УДК 513.82

Н.В. Пугач, А.А. Юдов

ИССЛЕДОВАНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ГРУППОЙ ВРАЩЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА ${}^2R_4$ С ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМИ ГРУППАМИ СТАЦИОНАРНОСТИ

В работе рассматривается пространство ${}^2R_4$ – четырехмерное псевдоевклидово пространство нулевой сигнатуры. Исследуются однородные пространства с фундаментальной группой Ли *G* – группой Ли движений пространства ${}^2R_4$. Изучается класс таких пространств, имеющих в качестве группы стационарности четырехмерную подгруппу Ли группы Ли Н вращений пространства ${}^2R_4$. Среди однородных пространств такого вида находятся все редуктивные пространства. В алгебрах Ли этих редуктивных пространств находятся все редуктивные дополнения.

Введение

Работа посвящена исследованию геометрии однородных пространств. Редуктивные однородные пространства играют важную роль в геометрии, а именно: они находят применение в теории связностей в расслоенных пространствах. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л.К. Тутаев, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и другие. Большой вклад в развитие теории редуктивных пространств и их применение был сделан японскими математиками К. Номидзу и Ш. Кобаяси [1–2].

Значительный вклад в развитие теории применения редуктивных пространств внес эстонский геометр Ю. Лумисте [3], который доказал, что в расслоенном пространстве с однородным слоем *G/H* тогда и только тогда существует базовое расширение связности, когда пространство *G/H* редуктивно. В данной работе изучаются однородные пространства со структурной группой – группой Ли движений пространства ${}^2R_4$. Исследуются однородные пространства G/G_i, где G_i – четырехмерные подгруппы Ли группы Ли *H*. Такие пространства классифицированы с точностью до изоморфизма [4]. Для всех таких пространств решается вопрос об их редуктивности и в случае редуктивности находят все редуктивные дополнения. Для пространств такого вида, не являющихся редуктивными, доказывается их нередуктивность. Актуальность этих исследований следует также из того факта, что геометрия псевдоевклидовых пространств находит большое применение в теоретической физике.

Постановка задачи и метод исследования

Группа Ли *G* является полупрямым произведением группы Ли *H* стационарности точки пространства ${}^2\mathrm{R}_4$ и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства ${}^2\mathrm{R}_4$: $G = H \otimes T_4$.

Алгебра Ли $\overline{G}$ является полупрямой суммой алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли *H* и коммутативной алгебры Ли группы Ли T_4: $\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4$.

Рассмотрим связные подгруппы Ли группы Ли *G* движений пространства ${}^2R_4$. Все связные подгруппы Ли группы Ли G, с точностью до сопряженности, перечислены в работе [4].

Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G. Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной работе найдены все редуктивные однородные пространства вида G/G_i, где G_i – связная четырехпараметрическая подгруппа Ли группы Ли H вращений пространства ${}^2R_4$. Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства G/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли $\overline{G}$ и $\overline{G_i}$, затем находятся все двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно $ad\overline{G_i}$. Среди таких пространств находятся дополнительные к $\overline{G_i}$. Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i . Поскольку пространство G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i [5].

<u>Определение.</u> Однородное пространство H/G_i называется *редуктивным*, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}\,, \tag{1}$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, где $ad\overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G_i}$.

Для нахождения редуктивных дополнений используем следующий способ [5]. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 – базис алгебры Ли $\overline{G_i}$ группы Ли G_i, принадлежащей группе Ли H. Рассмотрим двумерное векторное подпространство m алгебры Ли $\overline{H}$, образованное векторами b_1, b_2, т. е. $m = \{b_1, b_2\}$. Для этого подпространства m потребуем выполнимость условия инвариантности относительно ada_i, I = 1, 2, 3, 4. Т. е. выполнимость условий:

