УДК 512.542

В.С. Монахов, А.А. Трофимук

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ПОДГРУППЫ ШМИДТА КОТОРЫХ ИМЕЮТ ПОРЯДКИ, СВОБОДНЫЕ ОТ КУБОВ

Натуральное число n называется свободным от кубов, если p^3 не делит n для всех простых p. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Поскольку группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в каждой ненильпотентной группе, то свойства заключенных в группе подгрупп Шмидта оказывают существенное влияние на строение самой группы. Исследуется строение конечных групп с ограниченными порядками подгрупп Шмидта. Изучены бипримарные подгруппы произвольных конечных групп с подгруппами Шмидта порядков, свободных от кубов. Для разрешимых групп установлено строение бипримарных холловых подгрупп. Приведены примеры как разрешимых, так и неразрешимых групп, у которых все подгруппы Шмидта имеют порядки, свободные от кубов.

Рассматриваются только конечные группы. Напомним, что число n называется свободным от квадратов или от кубов, если соответственно p^2 или p^3 не делит n для всех простых p.

В 1924 году О.Ю. Шмидт [1] исследовал строение конечной ненильпотентной группы, у которой все собственные подгруппы нильпотенты. Такие группы впоследствии стали называть группами Шмидта или минимальными ненильпотентными группами. В своей работе О.Ю. Шмидт доказал, что группа Шмидта бипримарна (т. е. ее порядок делится точно на два различных простых числа), одна из силовских подгрупп нормальна, а другая циклическая, и указал систему индексов главного ряда группы Шмидта.

В дальнейшем $S_{<p,q>}$-группой будем называть группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой. Для $S_{<p,q>}$-группы S будем использовать запись $S=[P]Q$, где P – нормальная силовская p-подгруппа, а Q – циклическая ненормальная силовская q-подгруппа.

Подробный обзор результатов о группах Шмидта и их приложениях в теории конечных групп имеется в работе В.С. Монахова [2].

Поскольку группы Шмидта присутствуют в качестве подгруппы в каждой ненильпотентной группе, то они являются универсальными подгруппами конечных групп. Свойства заключенных в группе подгрупп Шмидта оказывают существенное влияние на строение всей группы. Изучению строения конечных групп по свойствам подгрупп Шмидта посвящены, например, работы Я.Г. Берковича, В.А. Ведерникова, В.Д. Мазурова, В.С. Монахова (см. литературу в обзоре [2]).

В 1995 г. В.С. Монахов [3] исследовал строение групп, у которых все подгруппы Шмидта сверхразрешимы. Отсюда следует описание конечных групп, подгруппы Шмидта которых имеют порядки, свободные от квадратов.

Развивая эту тематику, мы исследуем конечные группы с подгруппами Шмидта порядков, свободных от кубов. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть в группе G все подгруппы Шмидта имеют порядки, свободные от кубов. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Для каждой пары простых чисел $\{s,r\}\neq\{2,3\}$ из $\pi(G)$, таких, что $s>r$, все $\{s, r\}$-подгруппы группы G являются s-замкнутыми, а для r, не делящего s^2-1, нильпотентными.

2) Множество подгрупп Шмидта в группе G исчерпывается следующими подгруппами:

2.1) $S_{<p,q>}$-подгруппами, $[Z_p]Z_{q^i}$, $i\in\{1, 2\}$, где q делит $p-1$;

2.2) $S_{<p,q>}$-подгруппами, $[E_{p^2}]Z_{q^i}$, $i\in\{1, 2\}$, где q делит $p+1$, $q>2$.

3) Если в группе G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп, q делит $p-1$, для всех $p,q\in\pi(G)$, то:

3.1) группа G 2-замкнута;

3.2) $\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна;

3.3) $2'$-холлова подгруппа дисперсивна по Оре;

3.4) $3'$-холлова подгруппа 2-разложима и дисперсивна по Оре;

3.5) $\{s, r\}$-холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел $s>r>2$, r не делит $s+1$.

