Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (84), 2014

УДК 512.542

О конечных группах с ограниченными порядками небициклических силовских подгрупп некоторых факторов[1]

А.А. Трофимук

Бициклической называют группу, являющуюся произведением двух циклических подгрупп. Получены верхние оценки производной и нильпотентной длины разрешимой группы G, у которой небициклические силовские подгруппы факторов цепочки $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$, $G_i \lhd G$ имеют ограниченные порядки.

Ключевые слова: разрешимая группа, бициклическая группа, производная длина, нильпотентная длина.

Recall that a group is bicyclic if it is the product of two cyclic subgroups. The estimations of the derived length and the nilpotent length of solvable group G with restriction on orders of non-bicyclic Sylow subgroups of the factors chain $\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G)$, $G_i \lhd G$ are obtained.

Keywords: solvable group, bicyclic group, derived length, nilpotent length.

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1], [2].

Бициклической называют группу $G = AB$, являющуюся произведением двух циклических подгрупп A и B.

Группы с бициклическими силовскими подгруппами изучались в работе [3]. В частности, доказано, что производная длина таких разрешимых групп не превышает 6, а нильпотентная длина не превышает 4.

В.С. Монахов [4] установил, что если порядок разрешимой группы G не делится на $(n+1)$-е степени простых чисел, то производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает $3+n$. Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G.

Идеи работ [3] и [4] нашли применение в исследовании разрешимых групп, небициклические силовские подгруппы которых имеют ограниченные порядки. Так, в работе [5] для разрешимой группы G, у которой для каждого $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы либо бициклические, либо порядка p^3, доказано, что ее производная длина не превышает 6. Если же небициклические силовские подгруппы разрешимой группы имеют произвольный порядок, то доказано, что производная длина такой группы ограничена сверху значениями функций, зависящими от этих порядков.

Из результата Бэра [6, с. 720] следует сверхразрешимость разрешимой группы G, обладающей цепочкой подгрупп

$$\Phi(G) = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F(G),\ G_i \lhd G \qquad (1)$$

такой, что $|G_{i+1}/G_i|$ является простым числом для всех i. Здесь $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. Очевидно, что группа останется сверхразрешимой, если силовские подгруппы в факторах цепочки вида (1) будут циклическими.

В работе [7] исследовались разрешимые группы, у которых силовские подгруппы в факторах цепочки вида (1) бициклические. В частности, доказано, что производная длина фактор-группы такой группы по подгруппе Фраттини не превышает 5, а нильпотентная длина самой группы не превышает 4.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф13М-113).

В настоящей работе продолжено изучение разрешимых групп, у которых факторы цепочки вида (1) имеют заданные ограничения. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Зафиксируем натуральное число n. Пусть в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп (1) такая, что для каждого i и любого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа в G_{i+1}/G_i либо бициклическая, либо ее порядок делит p^n. Тогда нильпотентная длина G и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышают $\rho(n)+1$.*

Здесь $\rho(n)$ – максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп полной линейной группы $GL(n,\mathrm{P})$ над полем P. Значения $\rho(n)$ вычислены для всех n в работе [8, лемма 2.4]. Подставляя эти значения вместо $\rho(n)$ в теорему, получаем следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида (1) такая, что для каждого i и любого $p \in \pi(G)$ силовская p-подгруппа в G_{i+1}/G_i либо бициклическая, либо ее порядок делит p^n. Тогда:*

1) если $3 \le n \le 4$, то $d(G/\Phi(G))$ и $n(G) \le n+3$;
2) если $5 \le n \le 7$, то $d(G/\Phi(G))$ и $n(G) \le 8$;
3) если $8 \le n \le 9$, то $d(G/\Phi(G))$ и $n(G) \le n+1$;
4) если $10 \le n \le 17$, то $d(G/\Phi(G))$ и $n(G) \le 11$;
5) если $18 \le n \le 25$, то $d(G/\Phi(G))$ и $n(G) \le 12$;
6) если $26 \le n \le 33$, то $d(G/\Phi(G))$ и $n(G) \le 13$;
7) если $34 \le n \le 65$, то $d(G/\Phi(G))$ и $n(G) \le 14$;
8) если $n \ge 66$, то $d(G/\Phi(G))$ и $n(G) \le 5\log_9(n-2)+6{,}3$.

Здесь $d(G)$ и $n(G)$ – обозначения производной и нильпотентной длины разрешимой группы G, соответственно.

Замечание. Из следствия 1 вытекает, что при $n=3$ нильпотентная длина группы G не превышает 6. Эта оценка уточняется следствием 2.

Следствие 2. *Пусть в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида (1) такая, что для каждого i и каждого $p \in \pi(G)$ силовские p-подгруппы в факторах G_{i+1}/G_i являются либо бициклическими, либо имеют порядок p^3. Тогда нильпотентная длина группы G не превышает 4, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает* 6.