$$[a_i, b_j] = \alpha_{j1}b_1 + \alpha_{j2}b_2,\ j = 1,2 \tag{2}$$

Систему (2) будем называть системой инвариантности пространства m или просто системой инвариантности. Раскладывая левую и правую части по базису i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10} [5] алгебры Ли $\overline{H}$, получим систему инвариантности в виде системы алгебраических уравнений. Пусть, например $b_j = \beta_{j5}i_5 + ... + \beta_{j10}i_{10}$. Элементарными преобразованиями можно от базиса $\{b_1, b_2\}$ перейти к базису $\{b_1', b_2'\}$ с более простыми коэффициентами β_{jk}. Для этого придется рассмотреть 15 случаев. При этом система инвариантности упростится. Пусть система инвариантности решена и в итоге получены двумерные пространства $m_1, ..., m_p$, инвариантные относительно $ad\overline{G_i}$. Среди этих пространств нужно выбрать такие, которые удовлетворяют условию (1). Такие пространства m_i и будут искомыми редуктивными дополнениями.

Нахождение редуктивных пространств H/G_i

Классификация всех связных подгрупп Ли группы Ли G имеется [4]. Рассмотрим четырехмерные подгруппы Ли группы Ли вращений пространства ${}^2R_4$. Будем задавать их соответствующими алгебрами Ли с помощью базисов этих алгебр. Существует с точностью до сопряженности 4 таких четырехмерных подалгебры Ли [4]:

$\overline{G_{36}} = \{i_6, i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$, $\overline{G_{37}} = \{i_6, i_9, i_5 - i_{10}, i_7 - i_8\}$, $\overline{G_{38}} = \{i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}$, $\overline{G_{39}} = \{i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}$.

Для нахождения инвариантных двумерных подпространств будем находить вначале двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно adi_6. Базис инвариантного подпространства будем задавать в следующем виде: $V=\{\lambda i_5+\mu i_6+\nu i_7+\sigma i_8+si_9+ti_{10};\quad ai_5+bi_6+ci_7+di_8+fi_9+gi_{10}\}$. Достаточно рассмотреть следующие 15 случаев:

В случае 1^0 инвариантные пространства ищем в виде $\{i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10} + \nu i_6 + \sigma i_9, i_7 + si_8 + ti_{10} + pi_6 + qi_9\}$. Система инвариантности принимает вид: $\nu\lambda + p\mu = 0$, $\nu s + pt = 0$, $\lambda^2 + s\mu = 1$, $\lambda s + st = 0$, $\lambda\sigma + q\mu = 0$, $\sigma s + qt = 0$, $\lambda\mu + t\mu = 0$, $\mu s + t^2 = 1$. Из четвертого и седьмого уравнения системы инвариантности следует, что достаточно рассмотреть следующие случаи:

$$\lambda = -t \qquad (1)$$
$$\mu = 0, s = 0 \qquad (2)$$

Пусть выполняется условие (1). Из пятого и шестого, а также первого и второго уравнения следует, что либо

$$\lambda t = \mu s, \qquad (3)$$

либо

$$\sigma = 0, q = 0, \nu = 0, p = 0 \qquad (4)$$

Предположим, что выполняется условие (1), (3), тогда отсюда следует $\lambda^2 + \mu s = 0$, что противоречит третьему уравнению системы инвариантности. Рассмотрим теперь (1), (4). Система инвариантности запишется в виде $\lambda^2 + \mu s = 1$, отсюда $\lambda = \pm\sqrt{1 - s\mu}$ и $1 - s\mu \geq 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5 \pm \sqrt{1 - s\mu}\, i_8 + \mu i_{10}, i_7 + si_8 \mp \sqrt{1 - s\mu}\, i_{10}\}$. Рассмотрим теперь случай (2) и (3); отсюда следует, что $\lambda t = 0$. Пусть $\lambda = 0$, тогда из третьего уравнения получаем противоречие. Пусть теперь выполняются условия (2) и (4), тогда система инвариантности примет вид $\lambda^2 = 1$, $t^2 = 1$, отсюда $\lambda = \pm 1$, $t = \pm 1$. Инвариантные пространства получим в виде: $\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}\}$, $\{i_5 \pm i_8, i_7 \mp i_{10}\}$.

