осцилляционным пикам кинетической энергии на рисунке 4.7 соответствуют перегибы графиков полной энергии. При рассматриваемых значениях B средние полные энергии всех ферми-газов меньше соответствующих величин в отсутствие поля, а средние кинетические энергии больше

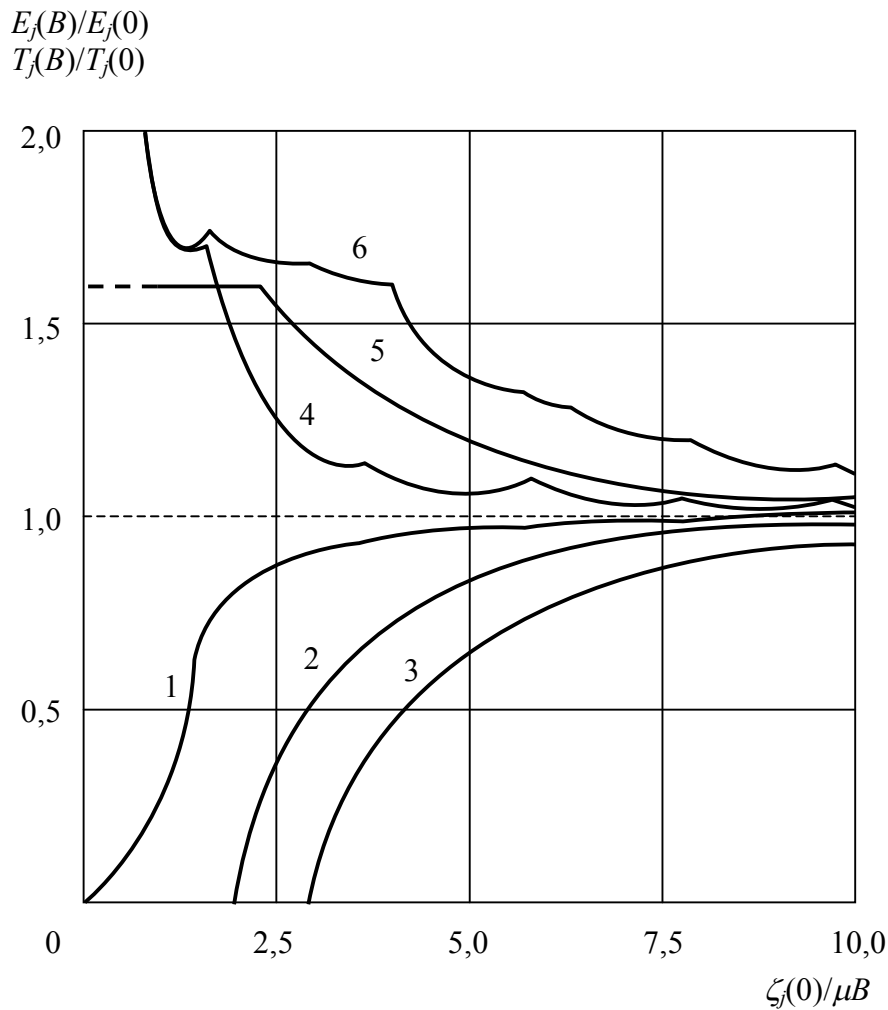


Рисунок 4.7 – Зависимости средних полных (1–3) и средних кинетических (4–6) энергий крайне вырожденных идеальных электронного (1; 4), нейтронного (2; 5) и протонного (3; 6) газов от индукции магнитного поля.

4.2.4 Используя формулу (2.23) для большого термодинамического потенциала в параметрическом представлении и метод термодинамических функций, получить выражение для магнитной восприимчивости κ_j в общем случае произвольного крайне вырожденного идеального нерелятивистского ферми-газа в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Проиллюстрировать с помощью соответствующих графиков зависимости магнитной восприимчивости от индукции магнитного поля для электронного, протонного и нейтронного газов.

Решение задания 4.2.4

Магнитная восприимчивость

$$\kappa_j = -\frac{1}{V_j B} \left(\frac{\partial \Omega(B)}{\partial B} \right)_{\zeta_j, B} = \kappa_{0j} \frac{R_{5/2}(x_j) - x_j R_{3/2}(x_j)}{R_{3/2}^{1/3}(x_j)}, \quad (4.24)$$

где

$$\kappa_{0j} = \frac{n_j \mu^2}{\zeta_j(0)}. \quad (4.25)$$

Графики представлены на рисунке 4.8.

Наличие у протона аномального магнитного момента, превышающего по величине ядерный магнетон, приводит к преобладанию парамагнитной составляющей восприимчивости над диамагнитной во всем диапазоне изменения индукции магнитного поля B (для электронного газа, как отмечалось в [3] и видно на рисунке 2.8, может иметь место и обратный эффект).

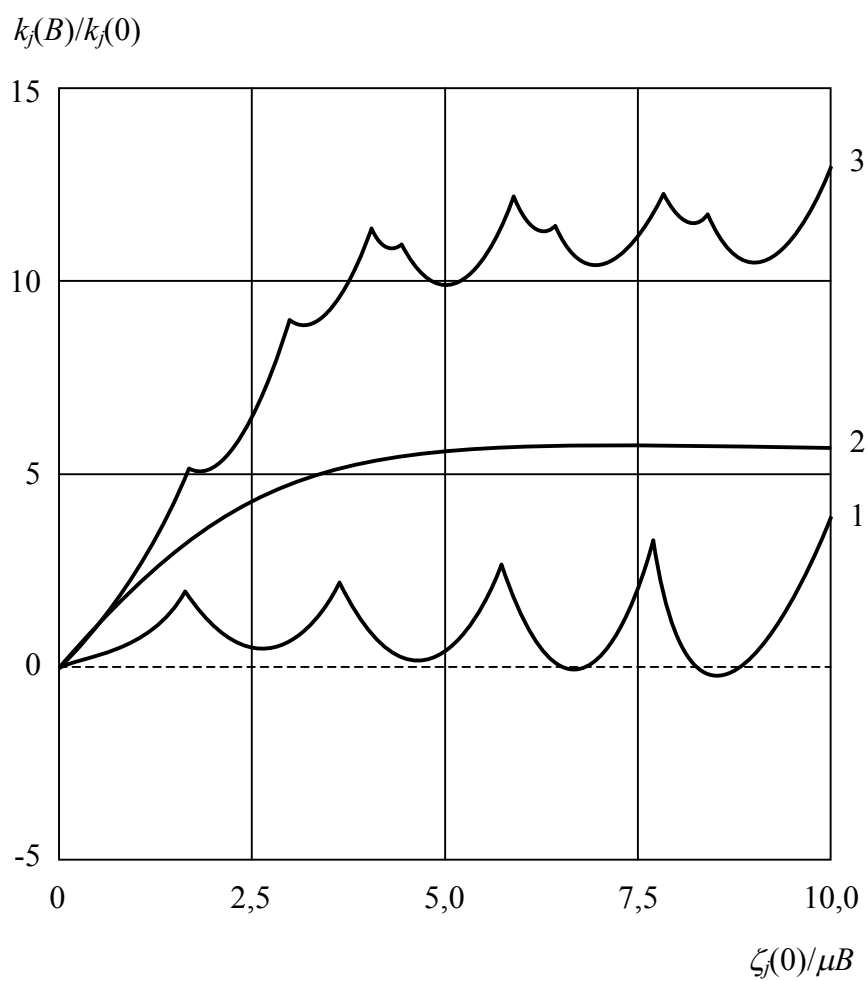


Рисунок 4.8 – Зависимости магнитных восприимчивостей крайне вырожденных идеальных электронного (1), нейтронного (2) и протонного (3) газов от индукции магнитного поля.

4.2.5 Получить выражения для химического потенциала ζ_j и максимальной кинетической энергии τ_j частицы, давления P_j , средних полной E_j и кинетической T_j энергий, магнитной восприимчивости κ_j в общем случае произвольного крайне вырожденного идеального нерелятивистского ферми-газа в предельном случае слабого магнитного поля с индукцией B .

Решение задания 4.2.5

В предельном случае слабых магнитных полей (при больших значениях x_j и n) величина x_j не превышает значительно $2n$. По формуле суммирования Эйлера-Маклорена [11]

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^l f(n) &= \int_0^l f(t) dt + \frac{1}{2}(f(l) + f(0)) + \sum_{n=1}^m \frac{B_{2n}}{(2n)!} (f^{2n-1}(l) + f^{2n-1}(0)) + \\ &+ \frac{lB_{2m+2}}{(2m+2)!} f^{2m+2}(\theta_l), \end{aligned} \quad (4.26)$$

где B_i – числа Бернулли; $m, l = 1, 2, 3, \dots$; $0 < \theta_l < 1$. В частности, это дает:

$$\sum_{n=0}^l n^{a-1} = \frac{l^a}{a} \left(1 + \frac{a}{2l} + \dots \right). \quad (4.27)$$

Тогда для заряженных фермионов несложно получить

$$R_{3/2}(x_q) \approx x_q^{3/2} \left(1 + \frac{3\sigma_q^2 - 1}{8x_q^2} \right), \quad (4.28)$$

$$R_{5/2}(x_q) \approx x_q^{5/2} \left(1 + \frac{5(3\sigma_q^2 - 1)}{8x_q^2} \right), \quad (4.29)$$

$$\zeta_q(B) \approx \zeta_q(0) \cdot \left(1 - \frac{(3\sigma_q^2 - 1)\mu^2 B^2}{12\zeta_q^2(0)} \right), \quad (4.30)$$

$$\tau_q(B) \approx \zeta_q(0) \cdot \left(1 + \frac{\sigma_q \mu B}{\zeta_q(0)} - \frac{(3\sigma_q^2 - 1)\mu^2 B^2}{12\zeta_q^2(0)} \right), \quad (4.31)$$

$$P_q(B) \approx P_q(0) \cdot \left(1 + \frac{5(3\sigma_q^2 - 1)\mu^2 B^2}{12\zeta_q^2(0)} \right), \quad (4.32)$$

$$E_q(B) \approx E_q(0) \cdot \left(1 - \frac{5(3\sigma_q^2 - 1)\mu^2 B^2}{12\zeta_q^2(0)} \right), \quad (4.33)$$

$$T_q(B) \approx E_q(0) \cdot \left(1 + \frac{5(3\sigma_q^2 - 1)\mu^2 B^2}{12\zeta_q^2(0)} \right), \quad (4.34)$$

$$\kappa_q(B) \approx \frac{1}{2} \kappa_{0q} (3\sigma_q^2 - 1) \cdot \left(1 - \frac{(3\sigma_q^2 - 1)\mu^2 B^2}{24\zeta_q^2(0)} \right). \quad (4.35)$$