Разрешимые группы из работы [7] и группы, исследуемые в следствии 2, имеют различные верхние границы производной длины. Однако если порядки небициклических силовских подгрупп в факторах цепочки вида (1) ограничить кубами малых простых чисел $p \in \{2,3,5,11,17\}$, то можно сохранить верхнюю оценку производной длины $G/\Phi(G)$, равную 5.

Следствие 3. *Пусть в разрешимой группе G существует цепочка подгрупп вида (1) такая, что для каждого i силовские подгруппы в факторах G_{i+1}/G_i являются либо бициклическими, либо имеют порядок p^3, где $p \in \{2,3,5,11,17\}$. Тогда производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.*

Пример 1. Пусть E_{13^3} – элементарная абелева группа порядка 13^3, а K – экстраспециальная группа порядка 27. С помощью компьютерной системы GAP [9] найдена группа $G=[E_{13^3}]([K]SL(2,3))$ порядка 1 423 656. Подгруппа Фраттини $\Phi(G)=1$, производная длина группы G равна 6, а нильпотентная длина группы G равна 4. Кроме того, группа G обладает цепочкой подгрупп вида (1), факторы которой являются либо бициклическими, либо имеют порядок 13^3 и 3^3. Таким образом, полученные оценки производной и нильпотентной длины в следствии 2 являются точными. Кроме того, с помощью компьютерной системы GAP нетрудно установить существование группы $G_1=[E_{7^3}]([K]SL(2,3))$ порядка 222 264, обладающую теми же свойствами, что и группа G. Примеры групп G и G_1 объясняют отсутствие среди чисел $p \in \{2,3,5,11,17\}$ следствия 3 простых чисел 7 и 13.

Пример 2. Пусть E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3, S – экстраспециальная группа порядка 27, Q_8 – группа кватернионов порядка 8. С помощью системы компьютерной алгебры GAP найдена группа $G=[E_{7^3}]([S]Q_8)$ порядка $74088 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$. Подгруппа Фраттини $\Phi(G)=1$, производная длина группы G равна 5. Кроме того, группа G обладает цепочкой подгрупп вида (1), факторы которой являются либо бициклическими, либо имеют порядок 7^3 и 3^3. Таким образом, полученная оценка производной длины в следствии 3 является точной.

1. Вспомогательные результаты. В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1], [2]. Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторая формация групп и G – группа. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $\mathfrak{H}$-корадикал принадлежит формации $\mathfrak{F}$. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначают через $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{A}$ соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.*

Доказательство. Согласно [1, с. 36], произведение $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ является локальной формацией. Поскольку насыщенная формация и локальная формация – эквивалентные понятия, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Лемма 2 [10, лемма 7]. *Пусть G – разрешимая группа и k – натуральное число. Тогда и только тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^k$, когда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{k-1}$.*

Лемма 3 [10, лемма 12]. *Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда:*

1) если $n=2$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^4$;

2) если $n=3$, то $H \in \mathfrak{N}^3 \cap \mathfrak{A}^5$.

Лемма 4. [11, теорема 7.1] *Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \mathfrak{A}^2$.*

Лемма 5 [11, теорема 7.1]. *Если H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(3,p)$, где $p \in \{3,5,11,17\}$, то $H \in \mathfrak{A}^3$.*

2. Доказательство теоремы, следствия 2 и следствия 3.

1. *Общий этап доказательства для теоремы, следствия 2 и следствия 3.* Сначала докажем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}_1$, где $\mathfrak{F}_1$ одна из формаций $\{\mathfrak{A}^{\rho(n)}, \mathfrak{N}^3, \mathfrak{A}^4\}$. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$ и

$$\Phi(G/\Phi(G)) = G_0/\Phi(G) \subset G_1/\Phi(G) \subset \ldots \subset G_m/\Phi(G) = F(G/\Phi(G))$$

участок нормального ряда фактор-группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $G_0 = \Phi(G)$, а по теореме III.4.2 [6] $G_m = F(G)$. Поэтому для произвольной подгруппы G_i, $i=\overline{0,m}$, верно, что $\Phi(G) \subseteq G_i \subseteq F(G)$. Поскольку

$$(G_{i+1}/\Phi(G))/(G_i/\Phi(G)) \cong G_{i+1}/G_i,$$

то $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Так как по лемме 1 формация $\mathfrak{N}\mathfrak{F}_1$ насыщенна, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}_1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\Phi(G)=1$.