В случае 2^0 инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_{10} + \nu i_6 + \sigma i_9, i_8 + si_{10} + ti_6 + pi_9\}$. Система инвариантности принимает вид: $\mu = 0$, $\sigma = 0$, $s = \lambda$, $t = 0$, $p = 0$, $\nu = 0$. Получаем инвариантное пространство в виде: $\{i_5+\lambda i_7, i_8+\lambda i_{10}\}$.

В случае 3^0 инвариантные пространства ищем в виде $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_8 + \nu i_6 + \sigma i_9, i_{10} + si_6 + ti_9\}$. Система инвариантности противоречива.

В случае 4^0 инвариантное пространство ищем в виде $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_8 + \nu i_{10} + \sigma i_9, i_6 + si_9\}$. Система инвариантности принимает вид: $\lambda\mu = \nu, \mu^2 = 1, \sigma\mu = 0, \nu\mu = \lambda$. Отсюда следует, $\mu = \pm 1, \sigma = 0, \nu = \pm\lambda$. Получаем инвариантные пространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 \pm i_8 \pm \lambda i_{10}, i_6 + si_9\}$.

В случае 5^0 инвариантные пространства ищем в виде $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_8 + \nu i_{10} + \sigma i_6, i_9\}$. Система инвариантности принимает вид: $\sigma\mu = 0, \lambda\mu = \nu, \mu^2 = 1, \mu\nu = \lambda$. Отсюда следует: $\mu = \pm 1, \sigma = 0, \nu = \pm\lambda$. Получаем инвариантные пространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 \pm i_8 \pm \lambda i_{10}, i_9\}$.

В случае 6^0 инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_7 + \lambda i_{10} + \mu i_6 + \nu i_9, i_8 + \sigma i_{10} + s i_6 + t i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

В случае 7^0 инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_7 + \lambda i_8 + \mu i_6 + \nu i_9, i_{10} + \sigma i_6 + s i_9\}$. Система инвариантности принимает вид: $\nu = 0$, $\sigma = 0$, $s = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = 0$. Получили инвариантное пространство в виде: $\{i_7, i_{10}\}$.

В случае 8^0 инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_7 + \lambda i_8 + \mu i_{10} + \nu i_9, i_6 + \sigma i_9\}$. Система инвариантности принимает вид $\lambda = 0, \mu\nu = 0, \mu^2 = 1$, отсюда следует, $\nu = 0, \mu = \pm 1$. Получили инвариантные пространства в виде: $\{i_7 \pm i_{10}, i_6 + \sigma i_9\}$.

В случае 9^0 инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_7 + \lambda i_8 + \mu i_{10} + \nu i_6, i_9\}$. Система инвариантности принимает вид: $\lambda = 0, \mu\nu = 0, \mu^2 = 1$, отсюда $\nu = 0, \mu = \pm 1$. Получили инвариантные пространства в виде: $\{i_7 \pm i_{10}, i_9\}$.

В случае 10^0 инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_8 + \lambda i_6 + \mu i_9, i_{10} + \nu i_6 + \sigma i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

В случае 11^0 инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_8 + \lambda i_{10} + \mu i_9, i_6 + \nu i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

В случае 12^0 инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_8 + \lambda i_{10} + \mu i_6, i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

В случае 13^0 инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_9, i_6 + \mu i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

В случае 14^0 инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_{10} + \lambda i_6, i_9\}$. Система инвариантности противоречива.

В случае 15^0 нужно проверить пространство $\{i_6, i_9\}$. Оно является инвариантным.

Таким образом получена следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> относительно *adi₆* инвариантны только следующие двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_5 \pm \sqrt{1 - s\mu} i_8 + \mu i_{10}, i_7 + s i_8 \mp \sqrt{1 - s\mu} i_{10}\}$, 2. $\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}\}$, 3. $\{i_5 \pm i_8, i_7 \mp i_{10}\}$,
4. $\{i_5 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_{10}\}$, 5. $\{i_5 + \lambda i_7 \pm i_8 \pm \lambda i_{10}, i_6 + s i_9\}$, 6. $\{i_5 + \lambda i_7 \pm i_8 \pm \lambda i_{10}, i_9\}$,
7. $\{i_7, i_{10}\}$, 8. $\{i_7 \pm i_{10}, i_6 + \sigma i_9\}$, 9. $\{i_7 \pm i_{10}, i_9\}$, 10. $\{i_6, i_9\}$.