Для нейтронов

$$R_{3/2}(x_n) \approx x_n^{3/2} \left(1 + \frac{3\sigma_n^2}{8x_n^2} \right), \quad (4.36)$$

$$R_{5/2}(x_q) \approx x_q^{5/2} \left(1 + \frac{15\sigma_n^2}{8x_n^2} \right), \quad (4.37)$$

$$\zeta_n(B) \approx \zeta_n(0) \cdot \left(1 - \frac{\sigma_n^2 \mu^2 B^2}{4\zeta_n^2(0)} \right), \quad (4.38)$$

$$\tau_n(B) \approx \zeta_n(0) \cdot \left(1 + \frac{\sigma_n \mu B}{\zeta_n(0)} - \frac{\sigma_n^2 \mu^2 B^2}{4\zeta_n^2(0)} \right), \quad (4.39)$$

$$P_n(B) \approx P_n(0) \cdot \left(1 + \frac{5\sigma_n^2 \mu^2 B^2}{4\zeta_n^2(0)} \right), \quad (4.40)$$

$$E_n(B) \approx E_n(0) \cdot \left(1 - \frac{5\sigma_n^2 \mu^2 B^2}{4\zeta_n^2(0)} \right), \quad (4.41)$$

$$T_n(B) \approx E_n(0) \cdot \left(1 + \frac{5\sigma_n^2 \mu^2 B^2}{4\zeta_n^2(0)} \right), \quad (4.42)$$

$$\kappa_n(B) \approx \frac{3}{2} \kappa_{0n} \sigma_n^2 \left(1 - \frac{\sigma_n^2 \mu^2 B^2}{8\zeta_n^2(0)} \right). \quad (4.43)$$

В слабых магнитных полях с ростом индукции B убывают величины $\zeta_j(B)$, $E_j(B)$ и возрастает $P_j(B)$, $\tau_j(B)$, $T_j(B)$, что вполне согласуется с теорией парамагнетизма Паули [1] (в слабых магнитных полях диамагнетизм Ландау не проявляется). Несложно убедиться, что при $B \rightarrow 0$ имеет место $\zeta_j(B) \rightarrow \zeta_j(0)$, $\tau_j(B) \rightarrow \tau_j(0) = \zeta_j(0)$, $P_j(B) \rightarrow P_j(0)$, $E_j(B) \rightarrow E_j(0)$, $T_j(B) \rightarrow T_j(0) = E_j(0)$, а также $\kappa_e(B)/\kappa_{0e} \rightarrow 1,00348$, $\kappa_p(B)/\kappa_{0p} \rightarrow 11,2013$, $\kappa_n(B)/\kappa_{0n} \rightarrow 5,4899$.

4.2.6 Получить выражения для химического потенциала ζ_j и максимальной кинетической энергии τ_j частицы, давления P_j , средних полной E_j и кинетической T_j энергий, магнитной восприимчивости κ_j в общем случае произвольного крайне вырожденного идеального нерелятивистского ферми-газа в квантовом пределе сверхсильного магнитного поля с индукцией B .

Решение задания 4.2.6

В квантовом пределе сверхсильных магнитных полей для заряженных фермионов $n = 0$, и магнитные моменты всех микрочастиц направлены по полю. Тогда

$$x_q \leq 3 - \sigma_q; \quad R_a(x_q) = a(x_q - 1 + \sigma_q)^{a-1}, \quad (4.44)$$

и

$$\zeta_q(B) = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_q^2}{2m_q^3 \mu^2 B^2} + (1 - \sigma_q) \mu B, \quad (4.45)$$

$$\tau_q(B) = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_q^2}{2m_q^3 \mu^2 B^2} + \mu B, \quad (4.46)$$

$$P_q(B) = \frac{\pi^4 \hbar^6 n_q^3}{3m_q^3 \mu^2 B^2}, \quad (4.47)$$

$$E_q(B) = \frac{\pi^4 \hbar^6 N_q^3}{6m_q^3 \mu^2 B^2 V_q^2} + (1 - \sigma_q) N_q \mu B. \quad (4.48)$$

$$T_q(B) = \frac{\pi^4 \hbar^6 N_q^3}{6m_q^3 \mu^2 B^2 V_q^2} + N_q \mu B. \quad (4.49)$$

$$\kappa_q = \frac{P_q(B)}{B^2} + \frac{(\sigma_q - 1) \mu n_q}{B}. \quad (4.50)$$

При этом нижняя граница сверхсильного магнитного поля для протонов и электронов одинакова:

$$B^{(p)} = B^{(e)} = \frac{\pi^{4/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2^{2/3} m_p \mu_j} = 3,82 \cdot 10^{-7} n_p^{2/3} \text{ (Гс)}. \quad (4.51)$$

Для нейтронов поле сверхсильное, если $x_n \leq \sigma_n$. В этом случае

$$R_a(x_n) = \frac{1}{2} (x_n + \sigma_n)^a, \quad (4.52)$$

и

$$\zeta_n(B) = 2^{2/3} \zeta_n(0) - \sigma_n \mu B, \quad (4.53)$$

$$\tau_n(B) = 2^{2/3} \zeta_n(0), \quad (4.54)$$

$$P_n(B) = 2^{2/3} P_n(0), \quad (4.55)$$

$$E_n(B) = 2^{2/3} E_n(0) - \sigma_n N_n \mu B, \quad (4.56)$$

$$T_n(B) = 2^{2/3} E_n(0), \quad (4.57)$$

$$\kappa_n(B) = \frac{\sigma_n \mu n_n}{B}, \quad (4.58)$$

Нижняя граница сверхсильного для нейтронов магнитного поля

$$B^{(n)} = \frac{\pi^{4/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2^{2/3} m_n \mu_j} \frac{18^{1/3}}{2\sigma_n} = 2,51 \cdot 10^{-7} n_n^{2/3} \text{ (Гс)}. \quad (4.59)$$

Таким образом, химические потенциалы рассматриваемых ферми-газов при заданных их концентрациях уменьшаются с ростом индукции сверхсильного магнитного поля и достигают нуля при

$$B = \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \frac{\zeta_q(0)}{(\sigma_q - 1)^{1/3} \mu} \quad (4.60)$$

для заряженных фермионов и при

$$B = \frac{2^{2/3} \zeta_n(0)}{\sigma_n \mu} \quad (4.61)$$

для нейтронов, а при более высоких значениях B (в соответствующих реальных условиях вряд ли достижимых) становятся отрицательными величинами. Давления протонного и электронного газов и магнитные восприимчивости всех трех газов стремятся к нулю при $B \rightarrow \infty$. Давление и средняя кинетическая энергия нейтронного газа (как и максимальная кинетическая энергия нейтрона) во всей области сверхсильных магнитных полей больше соответствующих величин в отсутствие поля в $2^{2/3}$ раза и не зависят от B , что вполне согласуется с теорией парамагнетизма Паули: после ориентации магнитных моментов всех нейтронов по полю нет прироста кинетической энергии. Для заряженных фермионов величины $\tau_q(B)$ и $T_q(B)$ с ростом индукции сверхсильного магнитного поля сначала несколько уменьшаются, а затем существенно возрастают. Такая зависимость обусловлена одновременным проявлением парамагнитных и диамагнитных свойств ферми-газов, в частности, увеличением плотности числа квантовых состояний из-за диамагнетизма Ландау. Средние полные энергии всех трех газов в сверхсильном магнитном поле уменьшаются.

Задание 4.3

Изучение влияния магнитного поля на термодинамические характеристики крайне вырожденных идеальных релятивистских ферми-газов

4.3.1 Используя формулу (2.33) для большого термодинамического потенциала в параметрическом представлении и метод термодинамических функций, получить выражения для химического потенциала χ_q , давления P_q , средней полной энергии E_q и магнитной восприимчивости κ_q в общем случае произвольного крайне вырожденного идеального релятивистского газа заряженных фермионов в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B .

Решение задания 4.3.1

Используя известные [3] соотношения:

$$\begin{aligned} N_q &= -\left(\frac{\partial \Omega_q}{\partial \chi_q}\right)_{V_q, B}; \quad P_q = -\left(\frac{\partial \Omega_q}{\partial V_q}\right)_{\chi_q, B}; \quad E_q = \Omega_q + N_q \chi_q; \\ \kappa_q &= -\frac{1}{V_q B} \left(\frac{\partial \Omega_q}{\partial B}\right)_{V_q, \chi_q}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

для химического потенциала, давления, средней полной энергии и магнитной восприимчивости соответственно получаем:

$$\chi_q(B) = \sqrt{m_q^2 c^4 + (\chi_q^2(0) - m_q^2 c^4) \frac{X_q^2}{R_2^{2/3}}}, \quad (4.63)$$

$$P_q(B) = \frac{N_q}{2V} \sqrt{\chi_q^2(0) - m_q^2 c^4} \frac{R_1}{R_2^{4/3}}, \quad (4.64)$$

$$E_q(B) = \frac{N_q}{2} \sqrt{\chi_q^2(0) - m_q^2 c^4} \frac{2\sqrt{X_q^2 + Y_q R_2} - R_1}{R_2^{4/3}}, \quad (4.65)$$

$$\kappa_q = \kappa_{0q} \frac{R_1 + \frac{B}{2} \frac{\partial R_1}{\partial B}}{BR_2^{-2/3}} = \kappa_{0q} \frac{R_1 + \frac{1}{2} \sqrt{X_q^2 + Y_q} R_2 + R_3 - R_4}{BR_2^{-2/3}}, \quad (4.66)$$

где величины $R_1, R_2, X_q, Y_q, \chi_q(0)$ даются формулами (2.34)–(2.38),

$$\kappa_{0q} = \frac{2m_q c^2 \mu N_q / V_q}{\sqrt{\chi_q^2(0) - m_q^2 c^4}}, \quad (4.67)$$

$$R_3 = \frac{3}{8} Y_q \sum_s \sum_n \ln \left| \frac{\sqrt{X_q^2 + Y_q} + \sqrt{X_q^2 - Z_q}}{\sqrt{X_q^2 + Y_q} - \sqrt{X_q^2 - Z_q}} \right|, \quad (4.68)$$

$$R_4 = \frac{3}{16} \frac{\sigma_q - 1}{Y_q} \sum_s \sum_n \left(\left(\sqrt{X_q^2 + Y_q} \sqrt{X_q^2 - Z_q} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{X_q^2 + Y_q} + \sqrt{X_q^2 - Z_q}}{\sqrt{X_q^2 + Y_q} - \sqrt{X_q^2 - Z_q}} \right| \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\sigma_q - 1 + 4s \frac{2n + 1 + 2s}{\sqrt{1 + \frac{2n + 1 + 2s}{Y_q}}} \right) \right). \quad (4.69)$$

В квантовом пределе сверхсильных магнитных полей (при $n = 0$ и $s = -1/2$) имеем:

$$X_q^2 \leq 2 + \frac{(\sigma_q - 1)^2}{4Y_q} - (\sigma_q - 1) \sqrt{1 + \frac{2}{Y_q}}, \quad (4.70)$$

$$Z_q = (\sigma_q - 1) \cdot \left(\frac{\sigma_q - 1}{4Y_q} - 1 \right). \quad (4.71)$$

4.3.2 Пренебрегая величиной аномального магнитного момента электрона по сравнению с магнетонном Бора, получить уравнение состояния крайне вырожденного идеального релятивистского электронного газа в постоянном и однородном квантующем магнитном поле с индукцией B . Рассмотреть частный случай ультрарелятивистского газа.