4) Если в группе G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп, q делит $p+1$, для всех $p,q\in\pi(G)$, $q>2$, то:

4.1) группа G дисперсивна по Оре;

4.2) $\{s, r\}$-холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел $s>r$, r не делит $s-1$.

Напомним наиболее часто встречающиеся обозначения и определения. Дополнением к подгруппе A в группе G называется такая подгруппа B, что $AB=G$ и $A\cap B=1$. Если в группе имеется дополнение к силовской p-подгруппе, то это дополнение называют p-дополнением. Группу с нормальной силовской p-подгруппой называют p-замкнутой. Группа с нормальным p-дополнением называется p-нильпотентной группой. Циклическая группа порядка n обозначается через Z_n. Запись $G=[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A. Из теоремы 1 статьи [1] О.Ю. Шмидта следует, что любая $S_{<p,q>}$-группа имеет ранг m, где m – показатель числа p по модулю q. Через G' обозначается коммутант группы G.

Говорят, что группа G дисперсивна, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Дисперсивной по Оре называется группа G порядка

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n},\ p_1>p_2>\dots>p_n,$$

у которой для каждого $i\in\{1,2,\dots,n\}$ имеется нормальная подгруппа порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$. Дисперсивная по Оре группа G p-замкнута для наибольшего $p\in\pi(G)$ и q-нильпотентна для наименьшего $q\in\pi(G)$.

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие леммы.

Лемма 1. ([2, теорема 2.1]) Если группа не p-нильпотентна, то в ней существует $S_{<p,q>}$-подгруппа для некоторого q.

Лемма 2. Если $\{p,q\}$-группа не q-замкнута, то в ней существует $S_{<p,q>}$-подгруппа.

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 1.

Лемма 3.([2, теорема 2.4]) В любой не 2-замкнутой группе существует 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта.

Лемма 4. Пусть $S=[P]Q$ – группа Шмидта, где P – нормальная силовская p-подгруппа, Q – ненормальная силовская q-подгруппа, p, q – различные простые числа. Тогда:

1) Если q делит $p-1$, то $P\cong Z_p$;

2) Если q не делит $p-1$, но делит $p+1$, то либо $P\cong E_{p^2}$, либо P – неабелева группа порядка p^3;

3) Если q не делит p^2-1, то порядок S делится на куб простого числа p.

В частности, если порядок группы S свободен от кубов, то либо $S=\lfloor Z_p \rfloor Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, либо $S=\lfloor E_{p^2} \rfloor Z_{q^i}$, где q делит $p+1$, $q>2$, $i = 1, 2$.

Доказательство.

Пусть m – показатель числа p по модулю q.

1) Если q делит $p-1$, то $m=1$ и по теореме 1.1 [2] $P\cong Z_p$.

2) Если q не делит $p-1$, но делит $p+1$, то $m=2$, и по теоремам 1.1–1.3 [2] либо $P\cong E_{p^2}$, либо P – неабелева группа порядка p^3 экспоненты p или 4.

3) Пусть q не делит p^2-1. Тогда $m\geq 3$ и порядок S делится на куб простого числа p.

Если порядок группы S свободен от кубов, то возможны только случаи (1) и (2). Поэтому либо $S=\lfloor Z_p \rfloor Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, либо $S=\lfloor E_{p^2} \rfloor Z_{q^i}$, где q делит $p+1$, $q>2$, $i = 1, 2$.

Лемма 5. Пусть G – группа, порядки подгрупп Шмидта которой свободны от кубов. Если H – подгруппа группы G, то порядки подгрупп Шмидта группы H также свободны от кубов.

Доказательство очевидно.

Лемма 6. Если порядки всех подгрупп Шмидта группы G свободны от кубов и $p\in\pi(G)\backslash\{2, 3\}$, то любая $\{2, p\}$-подгруппа группы G является p-замкнутой.

Доказательство. Пусть H – $\{2, p\}$-подгруппа группы G и $p\in\pi(G)\backslash\{2, 3\}$. Если группа H не p-замкнута, то по лемме 2 в ней существует 2-замкнутая подгруппа Шмидта S. По условию ее порядок должен быть свободен от кубов. По лемме 4 простое число p должно делить $2^2-1=3$. Это противоречит предположению $p>3$, поэтому H p-замкнута.