При помощи преобразования Adh_9, где $h_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, вектор i_6 переходит в вектор i_9, i_5 в i_5, i_7 в $-i_8$, i_8 в $-i_7$, i_9 в i_6, i_{10} в i_{10}. Следовательно, мы можем найти инвариантные двумерные пространства для adi_9 как образы соответствующих инвариантных пространств для adi_6. Таким образом получается следующая теорема.

<u>Теорема 2.</u> Относительно оператора adi_9 инвариантны только следующие двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_5 \mp \sqrt{1-s\mu}i_7 + \mu i_{10}, -i_8 - si_7 \mp \sqrt{1-s\mu}i_{10}\}, 1-s\mu \geq 0$, 2. $\{i_5 \mp i_7, -i_8 \pm i_{10}\}$,
3. $\{i_5 \mp i_7, -i_8 \mp i_{10}\}$, 4. $\{i_5 - \lambda i_8, -i_7 + \lambda i_{10}\}$, 5. $\{i_5 - \lambda i_8 \mp i_7 \pm \lambda i_{10}, i_9 + si_6\}$,
6. $\{i_5 - \lambda i_8 \mp i_7 \pm \lambda i_{10}, i_6\}$, 7. $\{-i_8, i_{10}\}$, 8. $\{-i_8 \pm i_{10}, i_9 + \sigma i_6\}$, 9. $\{-i_8 \pm i_{10}, i_6\}$,
10. $\{i_6, i_9\}$.

Рассматривая аналогично оператор adi_5, приходим к следующей теореме

Теорема 3. Относительно оператора adi_5 инвариантны только следующие двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_6 + \lambda i_7 \pm \sqrt{t\lambda - 1}i_8, i_9 \pm \sqrt{t\lambda - 1}i_7 + ti_8\}$, $t\lambda - 1 \geq 0$ 2. $\left\{i_6 + \lambda i_9, i_7 - \frac{1}{\lambda}i_8\right\}$, $\lambda \neq 0$

3. $\{i_6, i_8\}$, 4. $\{i_9, i_7\}$, 5. $\{i_5, i_{10}\}$.

В пространстве ${}^2R_4$ существует принцип двойственности, согласно которому существует следующее соответствие между векторами базиса: $i_5 \to i_{10}$, $i_6 \to i_6$, $i_7 \to i_8$, $i_8 \to i_7$, $i_9 \to i_9$, $i_{10} \to i_5$. На основании принципа двойственности из теоремы 3 получим следующую теорему.

Теорема 4. Относительно оператора adi_{10} инвариантны только следующие двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_6 + \lambda i_8 \pm \sqrt{t\lambda - 1}i_7, i_9 \pm \sqrt{t\lambda - 1}i_8 + ti_7\}$, $t\lambda - 1 \geq 0$ 2. $\left\{i_6 + \lambda i_9, i_8 - \frac{1}{\lambda}i_7\right\}$, $\lambda \neq 0$

3. $\{i_6, i_7\}$, 4. $\{i_9, i_8\}$, 5. $\{i_5, i_{10}\}$.

Перейдем к новому базису $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ алгебры Ли $\overline{H}$ по формулам: $q_1 = i_6, q_2 = i_9, q_3 = i_5 + i_7, q_4 = i_8 + i_{10}, q_5 = i_5 - i_7, q_6 = i_8 - i_{10}$. Будем находить двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$ инвариантные относительно adq_5 в новом базисе, в котором системы инвариантности имеют более простой вид. Решая системы инвариантности, получим следующую теорему.

Теорема 5. Относительно оператора $ad(i_5 - i_7)$ инвариантны только следующие двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\left\{i_6 + \lambda i_9 + \sigma(i_8 - i_{10}), i_5 - i_7 + \frac{1}{\lambda}(i_8 - i_{10})\right\}$, 2. $\{i_6 + \sigma(i_5 - i_7), i_8 - i_{10}\}$,
3. $\{i_9 + \nu(i_8 - i_{10}), i_5 - i_7\}$, 4. $\{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$.