Решение задания 4.3.2

Используя соотношения (4.64), (4.65), а также (2.34)–(2.38), (4.68), (4.69) при $\sigma_e = 1$, представим выражения для давления и плотности энергии крайне вырожденного идеального релятивистского электронного газа в квантующем магнитном поле в виде:

$$P_e(B) = \frac{n_e}{2} \xi_e(0) \frac{R_1(X_e, Y_e)}{R_2^{4/3}(X_e)}, \quad (4.72)$$

$$w_e(B) = \frac{n_e}{2} \xi_e(0) \frac{2\sqrt{X_e^2 + Y_e} R_2(X_e) - R_1(X_e, Y_e)}{R_2^{4/3}(X_e)}, \quad (4.73)$$

где

$$\xi_e(B) = \xi_e(0) \frac{X_e}{R_2^{1/3}(X_e)}; \quad \xi_e(0) = (3\pi^2)^{1/3} c \hbar n_e^{1/3}, \quad (4.74)$$

$$R_1(X_e, Y_e) = \frac{3}{2} \left(X_e \sqrt{X_e^2 + Y_e} - \frac{Y_e}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + X_e}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - X_e} \right| + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^l \left(\sqrt{X_e^2 + Y_e} \sqrt{X_e^2 - 2n} - \frac{Y_e + 2n}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + \sqrt{X_e^2 - 2n}}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - \sqrt{X_e^2 - 2n}} \right| \right) \right), \quad (4.75)$$

$$R_2(X_e) = \frac{3}{2} \left(X_e + 2 \sum_{n=1}^l \sqrt{X_e^2 - 2n} \right). \quad (4.76)$$

Суммирование в (4.75) и (4.76), ведется до тех пор, пока выражения под соответствующими радикалами неотрицательные.

Выражения (4.72) и (4.73) дают искомое уравнение состояния в параметрическом представлении.

При $n_p = n_e$ имеет место

$$R_2(X_e) = R_{3/2}(x_p). \quad (4.77)$$

Отсюда следует, в частности, что и для релятивистских электронов нижняя граница сверхсильного магнитного поля определяется выражением (4.51).

В квантовом пределе сверхсильных магнитных полей для релятивистских электронов

$$X_e^2 \leq 2; \quad R_2(X_e) = \frac{3}{2} X_e, \quad (4.78)$$

$$R_1(X_e, Y_e) = \frac{3}{2} \left(X_e \sqrt{X_e^2 + Y_e} - \frac{Y_e}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + X_e}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - X_e} \right| \right), \quad (4.79)$$

$$\xi_e(B) = \frac{\pi^2 \hbar^3 c n_e}{m_e \mu_B B}. \quad (4.80)$$

Для ультрарелятивистских электронов в квантующем магнитном поле $\xi_e \gg m_e c^2$, $X_e^2 \gg Y_e$; при этом в квантовом пределе сверхсильного магнитного поля $R_1(X_e) = \frac{3}{2} X_e^2$, и уравнение состояния имеет вид:

$$P_e(B) = w_e(B) = \frac{1}{2} n_e \cdot \xi_e(B). \quad (4.81)$$

Задание 4.4

Изучение влияния магнитного поля на термодинамические характеристики невырожденных идеальных нерелятивистских ферми-газов

4.4.1 Используя формулы (3.27), (3.31)–(3.33), построить графики зависимости химического потенциала от индукции магнитного поля для невырожденных идеальных нерелятивистских электронного, протонного и нейтронного газов.

Решение задания 4.4.1

Формулы (3.31)–(3.33) справедливы при больших значениях A_j . Фиксируя значение $A_j \gg 1$ (т. е. $A_j \geq 10$), мы фиксируем, тем самым, величину $m_j T / n_j^{2/3}$, а задавая значение α_j , задаем величину $m_j B / T$. При этом величина $z = (\alpha_j A_j^{2/3})^{-1} = \text{const} \cdot n_j^{2/3} / B$ не зависит явно от температуры, и при заданной концентрации фермионов n_j изменяется с изменением индукции магнитного поля B аналогично величине $\zeta_j(0) / (\mu B) = \text{const}_1 \cdot n_j^{2/3} / B$ (см. комментарии к построению графиков, представленных на рисунке 4.5).

Графики зависимости химического потенциала от индукции магнитного поля для невырожденных идеальных нерелятивистских электронного, протонного и нейтронного газов приведены на рисунке 4.9. Расчеты химического потенциала каждого из ферми-газов проведены для значений $A_j = 10$ и $A_j = 100$. Из рисунка 4.9 видно, что в достаточно сильных магнитных полях абсолютные величины химических потенциалов всех трех ферми-газов заметно возрастают. При $B \rightarrow 0$ имеет место $\zeta_j(B) \rightarrow \zeta_j(0)$.

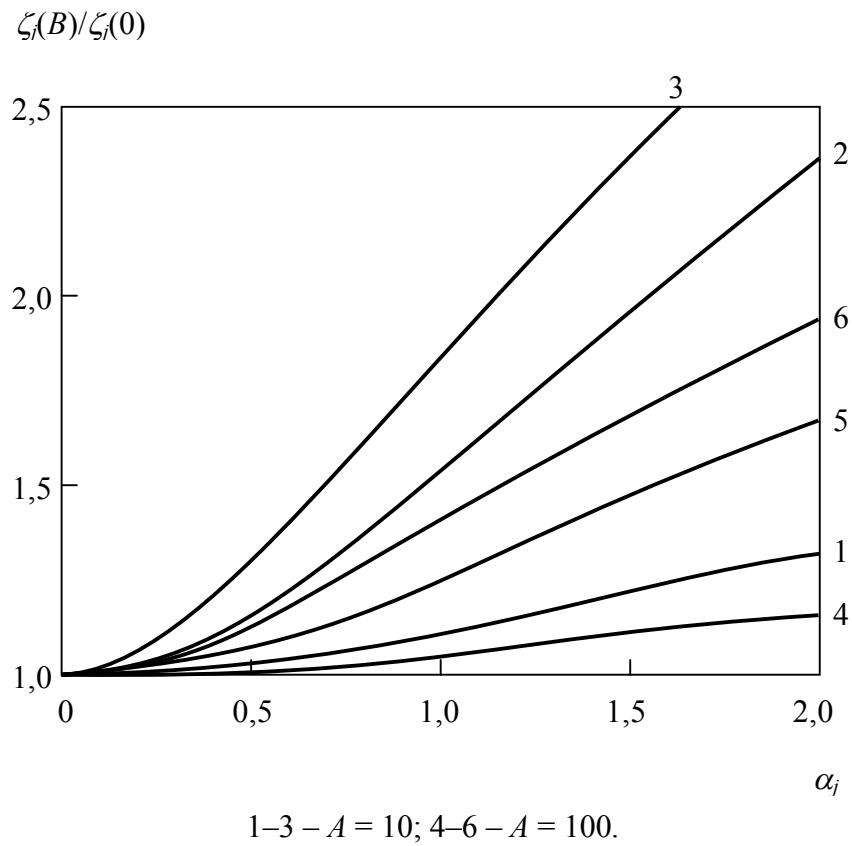


Рисунок 4.9 – Зависимости химических потенциалов невырожденных идеальных нерелятивистских электронного (1, 4), нейтронного (2, 5) и протонного (3, 6) газов от индукции магнитного поля при фиксированных концентрациях фермионов и температурах

4.4.2 Используя формулы (3.25), (3.26) для большого термодинамического потенциала и метод термодинамических функций, получить выражения для средней энергии E_j невырожденных идеальных нерелятивистских газов заряженных и нейтральных фермионов в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Проиллюстрировать с помощью соответствующих графиков зависимости средней энергии от индукции магнитного поля для электронного, протонного и нейтронного газов.

Решение задания 4.4.2

Средняя энергия ферми-газа, вычисленная с точностью до слагаемого $m_j c^2 N_j$, связана с большим термодинамическим потенциалом соотношением [3]:

$$E_j = \Omega_j - \zeta_j \left(\frac{\partial \Omega_j}{\partial \zeta_j} \right)_{V_j, T} - T \left(\frac{\partial \Omega_j}{\partial T} \right)_{V_j, \zeta_j} = -N_j kT + N_j \zeta_j + TS. \quad (4.82)$$

Отсюда находим:

$$E_q(B) = E_q(0) \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \alpha_q \operatorname{cth} \alpha_q - \sigma_q \alpha_q \operatorname{th}(\sigma_q \alpha_q) \right), \quad (4.83)$$

$$E_n(B) = E_n(0) \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \sigma_n \alpha_n \operatorname{th}(\sigma_n \alpha_n) \right), \quad (4.84)$$

где

$$E_j(0) = \frac{3}{2} N_j kT. \quad (4.85)$$

Графики представлены на рисунке 4.10. Из рисунка 4.10 видно, что для электронного газа ($\sigma_e \approx 1$) средняя энергия с ростом B при $T = \text{const}$ уменьшается и стремится в пределе к величине $E_e(0)/3 = N_e kT/2$. Это объясняется, очевидно, «вымораживанием» двух степеней свободы заряженного фермиона сверхсильным магнитным полем (в соответствии с теорией диамагнетизма Ландау). Средние энергии нуклонных газов с увели-

чением B существенно уменьшаются и при определенных (вряд ли достижимых в реальных условиях) значениях B становятся отрицательными величинами, что обусловлено преобладанием в сверхсильных магнитных полях парамагнитных явлений над диамагнитными из-за существенных отличий собственного магнитного момента протона от ядерного магнетона и собственного магнитного момента нейтрона от нуля. При $B \rightarrow 0$ имеет место $E_j(B) \rightarrow E_j(0)$ для всех рассматриваемых газов.