Лемма 7. Если порядки всех подгрупп Шмидта группы G свободны от кубов и $p>q>2$, то любая $\{p, q\}$-группа группы G является p-замкнутой.

Доказательство. Пусть H – $\{2, p\}$-подгруппа группы G и $p > q > 2$. Если группа H не p-замкнута, то по лемме 2 в ней существует q–замкнутая подгруппа Шмидта S. По условию леммы ее порядок должен быть свободен от кубов. По лемме 4 простое число p должно делить $q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$. Так как $p > q > 2$, то это невозможно. Поэтому подгруппа H p-замкнута.

Доказательство теоремы. 1. Пусть H – $\{s, r\}$-подгруппа группы G, где s и r – простые числа, такие, что $\{s,r\} \neq \{2,3\}$, $s > r$. Поскольку по лемме 5 любая подгруппа Шмидта из подгруппы H имеет порядок, свободный от кубов, то из лемм 6–7 следует, что подгруппа H s-замкнута. Предположим, что подгруппа H ненильпотентна. Тогда H не r-замкнута и по лемме 2 в H существует $S_{<s,r>}$-подгруппа S, порядок которой свободен от кубов. Из леммы 4 следует, что или r делит $s-1$, или r не делит $s-1$, но делит $s+1$, т. е. r делит s^2-1. Отсюда следует, что если r не делит s^2-1, то подгруппа H нильпотентна.

2. Согласно лемме 4 множество подгрупп Шмидта в группе G исчерпывается $S_{<p,q>}$-подгруппами $\lfloor Z_p \rfloor Z_{q^i}$, где q делит $p-1$, и $S_{<p,q>}$-подгруппами $\lfloor E_{p^2} \rfloor Z_{q^i}$, где q делит $p+1$, $q > 2$, $i \in \{1, 2\}$.

3. Пусть в группе G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп таких, q делит $p-1$, для всех $p,\ q \in \pi(G)$. Тогда в группе G множество подгрупп Шмидта исчерпывается $S_{<p,q>}$-подгруппами $\lfloor E_{p^2} \rfloor Z_{q^i}$, где q делит $p+1$, $q > 2$, $i \in \{1, 2\}$. В частности, все подгруппы Шмидта в группе G несверхразрешимы и нет 2-нильпотентных $2d$-подгрупп Шмидта. По лемме 3 группа G 2-замкнута. В частности, по теореме Томпсона-Фейта группа G разрешима и в ней существуют π-холловы подгруппы для любого множества $\pi \subseteq \pi(G)$. Поэтому утверждение, доказанное в п. 1, распространяется на все бипримарные $\{s, r\}$-холловы подгруппы, $\{s,r\} \neq \{2,3\}$, $s > r$.

Пусть $p \in \pi(G) \setminus \{2, 3\}$. По лемме 6 любая $\{2, p\}$-подгруппа группы G p-замкнута, в частности, $\{2, p\}$-холлова подгруппа группы G p-замкнута. По доказанному в п. 1 теоремы утверждению любая $\{3, p\}$-холлова подгруппа группы G p-замкнута для $p > 3$. Поэтому для каждого $p \in \pi(G) \setminus \{2, 3\}$ нормализатор силовской p-подгруппы содержит некоторую силовскую 2-подгруппу и некоторую силовскую 3-подгруппу. Отсюда следует, что $\{2,3\}'$-холлова подгруппа группы G нормальна.

Применяя утверждение из п. 1 теоремы к $\{s, r\}$-холловой подгруппе группы G, $s > r > 2$, получаем, что $\{s, r\}$-холлова подгруппа s-замкнута. Отсюда следует, что $2'$-холлова подгруппа группы G дисперсивна по Оре.

Из утверждений, доказанных в п. 3.1–3.3, следует утверждение 3.4.

Из утверждения, доказанного в п. 1, следует утверждение 3.5.