Отсюда на основании принципа двойственности получим следующую теорему.

Теорема 6. Относительно оператора $ad(i_8 - i_{10})$ инвариантны только следующие двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\left\{i_6 + \lambda i_9 + \sigma(i_7 - i_5), i_{10} - i_8 + \frac{1}{\lambda}(i_7 - i_5)\right\}$, 2. $\{i_6 + \sigma(i_{10} - i_8), i_7 - i_5\}$,
3. $\{i_9 + \nu(i_7 - i_5), i_{10} - i_8\}$, 4. $\{i_{10} - i_8, i_7 - i_5\}$.

Для оператора $ad(i_5 + i_{10})$ получим следующую теорему.

Теорема 7. Относительно оператора $ad(i_5 + i_{10})$ инвариантны только следующие двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_6 - i_9, i_7 + i_8\}$, 2. $\{i_6 + i_9 + \mu i_7 - \mu i_8 + \sigma i_{10}, i_5 + si_{10}\}$,

3. $\{i_6+i_9+\mu i_7-\mu i_8+\sigma i_5, i_{10}\}$, 4. $\{i_7-i_8+\mu i_{10}, i_5+\nu i_{10}\}$, 5. $\{i_7-i_8+\mu i_5, i_{10}\}$,
6. $\{i_5, i_{10}\}$.

При помощи преобразования Adg_4, где $g_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, вектор i_5 переходит в вектор i_5, i_6 в i_6, i_7 в $-i_7$, i_8 в i_8, i_9 в $-i_9$, i_{10} в $-i_{10}$. Следовательно, мы можем найти инвариантные двумерные пространства для $ad(i_5-i_{10})$ как образы соответствующих инвариантных пространств для $ad(i_5+i_{10})$. Таким образом, получим следующую теорему.

Теорема 8. Относительно оператора $ad(i_5-i_{10})$ инвариантны только следующие двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_6+i_9, i_8-i_7\}$, 2. $\{i_6-i_9-\mu i_7-\mu i_8-\sigma i_{10}, i_5-si_{10}\}$,
3. $\{i_6-i_9-\mu i_7-\mu i_8+\sigma i_5, -i_{10}\}$, 4. $\{-i_8-i_7-\mu i_{10}, i_5-\nu i_{10}\}$, 5. $\{-i_7-i_8+\mu i_5, -i_{10}\}$,
6. $\{i_5, -i_{10}\}$.

Перейдем к новому базису $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ алгебры Ли $\overline{H}$ по формулам: $p_1=i_5, p_2=i_{10}, p_3=i_6+i_9, p_4=i_6-i_9, p_5=i_5-i_7, p_6=i_5-i_7-i_8+i_{10}$. Будем находить двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно adp_3 в новом базисе, в котором системы инвариантности имеют более простой вид. Решая системы инвариантности, получим следующую теорему.

Теорема 9. Относительно оператора $ad(i_6+i_9)$ инвариантны только следующие двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\left\{i_5-i_{10}), i_5-i_7+\frac{1}{2}(i_8-i_{10})\right\}$,
2. $\left\{(1+\sigma)i_5+(\mu+\nu)i_6-\sigma(i_7+i_8)+(\mu-\nu)i_9+(1+\sigma)i_{10}, i_5-i_7+\frac{1}{2}(i_8-i_{10})\right\}$,
3. $\{(1+\sigma)i_5+\nu i_6-\sigma(i_7+i_8)-\nu i_9+(1+\sigma)i_{10}, ti_5+(1+s)i_6-t(i_7+i_8)+(1-s)i_9+ti_{10})\}$,
4. $\{(1+\sigma)i_5+\nu i_6-\sigma(i_7+i_8)-\nu i_9+(1+\sigma)i_{10}, si_5+i_6-s(i_7+i_8)-i_9+si_{10})\}$,
5. $\{i_5+(\nu+\sigma)i_6+(\nu-\sigma)i_9+i_{10}, i_5-i_7-i_8+i_{10}\}$,
6. $\left\{i_5-i_7+\frac{1}{2}(i_8-i_{10}), ti_5+(1+s)i_6-t(i_7+i_8)+(1-s)i_9+ti_{10})\right\}$,
7. $\left\{i_5-i_7+\frac{1}{2}(i_8-i_{10}), i_6+i_9+s(i_5-i_7-i_8+i_{10})\right\}$, 8. $\{i_5-i_7, i_5-i_7-i_8+i_{10}\}$,
9. $\{i_6+i_9+\lambda(i_5-i_7-i_8+i_{10}), i_6-i_9+s(i_5-i_7-i_8+i_{10})\}$,
10. $\{(1+\lambda)i_6+(1-\lambda)i_9, i_5-i_7-i_8+i_{10}\}$, 11. $\{i_6+i_9, i_5-i_7-i_8+i_{10}\}$.