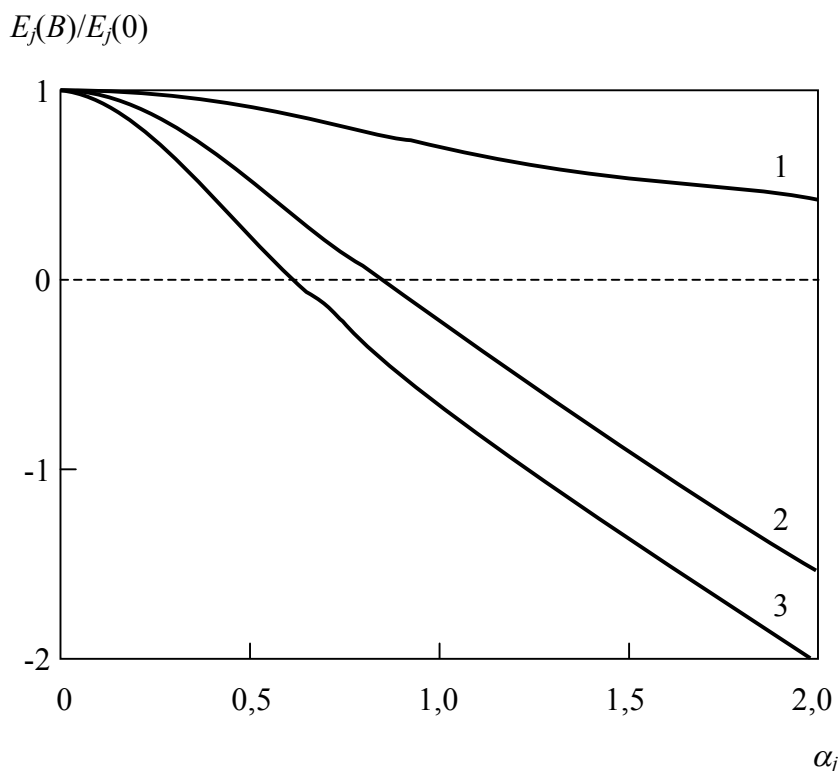


Рисунок 4.10 – Зависимости средних энергий невырожденных идеальных нерелятивистских электронного (1), нейтронного (2) и протонного (3) газов от индукции магнитного поля при фиксированных концентрациях фермионов и температурах

4.4.3 Используя формулы (3.25), (3.26) для большого термодинамического потенциала и метод термодинамических функций, получить выражения для намагниченности M_j невырожденных идеальных нерелятивистских газов заряженных и нейтральных фермионов в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Проиллюстрировать с помощью соответствующих графиков зависимости намагниченности от индукции магнитного поля для электронного, протонного и нейтронного газов.

Решение задания 4.4.3

Намагниченность газа заряженных фермионов

$$M_q(B) = -\frac{1}{V_q} \left(\frac{\partial \Omega_q}{\partial B} \right)_{V_q, \zeta, B} = M_{0q} \left(\frac{1}{\alpha_q} + \sigma_q \operatorname{th}(\sigma_q \alpha_q) - \operatorname{cth} \alpha_q \right); \quad (4.86)$$

намагниченность нейтронного газа

$$M_n(B) = M_{0n} \sigma_n \operatorname{th}(\sigma_n \alpha_n), \quad (4.87)$$

где $M_{0j} = \mu n_j$. При $\sigma_j = \sigma_e \approx 1$ формула (4.86) переходит в соответствующее выражение [3, с. 273] для электронного газа:

$$M_e(B) = M_{0e} \left(\frac{1}{\alpha_e} - \frac{1}{\operatorname{sh}(2\alpha_e)} \right). \quad (4.88)$$

Соотношение (4.87) представляет собой частный случай квантового аналога формулы Ланжевена для частиц с полуцелым спином (см., например, [3]).

Графики представлены на рисунке 4.11. Из рисунка 4.11 видно, что намагниченность нейтронного газа быстро достигает насыщения (при этом $M_n(B) = \sigma_n M_{0n}$), а намагниченность газа заряженных фермионов сначала растет, а затем уменьшается (при $\alpha_q \rightarrow \infty$ $M_q(B)/M_{0q} \rightarrow \sigma_q - 1$).

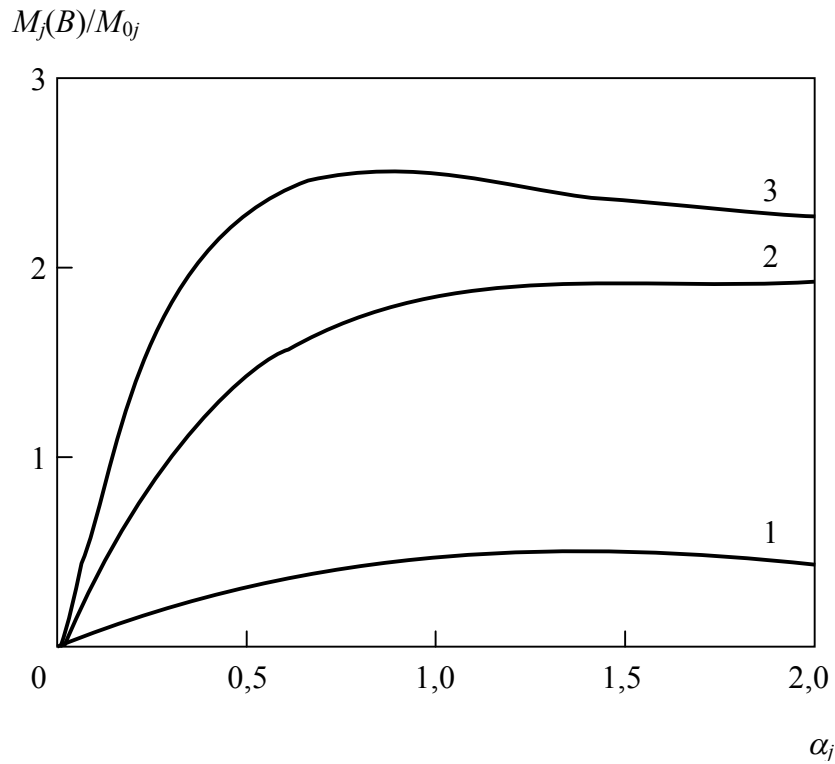


Рисунок 4.11 – Зависимости намагничений невырожденных идеальных нерелятивистских электронного (1), нейтронного (2) и протонного (3) газов от индукции магнитного поля при фиксированных концентрациях фермионов и температурах

4.4.4 Используя формулы (3.25), (3.26) для большого термодинамического потенциала и метод термодинамических функций, получить выражения для энтропии S_j невырожденных идеальных нерелятивистских газов заряженных и нейтральных фермионов в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Проиллюстрировать с помощью соответствующих графиков зависимости энтропии от индукции магнитного поля для электронного, протонного и нейтронного газов.

Решение задания 4.4.4

Энтропия ферми-газа:

$$S_j(B) = - \left(\frac{\partial \Omega_j(B)}{\partial T} \right)_{\zeta_j, V_j, B}. \quad (4.89)$$

Это дает

$$S_q(B) = S_q(0) \cdot \left(1 + \frac{\ln \frac{\alpha_q \operatorname{ch}(\sigma_q \alpha_q)}{\operatorname{sh} \alpha_q} + \alpha_q \operatorname{cth} \alpha_q - \sigma_q \alpha_q \operatorname{th}(\sigma_q \alpha_q) - 1}{2,5 + \ln A_q} \right), \quad (4.90)$$

$$S_n(B) = S_n(0) \cdot \left(1 + \frac{\ln(\operatorname{ch}(\sigma_n \alpha_n)) - \sigma_n \alpha_n \operatorname{th}(\sigma_n \alpha_n)}{2,5 + \ln A_n} \right), \quad (4.91)$$

где

$$S_j(0) = N_j k (2,5 + \ln A_j). \quad (4.92)$$

Графики представлены на рисунке 4.12. Из рисунка 4.12 видно, что энтропии всех рассматриваемых ферми-газов с ростом α_j сначала убывают, причем имеет место $S_p(B)/S_p(0) < S_n(B)/S_n(0) < S_e(B)/S_e(0) < 1$. Дальнейшее увеличение α_j (т. е. возрастание индукции магнитного поля при фиксированной температуре) приводит к стабилизации значений $S_n(B)/S_n(0)$ и увеличению соответствующих отношений для электронного

и протонного газов. При достаточно больших значениях α_q имеет место даже $S_q(B) > S_q(0)$, однако вызывает большие сомнения возможность существования столь сильных магнитных полей в природных условиях. При $B \rightarrow 0$ имеем $S_j(B) \rightarrow S_j(0)$ для всех рассматриваемых газов.

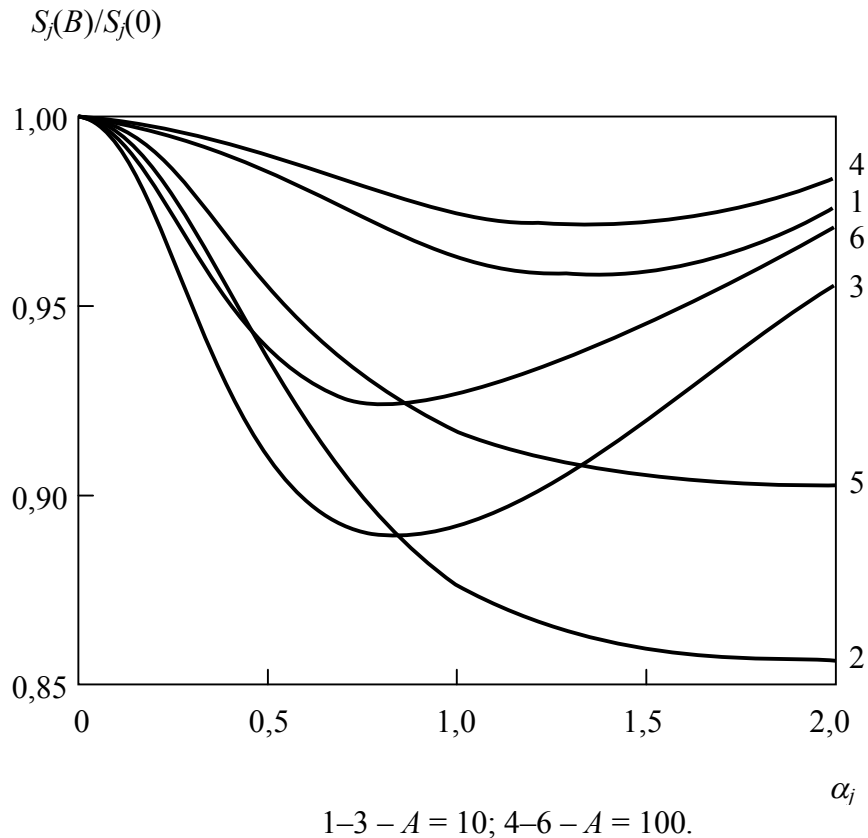


Рисунок 4.12 – Зависимости энтропий невырожденных идеальных нерелятивистских электронного (1, 4), нейтронного (2, 5) и протонного (3, 6) газов от индукции магнитного поля при фиксированных концентрациях фермионов и температурах

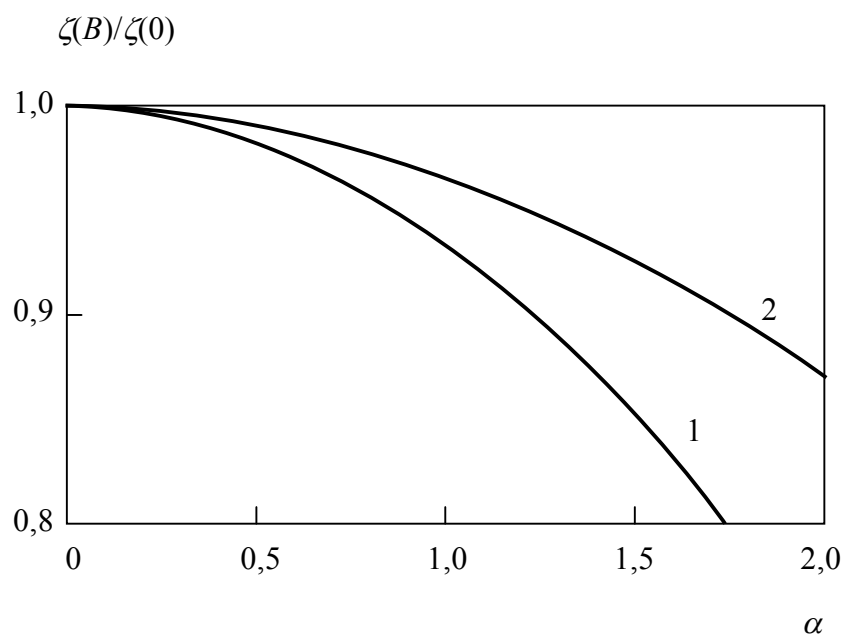
Задание 4.5

Изучение влияния магнитного поля на термодинамические характеристики невырожденных идеальных нерелятивистских бозе-газов

4.5.1 Используя формулы (3.43), (3.44), построить график зависимости химического потенциала от индукции магнитного поля для невырожденного идеального нерелятивистского бозе-газа.

