А. А. Трофимук, Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах, *Тр. ИММ УрО РАН*, 2013, том 19, номер 3, 304–307

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 19 № 3 2013

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С БИЦИКЛИЧЕСКИМИ СИЛОВСКИМИ ПОДГРУППАМИ В ФИТТИНГОВЫХ ФАКТОРАХ

А. А. Трофимук

Получены оценки производной длины, нильпотентной длины и p-длины конечной разрешимой группы G, у которой силовские подгруппы в факторах цепочки $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ нормальных в G подгрупп являются бициклическими, т.е. факторизуются двумя циклическими подгруппами. Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, а $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. В частности, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5, нильпотентная длина группы G не превышает 4, а p-длина группы G не превышает 2 для любого простого числа p.

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, подгруппа Фраттини, подгруппа Фиттинга, производная длина, нильпотентная длина, p-длина, A_4-свободная группа.

A. A. Trofimuk. Finite groups with bicyclic Sylow subgroups in Fitting factors.

Estimates of the derived length, nilpotent length, and p-length are obtained for a finite solvable group G in which Sylow subgroups in factors of the chain $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$ of subgroups normal in G are bicyclic, i.e., are factorized by two cyclic subgroups. Here, $\Phi(G)$ is the Frattini subgroup of G and $F(G)$ is the Fitting subgroup of G. In particular, the derived length of $G/\Phi(G)$ is at most 5, the nilpotent length of G is at most 4, and the p-length of G is at most 2 for every prime p.

Keywords: finite solvable group, Frattini subgroup, Fitting subgroup, derived length, nilpotent length, p-length, A_4-free group.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. *Нормальным рядом* группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются *факторами* нормального ряда (1). Если силовские подгруппы в факторах циклические, то из теоремы Цассенхауза [1, теорема IV.2.11] вытекает сверхразрешимость группы G. В работе [2] получены оценки инвариантов (производной длины, нильпотентной длины и p-длины) разрешимой группы, обладающей нормальным рядом, силовские подгруппы в факторах которого являются бициклическими. Напомним, что *бициклической* называют группу, факторизуемую двумя циклическими подгруппами.

Хорошо известен следующий результат Бэра.

Теорема Бэра [1, с. 720; 3]. *Если в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп*

$$\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G) \tag{2}$$

такая, что G_i нормальна в G и $|G_{i+1}/G_i|$ является простым числом для всех i, то G сверхразрешима.

Здесь $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G, а $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. Легко проверить, что группа останется сверхразрешимой, если силовские подгруппы в факторах цепочки вида (2) будут циклическими.

Поэтому вполне естественно исследовать разрешимые группы, у которых силовские подгруппы в факторах цепочки вида (2) являются бициклическими. Нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — разрешимая группа. Предположим, что в G существует цепочка подгрупп вида (2) такая, что G_i нормальны в G и силовские подгруппы в факторах G_{i+1}/G_i являются бициклическими для всех i. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.*

2. *$l_p(G) \leq 2$ для всех простых чисел p.*

3. *Если группа G A_4-свободна, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 3.*

Здесь $l_p(G)$ — p-длина группы G. Напомним, что группа G называется *A_4-свободной*, если она не имеет секций, изоморфных знакопеременной группе A_4.

1. Вспомогательные результаты

Все обозначения и используемые определения соответствуют [1].

Обозначения некоторых конкретных групп: 1 — единичная группа; Z_n и D_n — циклическая и диэдральная группы порядка n соответственно; A_n и S_n — знакопеременная и симметрическая группы степени n соответственно.

Дисперсивной по Оре называют группу G порядка $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_m$, у которой имеется нормальный ряд

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$$

такой, что для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ фактор-группа G_i/G_{i-1} изоморфна силовской p_i-подгруппе группы G.

В доказательстве теоремы будут использоваться фрагменты теории формаций, см. [4; 5]. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация групп и G — группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ — *$\mathfrak{F}$-корадикал* группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначаются через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [5, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация — эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Лемма доказана.

Лемма 2 [1, теоремы II.6.14, II.8.27]. *Если H — подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1, GL(3,2), Z_2, Z_3, Z_7, Z_2 \times Z_2, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, [Z_7]Z_3\}$.*

Лемма 3. *Предположим, что в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида (2) такая, что G_i нормальны в G и силовские подгруппы в факторах G_{i+1}/G_i являются бициклическими для всех i. Тогда индексы максимальных подгрупп группы G, не содержащих подгруппу Фиттинга, являются простыми числами, квадратами простых чисел или равны 8.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уплотним цепочку (2) между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга до отрезка главного ряда группы G следующим образом. Пусть $\overline{N} = N/G_i$ содержится в подгруппе $\overline{G_{i+1}} = G_{i+1}/G_i \leq F(G)/G_i$ и является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы $\overline{G} = G/G_i$. Так как $\overline{G}$ разрешима, то $\overline{N}$ — элементарная абелева

p-подгруппа для некоторого простого числа $p \in \pi(G)$. Так как силовская p-подгруппа $(\overline{G_{i+1}})_p$ группы $\overline{G_{i+1}}$ бициклическая и $\overline{N}$ содержится в $(\overline{G_{i+1}})_p$, то по [2, лемма 2.1] либо $\overline{N}$ метациклическая порядка p или p^2, либо $|\overline{N}| = 8$. Заменяя в (2) отрезок $G_i \leq G_{i+1}$ на $G_i \leq N \leq G_{i+1}$ и повторяя эту процедуру нужное число раз, в итоге уплотним цепочку (2) до цепочки, факторы которой имеют порядки p, q^2 или 8.