При помощи преобразования Adh_{11}, где $h_{11}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, вектор i_5 переходит в вектор i_5, i_6 в i_8, i_7 в i_9, i_8 в $-i_6$, i_9 в $-i_7$, i_{10} в i_{10}. Следовательно, мы можем найти инвариантные двумерные пространства для $ad(i_7 - i_8)$ как образы соответствующих инвариантных пространств для $ad(i_6 + i_9)$. Таким образом, получим следующую теорему.

Теорема 10. Относительно оператора $ad(i_7 - i_8)$ инвариантны только следующие двумерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\left\{i_5 - i_{10}), i_5 - i_9 + \frac{1}{2}(-i_6 - i_{10})\right\}$,
2. $\left\{(1+\sigma)i_5 + (\mu+\nu)i_8 - \sigma(i_9 - i_6) - (\mu-\nu)i_7 + (1+\sigma)i_{10}, i_5 - i_9 + \frac{1}{2}(-i_6 - i_{10})\right\}$,
3. $\{(1+\sigma)i_5 + \nu i_8 - \sigma(i_9 - i_6) + \nu i_7 + (1+\sigma)i_{10}, ti_5 + (1+s)i_8 - t(i_9 - i_6) - (1-s)i_7 + ti_{10}\}$,
4. $\{(1+\sigma)i_5 + \nu i_8 - \sigma(i_9 - i_6) + \nu i_7 + (1+\sigma)i_{10}, si_5 + i_8 - s(i_9 - i_6) + i_7 + si_{10}\}$,
5. $\{i_5 + (\nu+\sigma)i_8 - (\nu-\sigma)i_7 + i_{10}, i_5 - i_9 + i_6 + i_{10}\}$,
6. $\left\{i_5 - i_9 + \frac{1}{2}(-i_6 - i_{10}), ti_5 + (1+s)i_8 - t(i_9 - i_6) - (1-s)i_7 + ti_{10}\right\}$,
7. $\left\{i_5 - i_9 + \frac{1}{2}(-i_6 - i_{10}), i_8 - i_7 + s(i_5 - i_9 + i_6 + i_{10})\right\}$, 8. $\{i_5 - i_9, i_5 - i_9 + i_6 + i_{10}\}$,
9. $\{i_8 - i_7 + \lambda(i_5 - i_9 + i_6 + i_{10}), i_8 + i_7 + s(i_5 - i_9 + i_6 + i_{10})\}$,
10. $\{(1+\lambda)i_8 - (1-\lambda)i_7, i_5 - i_9 + i_6 + i_{10}\}$, 11. $\{i_8 - i_7, i_5 - i_9 + i_6 + i_{10}\}$.

Вернемся к вопросу редуктивности четырехмерных подалгебр. Рассмотрим подалгебру $\overline{G_{36}} = \{i_6, i_9, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$. Тогда из теоремы 5 и теоремы 6 следует, что для $ad(i_5 - i_7)$ и $ad(i_8 - i_{10})$ инвариантным является только следующее двумерное пространство $\{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$, которое не является дополнительным к алгебре $\overline{G_{36}}$. Следовательно, получена теорема.