Решение задания 4.5.1

График зависимости химического потенциала от индукции магнитного поля для невырожденного идеального нерелятивистского бозе-газа представлен на рисунке 4.13.



1 – $A = 10$; 2 – $A = 100$.

Рисунок 4.13 – Зависимость химического потенциала невырожденного идеального нерелятивистского газа заряженных бозонов от индукции магнитного поля при фиксированных концентрации и температуре

4.5.2 Используя формулу (3.41) для большого термодинамического потенциала и метод термодинамических функций, получить выражение для средней энергии E_j невырожденного идеального нерелятивистского газа заряженных бозонов в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Построить график зависимости средней энергии бозе-газа от индукции магнитного поля.

Решение задания 4.5.2

Средняя энергия бозе-газа

$$E(B) = \Omega - \zeta \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \right)_{V, T} - T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \zeta} = E(0) \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} + \alpha \cdot \text{cth} \alpha \right), \quad (4.93)$$

где

$$E(0) = \frac{3}{2} NkT. \quad (4.94)$$

График зависимости средней энергии от индукции магнитного поля для невырожденного идеального нерелятивистского бозе-газа представлен на рисунке 4.14.

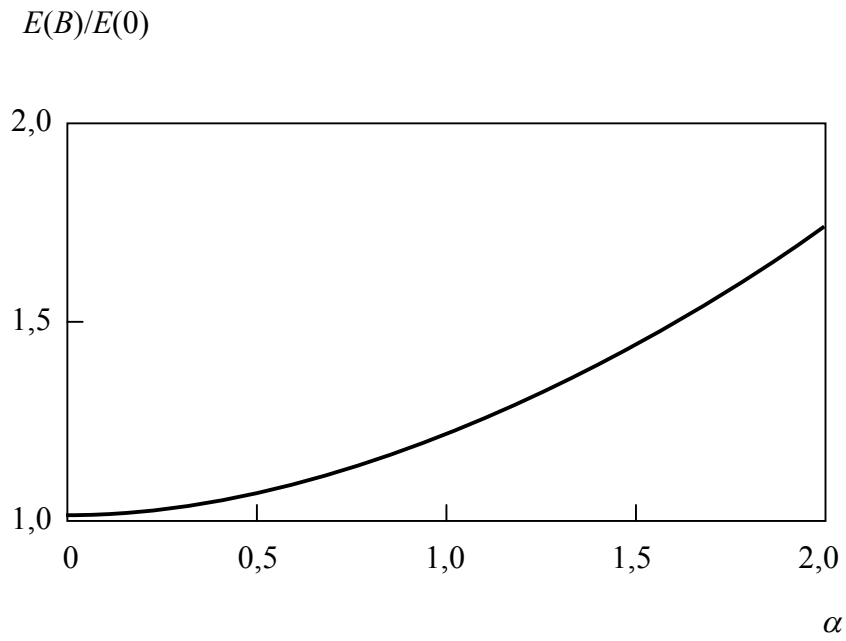


Рисунок 4.14 – Зависимость средней энергии невырожденного идеального нерелятивистского газа заряженных бозонов от индукции магнитного поля при фиксированных концентрации и температуре

4.5.3 Используя формулу (3.41) для большого термодинамического потенциала и метод термодинамических функций, получить выражение для намагниченности M_j невырожденного идеального нерелятивистского газа заряженных бозонов в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Построить график зависимости намагниченности бозе-газа от индукции магнитного поля.

Решение задания 4.5.3

Намагниченность бозе-газа

$$M(B) = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial B} \right)_{V, \zeta, B} = M_0 \left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{cth} \alpha \right); \quad (4.95)$$

где $M_0 = \mu n$.

График зависимости намагниченности от индукции магнитного поля для невырожденного идеального нерелятивистского бозе-газа представлен на рисунке 4.15.

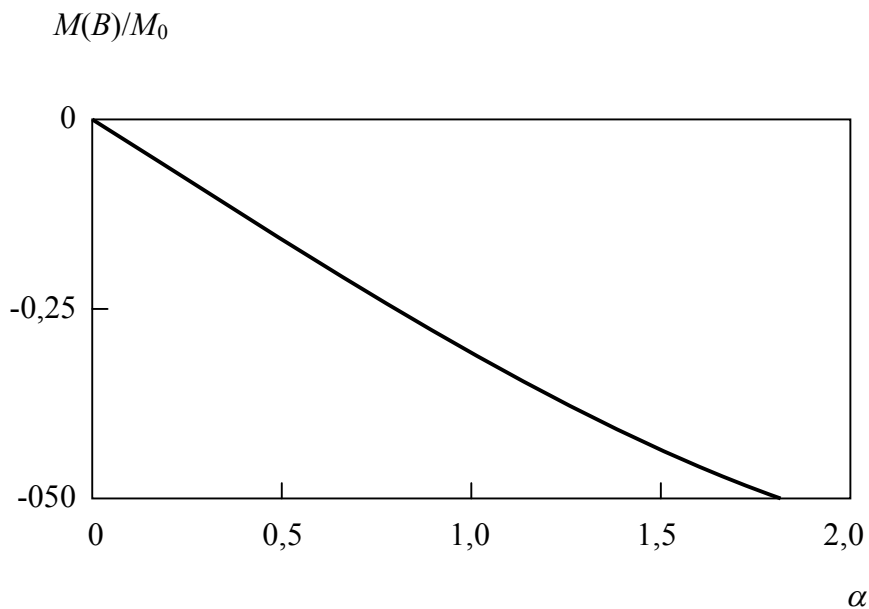


Рисунок 4.15 – Зависимость намагниченности невырожденного идеального нерелятивистского газа заряженных бозонов от индукции магнитного поля при фиксированных концентрации и температуре

4.5.4 Используя формулу (3.41) для большого термодинамического потенциала и метод термодинамических функций, получить выражение для энтропии S_j невырожденного идеального нерелятивистского газа заряженных бозонов в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Построить график зависимости энтропии бозе-газа от индукции магнитного поля.

Решение задания 4.5.4

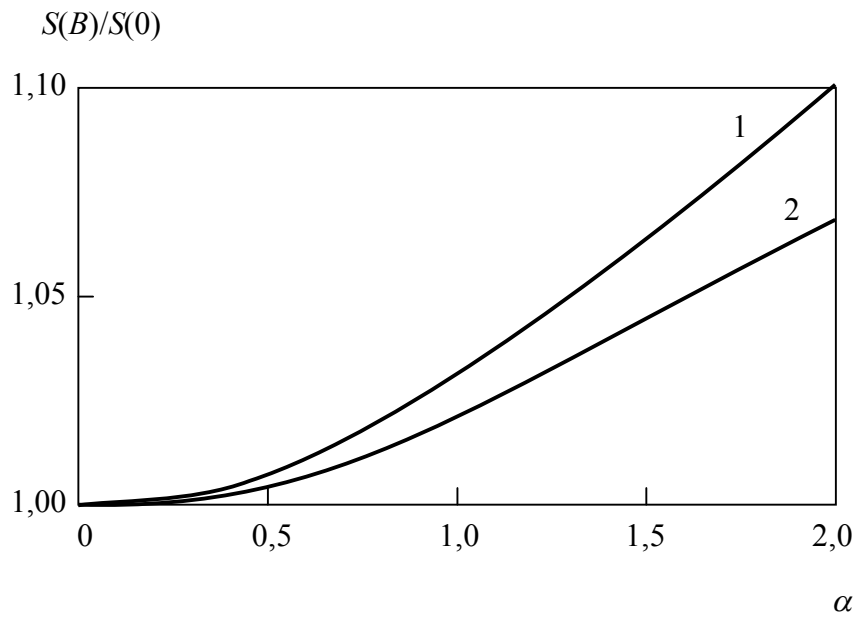
Энтропия бозе-газа

$$S(B) = - \left(\frac{\partial \Omega(B)}{\partial T} \right)_{\zeta, V, B} = S(0) \cdot \left(1 + \frac{\ln \frac{\alpha}{\text{sh} \alpha} + \alpha \text{cth} \alpha - 1}{2,5 + \ln A} \right), \quad (4.96)$$

где

$$S(0) = N k(2,5 + \ln A). \quad (4.97)$$

График зависимости энтропии от индукции магнитного поля для невырожденного идеального нерелятивистского бозе-газа представлен на рисунке 4.16.



1 – $A = 10$; 2 – $A = 100$.

Рисунок 4.16 – Зависимость энтропии невырожденного идеального нерелятивистского газа заряженных бозонов от индукции магнитного поля при фиксированных концентрации и температуре

Задание 4.6

Изучение влияния магнитного поля на термодинамические характеристики невырожденных идеальных релятивистских ферми- и бозе-газов

4.6.1 Учитывая, что большой термодинамический потенциал $\Omega = -NkT$, используя формулу (3.52) для числа частиц N и метод термодинамических функций, получить выражения для средней полной энергии E , намагниченности M и энтропии S невырожденного идеального релятивистского газа заряженных фермионов в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B .

Решение задания 4.6.1

Учитывая, что большой термодинамический потенциал

$$\Omega(B) = -N(B)kT = -\frac{m^2 c V k^2 T^2}{\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) (0,3\alpha K_1(\eta) + 1,02 K_2(\eta)), \quad (4.98)$$

где $K_1(\eta)$ и $K_2(\eta)$ – бесселевы функции, $\alpha = \frac{\gamma\eta}{2} = \frac{\mu B}{kT}$, и используя соотношения

$$E(B) = \Omega - \chi \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \chi} \right)_{V,T,B} - T \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V,\chi,B},$$

$$M(B) = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial B} \right)_{V,\chi,B}, \quad S(B) = -\left(\frac{\partial \Omega(B)}{\partial T} \right)_{\chi,V,B}, \quad (4.99)$$

для средней энергии, намагниченности и энтропии невырожденного идеального релятивистского ферми-газа в магнитном поле получаем соответственно:

$$E(B) = Nk \left(1 + \frac{(0,30\alpha\eta + 2,04)K_0(\eta) + 1,02(\eta + 4/\eta)K_1(\eta)}{0,30\alpha K_1(\eta) + 1,02 K_2(\eta)} \right), \quad (4.100)$$

$$M(B) = \frac{\mu N}{V} \left(1 - \frac{1,02K_2(\eta)}{0,3\alpha K_1(\eta) + 1,02K_2(\eta)} \right), \quad (4.101)$$

$$S(B) = Nk \left(2 - \frac{\chi(B)}{kT} + \frac{(0,30\alpha\eta + 2,04)K_0(\eta) + 1,02(\eta + 4/\eta)K_1(\eta)}{0,30\alpha K_1(\eta) + 1,02K_2(\eta)} \right). \quad (4.102)$$

4.6.2 Учитывая, что большой термодинамический потенциал $\Omega = -NkT$, используя формулу (3.52) для числа частиц N и метод термодинамических функций, получить выражения для средней полной энергии E , намагниченности M и энтропии S невырожденного идеального релятивистского газа заряженных бозонов в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B .