Итак, можно считать, что факторы ряда (2) имеют порядки p, q^2 или 8. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая $F(G)$. Очевидно, что $\Phi(G) = G_0 \subseteq M$, а $G_m = F(G) \nsubseteq M$. Поэтому обязательно найдется такое i, что $G_i \subseteq M$, но $G_{i+1} \nsubseteq M$. Так как M — максимальная подгруппа группы G, то $G_{i+1}M = G$ и $|G : M| = |G_{i+1} : G_{i+1} \cap M|$. Поскольку $G_i \subseteq G_{i+1} \cap M$, то

$$|G_{i+1} : G_{i+1} \cap M| = \frac{|G_{i+1} : G_i|}{|G_{i+1} \cap M : G_i|}$$

и $|G : M|$ является простым числом, квадратом простого числа или 8. Лемма доказана.

Лемма 4 [6, лемма 12]. *Пусть H — неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(2, p)$, где p — простое число. Тогда $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.*

Лемма 5 [6, лемма 13]. *Если H — разрешимая A_4-свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, где p — простое число, то H метабелева.*

2. Доказательство теоремы

1. Вначале докажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}^4 \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и

$$\Phi(G/\Phi(G)) = G_0/\Phi(G) \subset G_1/\Phi(G) \subset \ldots \subset G_m/\Phi(G) = F(G/\Phi(G))$$

— отрезок нормального ряда фактор-группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $G_0 = \Phi(G)$, а по [1, теорема III.4.2] $G_m = F(G)$. Поэтому для произвольной подгруппы G_i, $i = \overline{0, m}$, верно, что $\Phi(G) \subseteq G_i \subseteq F(G)$. Поскольку

$$(G_{i+1}/\Phi(G))/(G_i/\Phi(G)) \simeq G_{i+1}/G_i,$$

то $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как по лемме 1 формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, то $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G) = 1$.

По [1, теорема III.4.5] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G, где $1 \leq i \leq k$. Поэтому по [1, теорема I.4.5] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы $\mathrm{Aut}(F_i)$. По [1, лемма I.9.6] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^k C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \leq i \leq k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = C_G(F) = F \quad \text{и} \quad G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = G/F.$$

Далее, F_i — элементарная абелева p_i-подгруппа, где p_i — простое число. Ясно, что для каждого i существует максимальная подгруппа M_i в группе G такая, что $G = [F_i]M_i$. Так как M_i не содержит F_i, то M_i не содержит F. Значит по лемме 3 порядок $|F_i|$ равен либо p_i, либо p_i^2, либо 8.

Поэтому возможны следующие варианты:

1) $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;

2) $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$;

3) $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3, p_i)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 4 $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$.

В третьем случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, 2)$, и из леммы 2 следует, что

$$G/C_G(F_i) \in \{1,\ Z_2,\ Z_3,\ Z_7,\ Z_2 \times Z_2,\ Z_4,\ D_8,\ S_3,\ A_4,\ S_4,\ [Z_7]Z_3\}.$$

Значит, $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A}^3 \subseteq \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Так как $\mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$ — формация, то $G/F \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, мы доказали, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Поскольку $F/\Phi(G)$ — абелева фактор-группа и

$$(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \simeq G/F,$$

то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^5$ и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5. Так как $G \in \mathfrak{N}^4$, то нильпотентная длина G не превышает 4.

2. Учитывая тот факт, что p-длина метанильпотентной группы не превышает 1, из включения $G \in \mathfrak{N}^4$ следует, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого числа p.

3. Пусть группа G является A_4-свободной. Тогда, повторяя доказательство основной части теоремы и используя лемму 5, получим, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$ и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^3$. Поэтому производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967. 793 S.
2. **Monakhov V.S., Trofimuk A.A.** On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups // Commun. in Algebra. 2011. Vol. 39, no. 9. P. 3178–3186.
3. **Baer R.** Supersolvable immersion // Can. J. Math. 1959. Vol 11. P. 353–369.
4. **Монахов В.С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
5. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
6. **Монахов В.С., Трофимук А.А.** О конечных разрешимых группах фиксированного ранга // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1123–1137.

Трофимук Александр Александрович
канд. физ.-мат. наук
Брестский гос. ун-т им. А.С. Пушкина
e-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Поступила 01.02.2013