Теорема 11. Однородное пространство H/G_{36} не является редуктивным.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G_{37}} = \{i_6, i_9, i_5 - i_{10}, i_7 - i_8\}$. Из теоремы 8 и теоремы 1 следует, что для $ad(i_5 - i_{10})$ и adi_6 одновременно инвариантным является только следующее двумерное пространство $\{i_5 + i_{10}, i_7 + i_8\}$, которое является дополнительным к алгебре $\overline{G_{37}}$. Это же пространство инвариантно и относительно adi_9, и $ad(i_7 - i_8)$. Следовательно, получена теорема.

Теорема 12. Однородное пространство H/G_{37} является редуктивным. Единственным редуктивным дополнением $\overline{G_{37}}$ в алгебре Ли $\overline{H}$ является подпространство $\{i_5 + i_{10}, i_7 + i_8\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G_{38}} = \{i_5 - i_7, i_5 - i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}$. Из теоремы 5 и теоремы 8 следует, что у операторов $ad(i_5 - i_7)$ и $ad(i_5 - i_{10})$ нет общих инвариантных двумерных подпространств алгебры Ли $\overline{H}$. Поэтому алгебра Ли $\overline{G_{38}}$ не имеет в алгебре Ли $\overline{H}$ редуктивных дополнений. Таким образом, получим теорему.

Теорема 13. Однородное пространство H/G_{38} не является редуктивным.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G_{39}} = \{i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}$. Из теоремы 3 и теоремы 4 следует, что для adi_5 и adi_{10} одновременно инвариантным является только следующее двумерное пространство $\{i_6 - i_9, i_7 + i_8\}$, которое является дополнительным к алгебре $\overline{G_{39}}$. Это же пространство инвариантно и относительно $ad(i_6 + i_9)$, и $ad(i_7 - i_8)$. Следовательно, получена теорема.

Теорема 14. Однородное пространство H/G_{39} является редуктивным. Единственным редуктивным дополнением $\overline{G_{39}}$ в алгебре Ли $\overline{H}$ является подпространство $\{i_6 - i_9, i_7 + i_8\}$.

Итоги исследований подведем в виде следующей теоремы.

Теорема 15. Однородные пространства H/G_{37}, H/G_{39} являются редуктивными. Редуктивным дополнением в алгебре Ли $\overline{H}$ для подалгебры Ли $\overline{G_{37}}$ является только пространство $\{i_5 + i_{10}, i_7 + i_8\}$, для подалгебры Ли $\overline{G_{39}}$ только пространство $\{i_6 - i_9, i_7 + i_8\}$. Одномерные пространства H/G_{36}, H/G_{38} не являются редуктивными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 1. – 343 с.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.

3. Лумисте, Ю. Связности в главных расслоениях / Ю. Лумисте // I респ. конф. математиков Беларуси : науч. тр. – Минск, 1965. – С. 247–258.

4. Юдов, А.А. Подгруппы группы движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры / А.А. Юдов // Вестник Белорусского ун-та. Сер. 1. 1977. – № 1. – С. 16–21.

5. Пугач, Н.В. Исследование однородных пространств со структурной группой G движений пространства ${}^2R_4$ / Н.В. Пугач // Информационные технологии управления в экономике – 2006 : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 25–26 апреля 2006 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. С.А. Тузика, редкол. : В.Я. Асанович [и др.]. – Брест, 2006. – С. 125–128.

6. Троцюк, С.А. О редуктивных однородных пространствах, связанных с группой движений пространства ${}^2R_4$ / С.А. Троцюк // Информационные технологии управления в экономике – 2005 : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–26 мая 2005 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. С.А. Тузика, редкол. : В.Я. Асанович [и др.]. – Брест, 2005. – С. 83–85.

N.V. Pugach, A.A. Yudov. **Research and Classification of Reduction Homogeneous Spaces with Group of Rotations of Space ${}^2R_4$ with Four-dimensional Groups of Stationarity**

Four-dimensional sub-groups of group *G* of rotation of space ${}^2R_4$ and corresponding homogeneous spaces are viewed in the article. Homogenous spaces with fundamental *G* – group of motions of 4 – dimension pseudoeuclidous space ${}^2R_4$ are being dealt with. Among all these homogenous spaces reduction homogenous spaces exist.