Решение задания 4.6.2

Учитывая, что большой термодинамический потенциал

$$\Omega(B) = -N(B)kT = -\frac{m^2 c V k^2 T^2}{2\pi^2 \hbar^3} \exp\left(\frac{\chi}{kT}\right) \sqrt{1+\gamma} \times \\ \times \left(1,30\alpha K_1(\sqrt{1+\gamma\eta}) + 1,02\sqrt{1+\gamma} K_2(\sqrt{1+\gamma\eta})\right), \quad (4.103)$$

и используя соотношения (4.99), для средней энергии, намагниченности и энтропии невырожденного идеального релятивистского бозе-газа в магнитном поле получаем соответственно:

$$E(B) = Nk \left(1 + \frac{(1,30\alpha\eta + 2,04)\sqrt{1+\gamma} K_0(\sqrt{1+\gamma\eta})}{1,30\alpha K_1(\sqrt{1+\gamma\eta}) + 1,02\sqrt{1+\gamma} K_2(\sqrt{1+\gamma\eta})} + \right. \\ \left. + \frac{1,02(\eta + 2\alpha + 4/\eta) K_1(\sqrt{1+\gamma\eta})}{1,30\alpha K_1(\sqrt{1+\gamma\eta}) + 1,02\sqrt{1+\gamma} K_2(\sqrt{1+\gamma\eta})} \right), \quad (4.104)$$

$$M(B) = \frac{\mu N}{V} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{(1,30\alpha\eta + 2,04) K_0(\sqrt{1+\gamma\eta})}{1,30\alpha\sqrt{1+\gamma} K_1(\sqrt{1+\gamma\eta}) + 1,02(1+\gamma) K_2(\sqrt{1+\gamma\eta})} - \right. \\ \left. - \frac{0,51 \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma}} (\eta + 2\alpha + 4/\eta) K_1(\sqrt{1+\gamma\eta}) + \frac{1,02}{\alpha} K_2(\sqrt{1+\gamma\eta})}{1,30\alpha\sqrt{1+\gamma} K_1(\sqrt{1+\gamma\eta}) + 1,02(1+\gamma) K_2(\sqrt{1+\gamma\eta})} \right), \quad (4.105)$$

$$S(B) = Nk \left(2 - \frac{\chi(B)}{kT} + \frac{(1,30\alpha\eta + 2,04)\sqrt{1+\gamma} K_0(\sqrt{1+\gamma\eta})}{1,30\alpha K_1(\sqrt{1+\gamma\eta}) + 1,02\sqrt{1+\gamma} K_2(\sqrt{1+\gamma\eta})} + \right. \\ \left. + \frac{1,02(\eta + 2\alpha + 4/\eta) K_1(\sqrt{1+\gamma\eta})}{1,30\alpha K_1(\sqrt{1+\gamma\eta}) + 1,02\sqrt{1+\gamma} K_2(\sqrt{1+\gamma\eta})} \right). \quad (4.106)$$

Задание 4.7

Изучение влияния магнитного поля на термодинамические характеристики невырожденных идеальных нерелятивистских ферми- и бозе-газов из пар «частица-античастица»

4.7.1 Используя формулы (3.63), (3.67), построить графики зависимости концентраций невырожденных идеальных нерелятивистских газов из фермионных и бозонных пар от индукции постоянного и однородного магнитного поля.

Решение задания 4.7.1

Графики представлены на рисунке 4.17. Здесь $\alpha = \mu B / kT$. Из рисунка легко видеть, что сильные магнитные заметно увеличивают концентрацию фермионных пар и уменьшают концентрацию бозонных пар.

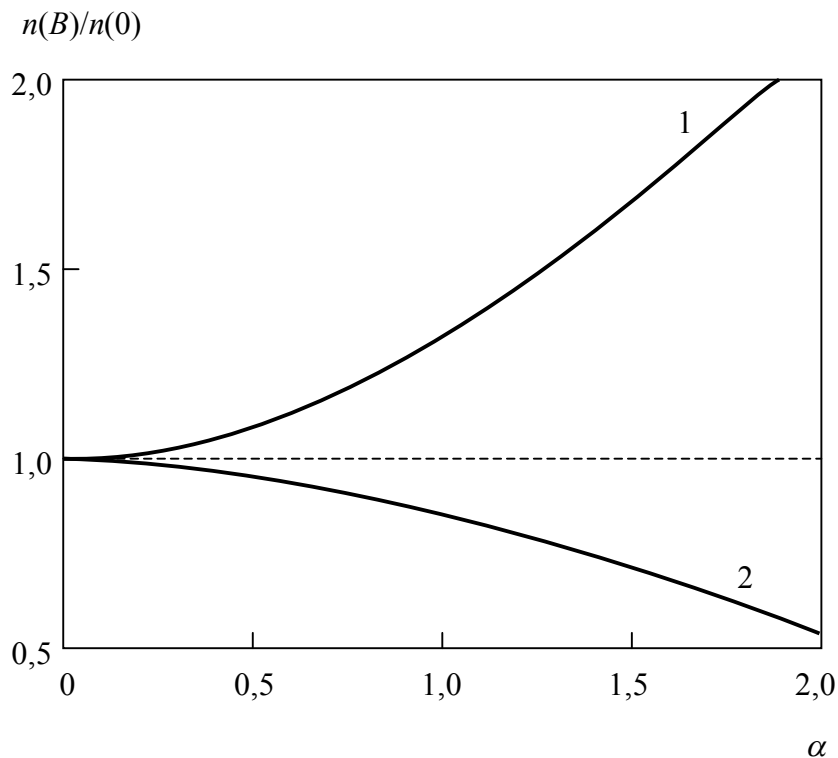


Рисунок 4.17 – Зависимость концентраций невырожденных идеальных нерелятивистских газов фермионных (1) и бозонных (2) пар от индукции магнитного поля при фиксированной температуре

4.7.2 Используя формулы (3.61), (3.66) для большого термодинамического потенциала и метод термодинамических функций, получить выражения для средней энергии E невырожденных идеальных нерелятивистских газов из фермионных и бозонных пар в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Проиллюстрировать с помощью соответствующих графиков зависимости средней энергии от индукции магнитного поля.

Решение задания 4.7.2

Для средней энергии невырожденных идеальных нерелятивистских газов из фермионных и бозонных пар в магнитном поле в результате стандартных вычислений получим соответственно:

$$E^{\pm}(B) = kTN^{\pm}(B) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{mc^2}{kT} + \alpha \cdot \text{cth}\alpha - \alpha \cdot \text{th}\alpha \right), \quad (4.106)$$

и

$$E^{\pm}(B) = kTN^{\pm}(B) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{mc^2}{kT} + \alpha \cdot \text{cth}\alpha \right), \quad (4.107)$$

где $\alpha = \mu B / kT$.

$$E^{\pm}(0) = kTN^{\pm}(0) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{mc^2}{kT} \right). \quad (4.108)$$

Графики зависимости средней энергии от индукции магнитного поля представлены на рисунке 4.18. Расчеты проводились для температуры, соответствующей условию $kT = 0,1mc^2$.

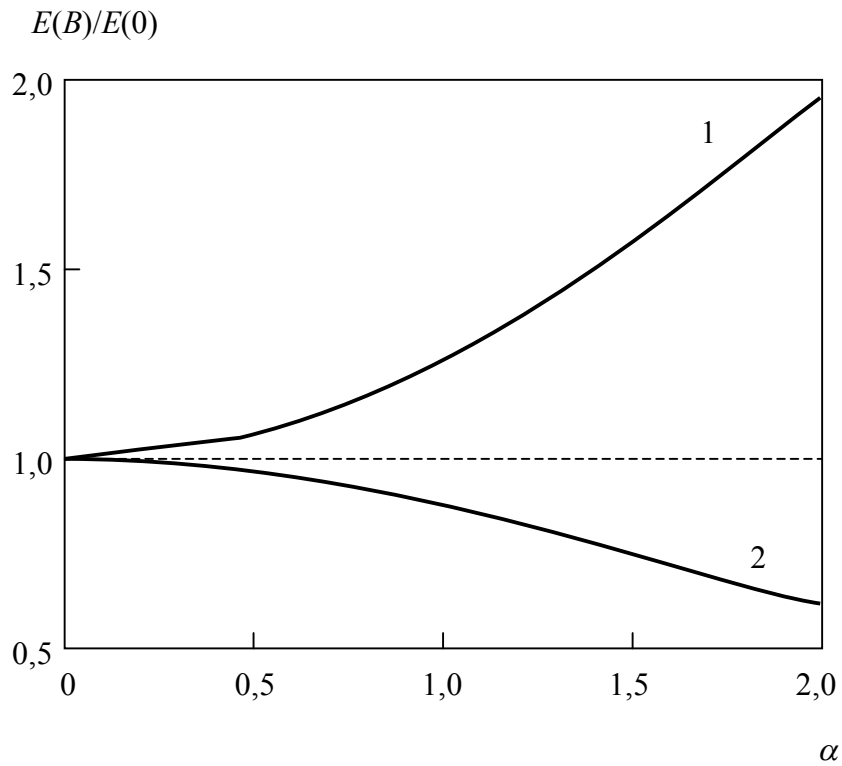


Рисунок 4.18 – Зависимость средних энергий невырожденных идеальных нерелятивистских газов фермионных (1) и бозонных (2) пар от индукции магнитного поля при фиксированной температуре

4.7.3 Используя формулы (3.61), (3.66) для большого термодинамического потенциала и метод термодинамических функций, получить выражения для намагничения M невырожденных идеальных нерелятивистских газов из фермионных и бозонных пар в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Проиллюстрировать с помощью соответствующих графиков зависимости намагничения от индукции магнитного поля.

Решение задания 4.7.3

Для намагничения невырожденных идеальных нерелятивистских газов из фермионных и бозонных пар в магнитном поле в результате стандартных вычислений получим соответственно:

$$M^{\pm}(B) = M_0 \alpha \cdot \text{cth} \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \text{th} \alpha - \text{cth} \alpha \right), \quad (4.109)$$

и

$$M^{\pm}(B) = M_0 \frac{\alpha}{\text{sh} \alpha} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - \text{cth} \alpha \right), \quad (4.110)$$

где $M_0 = \mu n^{\pm}(0)$.