По теореме III.4.5 [6] подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп F_i группы G, где $1 \le i \le k$. Поэтому по теореме I.4.5 [6] для каждого F_i фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_i)$. По лемме I.9.6 [6] фактор-группа $G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i)$ изоморфна подгруппе прямого произведения групп $G/C_G(F_i)$, $1 \le i \le k$. Так как в разрешимой группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает со своим централизатором, то

$$\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = C_G(F) = F, \quad G/\bigcap_{i=1}^{k} C_G(F_i) = G/F.$$

Так $\Phi(G) = 1$, то цепочка (1) имеет вид

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{m-1} \subset G_m = F.$$

Пусть F_i – элементарная абелева подгруппа порядка $p_i^{m_i}$. Так как F_i содержится в F, то существует такая подгруппа G_k, $1 \le k \le m$, что F_i содержится в G_k, но F_i не содержится в G_{k-1}. Поэтому $F_i \cap G_{k-1} = 1$, $F_i G_{k-1}/G_{k-1} \subseteq G_k/G_{k-1}$ и F_i изоморфна подгруппе из силовской p_i- подгруппы $\overline{P}$ группы G_k/G_{k-1}. Согласно условию $\overline{P}$ является либо бициклической, либо не делится на p_i^{n+1}.

Пусть $\overline{P}$ бициклическая. Если $p_i > 2$, то $\overline{P}$ метациклическая, поэтому $|F_i| \le p_i^2$. Если $p_i = 2$, то $|F_i| \le 2^3$ по лемме 1 [3]. Пусть $\overline{P}$ – небициклическая подгруппа. Тогда $|F_i| \le p_i^n$.

Итак, в любом случае $m_i \le n$.

2. *Завершающий этап доказательства теоремы.* Пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{A}^{\rho(n)}$. Поскольку $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(m_i, p_i)$ и неприводимая группа вполне приводима, то из определения функции $\rho(n)$ получаем, что $\rho(m_i) \le \rho(n)$ и $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A}^{\rho(m_i)} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Таким образом, для каждого i фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{F}_1$. Так как $\mathfrak{F}_1$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{F}_1$. Значит, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^{\rho(n)}$ и нильпотентная длина группы G не превышает $\rho(n)+1$.

По лемме 2 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^{\rho(n)+1}$. Таким образом, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G))$ не превышает $\rho(n)+1$. Теорема доказана.

3. *Завершающий этап доказательства следствия 2.* Пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{N}^3$. Из условия следствия 2 следует, что порядок $|F_i|$ равен p_i, либо p_i^2, либо p_i^3.

Поэтому возможны следующие варианты:

1) $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$;

2) $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(2, p_i)$;

3) $\mathrm{Aut}(F_i)$ изоморфна группе $GL(3, p_i)$.

В первом случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ циклическая. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Во втором случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$ и по лемме 3 фактор-группа $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{F}_1$.

В третьем случае фактор-группа $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3, p_i)$ и из леммы 3 следует, что $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{F}_1$.

Так как $\mathfrak{F}_1$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{F}_1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}^4$ и нильпотентная длина группы G не превышает 4.

4. *Завершающий этап доказательства следствия 3.* Пусть $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{A}^4$. Из условия следствия 3 следует, что порядок F_i равен либо p_i, либо p_i^2, либо 2^3, либо 3^3, либо 5^3, либо 11^3, либо 17^3.

Если $|F_i| = p_i$, то $\mathrm{Aut}F_i$ изоморфна циклической группе порядка $p_i - 1$ и $G/C_G(F_i)$ – циклическая группа. Поэтому $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{F}_1$

Если $|F_i| = p_i^2$, тогда $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(2, p_i)$. По лемме 3 $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{F}_1$.

Если $|F_i| = 2^3$, тогда $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3,2)$. Из леммы 4 следует, что $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Если $|F_i| = p^3$, где $p \in \{3,5,11,17\}$, тогда $G/C_G(F_i)$ изоморфна неприводимой подгруппе полной линейной группы $GL(3,p)$. Из леммы 5 следует, что $G/C_G(F_i) \in \mathfrak{A}^3 \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Так как $\mathfrak{F}_1$ – формация, то $G/F \in \mathfrak{F}_1$. Поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. По лемме 2 $G/\Phi(G) \in \mathfrak{A}^5$. Таким образом, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

Литература

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

2. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа. – 2006.

3. Монахов, В.С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В.С. Монахов, Е.Е. Грибовская // Математические заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.

4. Монахов, В.С. Об индексах максимальных подгрупп конечных разрешимых групп / В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2004. – 43, № 4. – С. 411–424.

5. Монахов, В.С. Конечные группы с ограничениями на порядки некоторых силовских подгрупп / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2010. – № 5(62). – С. 127–132.

6. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.

7. Трофимук, А.А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах / А.А. Трофимук // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2013. – № 3(19). – С. 304–307.

8. Berkovich, Y. Solvable permutation groups of maximal derived length / Y. Berkovich // Algebra Colloquium. – 1997. – V. 4(2). – P. 175–186.

9. The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12 [Электронный ресурс]. – 2009. – Режим доступа : http://www.gap-system.org. Дата доступа : 30.02.2014.

10. Монахов, В.С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

11. Bloom, D. The subgroups of $PSL(3,q)$ for Odd q / D. Bloom // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 127, № 1. – P. 150–178.

Брестский государственный
университет им. А.С. Пушкина

Поступила в редакцию 03.03.2014