4. Пусть в группе G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп, таких, что q делит $p+1$, для всех $p,\ q \in \pi(G)$, $q > 2$. Тогда в группе G множество подгрупп Шмидта исчерпывается $S_{<p,q>}$-подгруппами, $\lfloor Z_p \rfloor Z_{q^i}$, $i \in \{1, 2\}$, где q делит $p-1$. В частности, все подгруппы Шмидта группы G сверхразрешимы, и из теоремы 1 [3] следует, что группа

G дисперсивна по Оре и $\{s, r\}$-холлова подгруппа нильпотентна для всех простых чисел s и r, таких, что $s > r$, r не делит $s-1$.

Теорема доказана полностью.

Следствие. Пусть группа G не является 2-замкнутой группой и не является 2-нильпотентной группой. Предположим, что все подгруппы Шмидта имеют порядки, свободные от кубов. Тогда в группе G существуют p-замкнутая подгруппа Шмидта порядка $2^i p$ для некоторого нечетного $p \in \pi(G)$ и 2-замкнутая подгруппа Шмидта порядка $2^2 3^i$, $i \in \{1, 2\}$.

Доказательство. Согласно теореме в группе G существуют подгруппы Шмидта из пунктов 3 и 4 этой теоремы. По условию группа G не является 2-замкнутой группой, поэтому из леммы 3 вытекает, что в G существует 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта S_1. Из п. 1 леммы 4 получаем, что S_1 – p-замкнутая подгруппа Шмидта порядка $2^i p$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$ и нечетного $p \in \pi(G)$. Так как группа G не является 2-нильпотентной группой, то лемма 1 обеспечивает существование $S_{<2,q>}$-подгруппы, которая ввиду леммы 6 и пунктов 2 и 3 леммы 4 будет 2-замкнутой подгруппой Шмидта порядка $2^2 3^i$, $i \in \{1, 2\}$. Следствие доказано.

Отметим, что следствие теоремы охватывает все неразрешимые группы и все разрешимые группы 2-длины не менее 2 с подгруппами Шмидта порядков, свободных от кубов. Следующие два примера показывают, что существуют как неразрешимые, так и разрешимые группы, удовлетворяющие условиям следствия.

Пример 1. В знакопеременной группе A_5 степени 5 множество подгрупп Шмидта исчерпывается подгруппами $A_4 = [E_4]Z_3$, $[Z_5]Z_2$ и $S_3 = [Z_3]Z_2$. Группа A_5 является простой, ее порядок $60 = 2^2\,3\,5$ свободен от кубов.

Пример 2. В группе $PSL(2,7)$ множество подгрупп Шмидта исчерпывается подгруппами A_4 и S_3. Группа $PSL(2,7)$ является простой, ее порядок $168 = 2^3\,3\,7$ не свободен от кубов, но каждая подгруппа Шмидта в $PSL(2,7)$ имеет порядок, свободный от кубов.

Пример 3. В группе $[E_{5^2}]S_3$ множество подгрупп Шмидта исчерпывается $S_{<5,3>}$-подгруппами, $S_{<5,2>}$-подгруппами и $S_{<3,2>}$-подгруппами. Эта группа разрешима 2-длины 2.

Пример 4. Симметрическая группа S_4 степени 4 является разрешимой группой 2-длины 2. Её порядок равен $2^3 3$, а множество подгрупп Шмидта исчерпывается подгруппами A_4 и S_3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шмидт, О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сборник. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

2. Монахов, В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса. – 2002. – С. 81–90.

3. Монахов, В.С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.

***V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk.* Finite Groups, Schmidt Subgroups which have Cube-free Order**

The natural number n is called cube-free if p^3 does not divide n for all simple p. Finite non-nilpotent group is named Schmidt group, if all proper subgroups of this group are nilpotent. Schmidt subgroups exist in every non-nilpotent group, therefore properties of Schmidt subgroup render the essential influence on the construction of this group. It is researched the structure of the finite groups with bounded order of the Schmidt subgroups. We studied the properties of biprimary subgroups of any group with Schmidt subgroups of cube-free order. The structure of biprimary Hall subgroups of soluble groups is determined.