Графики зависимости намагничения от индукции магнитного поля представлены на рисунке 4.19. Из рисунка легко видеть, что намагничение газа фермионных пар положительно и растет с ростом индукции магнитного поля, намагничение газа бозонных пар отрицательно и с ростом индукции увеличивается по модулю

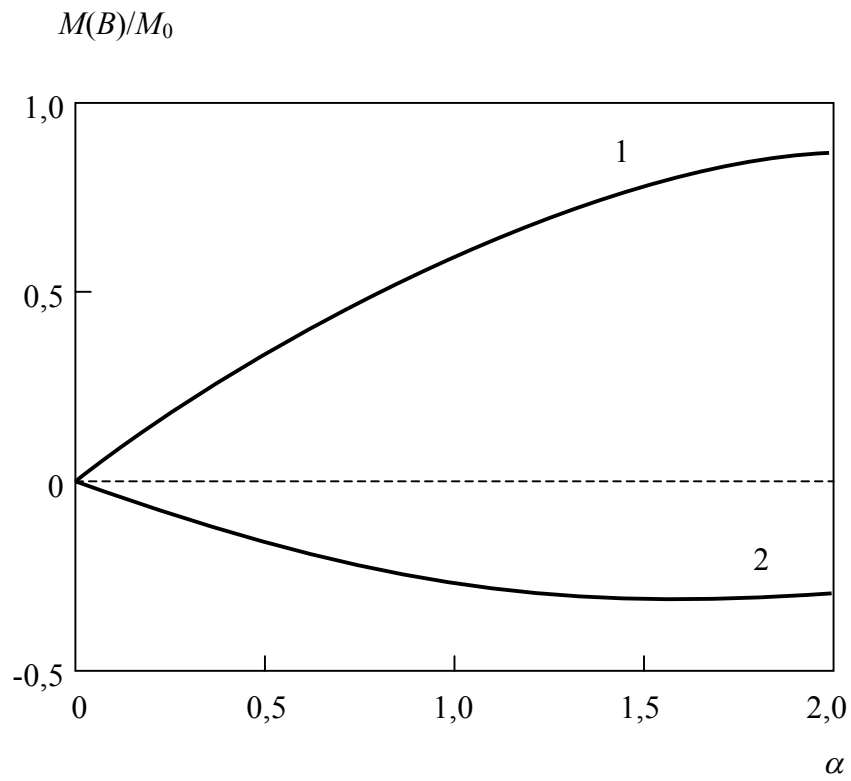


Рисунок 4.19 – Зависимость намагничений невырожденных идеальных нерелятивистских газов фермионных (1) и бозонных (2) пар от индукции магнитного поля при фиксированной температуре

4.7.4 Используя формулы (3.61), (3.66) для большого термодинамического потенциала и метод термодинамических функций, получить выражения для энтропии S невырожденных идеальных нерелятивистских газов из фермионных и бозонных пар в постоянном и однородном магнитном поле с индукцией B . Проиллюстрировать с помощью соответствующих графиков зависимости энтропии от индукции магнитного поля.

Решение задания 4.7.4

Для энтропии невырожденных идеальных нерелятивистских газов из фермионных и бозонных пар в магнитном поле в результате стандартных вычислений получим соответственно:

$$S^{\pm}(B) = kN^{\pm}(B) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{mc^2}{kT} + \alpha \cdot \text{cth}\alpha - \alpha \cdot \text{th}\alpha \right), \quad (4.111)$$

и

$$S^{\pm}(B) = kN^{\pm}(B) \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{mc^2}{kT} + \alpha \cdot \text{cth}\alpha \right), \quad (4.112)$$

где

$$S^{\pm}(0) = kN^{\pm}(0) \cdot \left(\frac{5}{2} + \frac{mc^2}{kT} \right), \quad (4.113)$$

Графики зависимости энтропии от индукции магнитного поля представлены на рисунке 4.20. Расчеты проводились для температуры, соответствующей условию $kT = 0,1mc^2$.

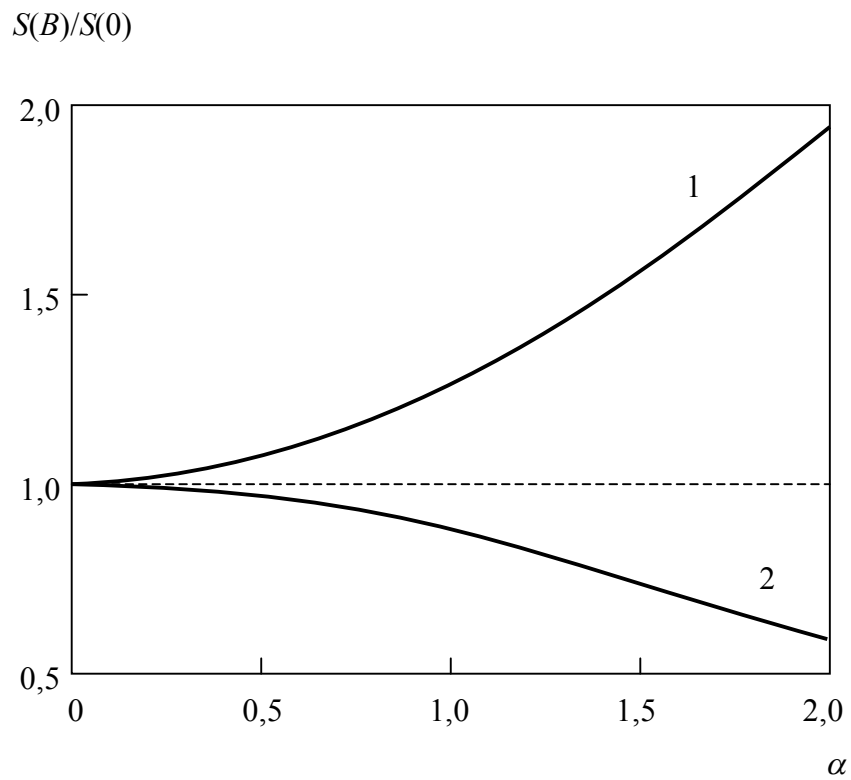


Рисунок 4.20 – Зависимость энтропий невырожденных идеальных нерелятивистских газов фермионных (1) и бозонных (2) пар от индукции магнитного поля при фиксированной температуре

БИБЛИОГРАФИЧЕСКАЯ СПРАВКА

Перечень избранных научных публикаций, посвященных исследованию влияния магнитных полей на термодинамические характеристики ферми- и бозе-газов

1. Румер, Ю.Б. К теории магнетизма электронного газа / Ю.Б. Румер // Ж. эксперим. и теор. физ. – 1948. – Т. 18, № 12. – С. 1081–1095.
2. Ансельм, А.И. Химический потенциал и критерий вырождения электронов проводимости в сильном магнитном поле / А.И. Ансельм, Б.М. Аскеров // Физ. тверд. тела. – 1960. – Т. 2, № 11. – С. 2821–2826.
3. Рубан, В.А. Магнитные свойства релятивистской плазмы / В.А. Рубан // Изв. вузов. Физика. – 1967. – № 3. – С. 67–74.
4. Canuto, V. Quantum theory of an electron gas in intense magnetic fields / V. Canuto, H.Y. Chiu // Phys. Rev. – 1968. – V. 173, № 5. – P. 1210–1219.
5. Canuto, V. Thermodynamic properties of a magnetized fermi gas / V. Canuto, H.Y. Chiu // Phys. Rev. – 1968. – V. 173, № 5. – P. 1220–1228.
6. Canuto, V. Magnetic moment of a magnetized fermi gas / V. Canuto, H.Y. Chiu // Phys. Rev. – 1968. – V. 173, № 5. – P. 1229–1235.
7. Шульман, Г.А. Холодная нейтральная плазма в квантующем магнитном поле / Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1974. – № 10. – С. 24–28.
8. Шульман, Г.А. Нейтронизация холодного водорода в присутствии сверхсильных магнитных полей / Г.А. Шульман // Астрофизика. – 1974. – Т. 10, вып. 4. – С. 543–554.
9. Шульман, Г.А. О свойствах холодного плотного вещества с замороженным сверхсильным магнитным полем / Г.А. Шульман // Астрофизика. – 1975. – Т. 11, вып. 1. – С. 89–95.
10. Шульман, Г.А. О внутреннем строении холодных сверхплотных звезд с замороженным магнитным полем / Г.А. Шульман // Астрон. ж. – 1975. – Т. 52, вып. 6. – С. 1166–1172.
11. Шульман, Г.А. Сверхплотные звезды в квантовом пределе замороженных сверхсильных магнитных полей / Г.А. Шульман // Астрон. ж. – 1976. – Т. 53, вып. 4. – С. 755–761.
12. Canuto, V. Intense magnetic field in astrophysics / V. Canuto, H.Y. Chiu // Space Sci. Rev. – 1977. – V. 12, № 1. – P. 3–74.
13. Canuto, V. Quantizing magnetic field in astrophysics / V. Canuto, J. Ventura // Fundam. Cosmic. Phys. – 1977. – V. 2, № 3–4. – P. 203–253.
14. Шульман, Г.А. О снятии вырождения и приближения идеального газа для электронов холодной плотной звезды с замороженным сверхсиль-

- ным магнитным полем / Г.А. Шульман, В. С. Секержицкий // *Астрофизика*. – 1977. – Т. 13, вып. 1. – С. 165–172.
15. Иванов, М.А. Равновесие по отношению к образованию пар в квантовом магнитном поле / М.А. Иванов, Г.А. Шульман // *Изв. вузов. Физика*. – 1977. – № 9. – С. 122–126.
 16. Иванов, М.А. Термодинамические функции равновесного излучения и электрон-позитронных пар в присутствии квантовых магнитных полей / М.А. Иванов, Г.А. Шульман // *Изв. вузов. Физика*. – 1978. – № 3. – С. 60–65.
 17. Шульман, Г.А. К квантовой теории магнетизма сверхплотных звезд / Г.А. Шульман // *Астрон. ж.* – 1979. – Т. 56, вып. 1. – С. 51–59.
 18. Шульман, Г.А. О физических условиях в недрах сверхплотных намагниченных астрофизических объектов / Г.А. Шульман // *Астрон. ж.* – 1979. – Т. 56, вып. 2. – С. 352–358.
 19. Иванов, М.А. Влияние сильного магнитного поля на устойчивость равновесных конфигураций горячей релятивистской плазмы / М.А. Иванов, С.В. Измайлов // *Исследования по физике звезд: Сб. науч. тр. / Ленингр. гос. пед. ин-т.* – Л., 1981. – С. 3–14.
 20. Секержицкий, В.С. Уравнение состояния холодного сверхплотного намагниченного вещества / В.С. Секержицкий, С.С. Секержицкий, Г.А. Шульман // *Исследования по физике звезд : сб. науч. тр. / Ленингр. гос. пед. ин-т.* – Л., 1981. – С. 25–40.
 21. Липовецкий, С.С. Термодинамические характеристики ферми-газов в магнитном поле / С.С. Липовецкий, А.А. Олесик, В.С. Секержицкий // *Изв. вузов. Физика*. – 1987. – № 5. – С. 21–25.
 22. Иванов, М.А. К вопросу об идеальности ферми-газов в сильном магнитном поле / М.А. Иванов, С.С. Липовецкий, В.С. Секержицкий // *Астрофизика*. – 1989. – Т. 31, вып. 1. – С. 191–194.
 23. Шульман, Г.А. Нейтронный газ вырожденной сверхплотной звезды с замороженным магнитным полем / Г.А. Шульман // *Астрон. ж.* – 1991. – Т. 68, вып. 1. – С. 101–108.
 24. Шульман, Г.А. Вырожденные ферми-газы заряженных частиц в квантовом магнитном поле / Г.А. Шульман // *Изв. вузов. Физика*. – 1991. – № 9. – С. 5–9.
 25. Шульман, Г.А. Подавление вырождения ферми-газов заряженных частиц в сильном магнитном поле / Г.А. Шульман // *Изв. вузов. Физика*. – 1992. – № 6. – С. 85–90.
 26. Шульман, Г.А. Конденсация заряженных частиц газа Бозе-Эйнштейна в квантовом магнитном поле / Г.А. Шульман // *Изв. вузов. Физика*. – 1992. – № 12. – С. 73–77.

27. Шульман, Г.А. Термодинамические величины газа Бозе-Эйнштейна в квантовом пределе сверхсильного магнитного поля вблизи критической температуры / Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1993. – № 1. – С. 51–55.
28. Секержицкий, В.С. К вопросу о влиянии квантующего магнитного поля на характеристики протонного газа / В.С. Секержицкий // Изв. вузов. Физика. – 1993. – № 1. – С. 125–126.
29. Шульман, Г.А. Энергия Ферми и заполнение энергетических подполос релятивистского вырожденного электронного газа в квантующем магнитном поле / Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1993. – № 9. – С. 3–7.
30. Липовецкий, С.С. Электронно-нуклонное вещество сверхплотной звезды с замороженным магнитным полем / С.С. Липовецкий, В.С. Секержицкий // Астрон. ж. – 1993. – Т. 70, вып. 6. – С. 1296–1302.
31. Шульман, Г.А. Заселенность дискретных энергетических уровней Ландау заряженными частицами вырожденных замагниченных ферми-газов / Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1994. – № 1. – С. 9–13.
32. Шульман, Г.А. Подавление идеальности вырожденных ферми-газов заряженных частиц в квантовом пределе сверхсильного магнитного поля / Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1994. – № 1. – С. 102–106.
33. Секержицкий, В.С. К вопросу о магнетизме релятивистского ферми-газа / В.С. Секержицкий // Изв. вузов. Физика. – 1994. – № 1. – С. 37–38.
34. Дементей, Ю.И. Об уравнении состояния электронно-нуклонного вещества сверхплотной магнитной звезды / Ю.И. Дементей, В.С. Секержицкий, И.В. Секержицкий // Астрон. ж. – 1996. – Т. 73, № 6. – С. 930–933.
35. Шульман, Г.А. Поляризация электронов в нерелятивистском невырожденном замагниченном электронном газе / Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1997. – № 2. – С. 14–19.
36. Секержицкий, В.С. Холодный плотный водород в сильном магнитном поле / В.С. Секержицкий // Изв. вузов. Физика. – 1997. – № 10. – С. 57–59.
37. Иванов, М.А. Термодинамические характеристики невырожденных ферми- и бозе-газов в сильном магнитном поле / М.А. Иванов, В.С. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. – 1998. – № 2. – С. 31–38.
38. Гордеев, Д.В. Об энергетических характеристиках газа взаимодействующих нейтронов в магнитном поле / Д. В. Гордеев, И. В. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. – 1998. – № 4. – С. 26–29.

39. Шульман, Г.А. Энергия поляризованного магнитным полем невырожденного нерелятивистского электронного газа. I / Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1998. – № 11. – С. 97–101.
40. Шульман, Г.А. Энергия поляризованного магнитным полем невырожденного нерелятивистского электронного газа. II / Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1999. – № 2. – С. 46–49.
41. Шульман, Г.А. Диамагнетизм Ландау и определение продольной и поперечной составляющих средней кинетической энергии нерелятивистского невырожденного электронного газа / Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1999. – № 2. – С. 50–55.
42. Иванов, М.А. К вопросу о термодинамических характеристиках крайне вырожденного релятивистского ферми-газа в магнитном поле / М.А. Иванов, В.С. Секержицкий, И.В. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. – 1999. – № 2. – С. 37–40.
43. Масленников, В.О. Диамагнетизм Ландау и определение продольной и поперечной составляющих кинетической энергии вырожденного нерелятивистского электронного газа / В.О. Масленников, Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1999. – № 7. – С. 31–35.
44. Шульман, Г.А. Диамагнетизм Ландау, парамагнетизм Паули и рождение электронно-позитронных пар в невырожденной нерелятивистской плазме / Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1999. – № 11. – С. 68–71.
45. Секержицкий, В.С. О влиянии ядерного псевдомагнитного поля на характеристики нейтронного газа / В.С. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. – 2000. – № 2. – С. 37 – 39.
46. Масленников, В.О. Поляризация магнитным полем частиц невырожденного нерелятивистского нейтронного газа / В.О. Масленников, Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 2000. – № 4. – С. 39–43.
47. Масленников, В.О. Качественная оценка составляющих кинетической энергии продольного непрерывного движения замагниченных нерелятивистских электронов в пределах уровня Ландау / В.О. Масленников, Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 2000. – № 6. – С. 31–35.
48. Гордеев, Д. В. О влиянии ядерного псевдомагнитного поля на свойства электронно-нуклонного вещества / Д.В. Гордеев, В.С. Секержицкий, И. В. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. – 2000. – № 4. – С. 46–50.
49. Бисноватый-Коган, Г.С. Эволюция функции распределения электронов и спектра их излучения в магнитном поле / Г.С. Бисноватый-Коган, О.В. Шорохов // Астрон. ж. – 2000. – Т. 77, № 9. – С. 703–712.
50. Масленников, В.О. Распределение электронов по энергиям в поляризованном магнитным полем нерелятивистском невырожденном газе /

- В.О. Масленников, Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 2000. – № 12. – С. 72–75.
51. Секержицкий, В.С. К вопросу о поляризации ферми-газов и уравнении состояния сверхплотного замагниченного водорода / В.С. Секержицкий, И.В. Секержицкий, А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ун-та. – 2000. – № 6. – С. 70–78.
 52. Масленников, В.О. Диамагнетизм Ландау, парамагнетизм Паули и определение продольной и поперечной составляющих кинетической энергии вырожденного нерелятивистского электронного газа / В.О. Масленников, А.Н. Панкратьева, Г.А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 2001. – № 1. – С. 74–77.
 53. Секержицкий, В.С. К вопросу о вычислении термодинамических характеристик невырожденных ферми-газов в магнитном поле / В.С. Секержицкий, А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ун-та. – 2001. – № 2. – С. 79–81.
 54. Серый, А.И. К вопросу о поляризации компонентов электронно-протонного вещества в магнитном поле / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ун-та. – 2001. – № 6. – С. 52–58.
 55. Секержицкий, В.С. О связи термодинамических характеристик невырожденных ферми-газов в магнитном поле со степенью их поляризации / В.С. Секержицкий, А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ун-та. – 2002. – № 2. – С. 59–63.
 56. Секержицкий, В.С. Термодинамические характеристики горячих идеальных нерелятивистских ферми-газов в магнитном поле / В.С. Секержицкий, И.В. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. – 2002. – № 6. – С. 63–70.
 57. Иванов, М.А. π -мезонные пары в магнитном поле при высоких температурах / М.А. Иванов, А.Н. Привальчук, В.С. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2003. – № 2 (34). – С. 40–43.
 58. Привальчук, А.Н. Термодинамические характеристики горячего идеального нерелятивистского бозе-газа в магнитном поле / А. Н. Привальчук, В.С. Секержицкий, И.В. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2003. – № 2 (34). – С. 44–47.
 59. Иванов, М.А. Термодинамические характеристики нерелятивистских мюонных пар в магнитном поле / М.А. Иванов, В.С. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2003. – № 3 (36). – С. 36–40.
 60. Иванов, М.А. Устойчивость горячих равновесных конфигураций с сильным магнитным полем по отношению к рождению μ -мезонных

- пар / М.А. Иванов, С. С. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прырода-знаўчых навук. – 2003. – № 3 (36). – С. 41–47.
61. Ганчук, Г.Г. Показатель изэнтропы излучения и мезонных пар горячего вещества звезд в присутствии сильного магнитного поля / Г.Г. Ганчук, М.А. Иванов, С.С. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2005. – № 1 (22). – С. 43–52.
 62. Ivanov, M.A. The index of isoentropie of radiation and meson pairs of hot matter by magnetic field spontaneous induction / M.A. Ivanov // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага універсітэта імя А.С. Пушкіна. – 2005. – Т. 1, ч. 2. – С. 51 – 60.
 63. Секержицкий, В.С. Термодинамические параметры электронно-нуклонного вещества в магнитном поле / В.С. Секержицкий, И.В. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2005. – № 2 (23). – С. 60–66.
 64. Секержицкий, В.С. Мюонные и пионные пары в магнитном поле / В.С. Секержицкий, С.С. Секержицкий // Веснік Брэсцкага ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2007. – № 2 (29). – С. 52–59.
 65. Секержицкий, В.С. Невырожденные ферми- и бозе-газы в магнитном поле / В.С. Секержицкий // Вучоныя запіскі Брэсцкага дзяржаўнага універсітэта імя А.С. Пушкіна. – 2007. – Т. 3, ч. 2. – С. 67–76.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Паули, В. Квантовые теории магнетизма. Магнитный электрон / В. Паули // Труды по квантовой теории. – М. : Наука, 1977. – С. 34.
2. Ландау, Л.Д. Диамагнетизм металлов / Л.Д. Ландау // Собрание трудов. – М. : Наука, 1969. – Т. 1. – С. 47–55.
3. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – 2-е изд., исправл. и доп. – М. : Наука, 1977. – 552 с. : ил.
4. Секержицкий, В.С. Сверхплотное вещество в магнитном поле / В.С. Секержицкий. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2002. – 180 с. : ил.
5. Секержицкий, В.С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В.С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с. : ил.
6. Ландау, Л.Д. Статистическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1976. – Ч. 1. – 584 с. : ил.
7. Вонсовский, С.В. Магнетизм микрочастиц / С.В. Вонсовский. – М. : Наука, 1973. – 280 с. : ил.
8. Саакян, Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г.С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с. : ил.
9. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : ГИФМЛ, 1963. – 1100 с. : ил.
10. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М. : Наука, 1973. – 228 с. : ил.
11. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы и формулы / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1977. – 832 с. : ил.
12. Шкловский, И.С. Сверхновые звезды и связанные с ними проблемы / И.С. Шкловский. – М. : Наука, 1976. – 440 с. : ил.