УДК 519.6+517.983.54

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

ОБ АПОСТЕРИОРНОМ ВЫБОРЕ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ В НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ I РОДА

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений I рода с положительным ограниченным и несамосопряжённым оператором предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по соседним приближениям, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В исходной норме гильбертова пространства доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – оператор положительный, ограниченный, несамосопряжённый. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора A. Однако нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение (1) имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[x_n + \alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y\right],\ x = 0\ ,\ k \in N. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближённо $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (2) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[z_n + \alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta\right] + \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}u_n,\ z_0 = 0,\ k \in N, \tag{3}$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \le \beta$.

Обозначим $C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}$, $B = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*$. Тогда метод (3) примет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n. \tag{4}$$

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряжённого оператора A. Там показано, что при условии $\alpha > 0$ итерационный метод (3) сходится, если число итераций n выбирать из условия $n^{\frac{1}{k}}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$. В предположении, что точное решение x уравнения (1) истокообразно представимо, получены априорная оценка погрешности и априорный момент останова.

2. Правило останова по соседним приближениям. В том случае, когда истокообразная представимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [2; 3]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим условиями

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \tag{5}$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (5) сходится. Справедлива

Лемма 1. *Пусть приближение* w_n *определяется условиями*

$$w_0 = z_0,\ w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\ n \ge 0. \tag{6}$$

Тогда справедливо неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2$.

Доказательство. Из (6) имеем при $n = k$ $Cu_k = w_{k+1} - Cw_k - By$. Отсюда, используя равенство $A^*Ax = A^*y$, получим

$$u_k = C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}By = C^{-1}w_{k+1} - w_k -$$
$$-\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y =$$
$$= C^{-1}w_{k+1} - w_k - \alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y = C^{-1}w_{k+1} - w_k - \alpha\left(A^*A\right)^k x = C^{-1}w_{k+1} -$$
$$- w_k - C^{-1}(E - C)x = C^{-1}(w_{k+1} - x) - (w_k - x).$$

Обозначим $\Delta_k = w_k - x$, тогда $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$, откуда $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) -$$
$$- 2\sum_{k=0}^{n-1}(\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\sum_{k=0}^{n-1}\left(C^{\frac{1}{2}}\Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}}\Delta_k\right). \tag{7}$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (7) по неравенству Коши-Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k, \Delta_k)\right\}^{1/2}, n \ge 1. \tag{8}$$

Покажем, что $(E - C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k$, $k \ge 0$. Имеем $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$, тогда $\Delta_k + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$, $w_k - x + Cu_k = (E - C)\Delta_k + w_{k+1} - x$, отсюда следует, что

$$(E-C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k,\ k \ge 0. \tag{9}$$

Используя равенство (9), запишем неравенство (7) в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n}(\Delta_k,\Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k, C\Delta_k) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2} =$$

$$= -(\Delta_0,\Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}(\Delta_k,\Delta_k) + \sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k, C\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k) + 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k) -$$

$$-2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2} = -(\Delta_0,\Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k) +$$

$$+2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2} =$$

$$= -(\Delta_0,\Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k) + \gamma_n,$$

где $\gamma_n = 2\sum_{k=0}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2\left\{\sum_{k=0}^{n-1}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{n}(C\Delta_k,\Delta_k)\right\}^{1/2}$.

Нетрудно показать, что $\gamma_n \ge 0$ при любых $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$. Тогда

$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge -(\Delta_0,\Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}((E-C)\Delta_k, (E-C)\Delta_k)$. Используя равенство (9), получим

$\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2 \ge -(\Delta_0,\Delta_0) + \sum_{k=0}^{n}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2$, откуда выполняется

$\sum_{k=0}^{n}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2$. Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. *При* $\forall w_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta. \tag{10}$$

Доказательство. $\underline{\lim}_{n\to\infty}\|w_n - w_{n+1}\| \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\|w_n - w_{n+1} + Cu_n\| + \|C\|\beta \le$

$$\le \|C\|\beta + \overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le \|C\|\beta + \overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \le$$

$\le \overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n}n\|C\|^2\beta^2\right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\beta = 2\|C\|\beta$, так как $\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|w_0 - x\|^2 = 0$.

Отсюда следует (10), и, значит, лемма 2 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n.

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова* m *определён при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\|, \|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка* $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)}$;

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0,\ \delta, \beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1,\ p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta, \beta \to 0} \|z_m - x\| = 0$.

Доказательство. а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{11}$$

При $n = 1$ из $z_n = C z_{n-1} + B y_\delta + C u_{n-1}$ имеем $z_1 = C z_0 + B y_\delta + C u_0$, из (11) получим то же самое, т. е. при $n = 1$ формула (11) верна. Предположим, что (11) верна при $n = p$, т. е. $z_p = C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1}\right)$ и докажем её справедливость при $n = p + 1$. Имеем

$$z_{p+1} = C z_p + B y_\delta + C u_p = C\left(C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1}\right)\right) + B y_\delta + C u_p = C^{p+1} z_0 +$$

$$+ C^2\left(C^{-1} B y_\delta + u_{p-1} + B y_\delta + C u_{p-2} + C B y_\delta + C^2 u_{p-3} + \ldots + C^{p-2} B y_\delta + C^{p-1}\right) + B y_\delta + C u_p =$$

$$= C^{p+1} z_0 + C\left(B y_\delta + C u_{p-1} + C B y_\delta + C^2 u_{p-2} + \ldots + C^{p-1} B y_\delta + C^p u_0 + C^{-1} B y_\delta + u_p\right) =$$

$$= C^{p+1} z_0 + C\sum_{k=0}^{p} C^k \left(C^{-1} B y_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (11) доказана.

Отсюда получим

$$w_n = C^n w_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1} B y + u_{n-k-1}\right) = C^n w_0 + \left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right) B y +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n w_0 + \left(E - C^n\right)(E - C)^{-1}\left(A^* A\right)^{-1}(E - C) A^* y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} =$$

$$= C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right) y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = w_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}z_0 - A^{-1}\left[E - C^{n+1}\right]y_\delta -$$

$$- C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = C^n w_0 + A^{-1}\left(E - C^n\right)y - A^{-1}\left(E - C^n\right)y + A^{-1}\left(E - C^n\right)y_\delta +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}w_0 - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y + A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y - A^{-1}\left(E - C^{n+1}\right)y_\delta -$$

$$- C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} = w_n - w_{n+1} + A^{-1}C^n(E - C)(y_\delta - y) = w_n - w_{n+1} + C^n B(y - y_\delta).$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \le \|w_n - w_{n+1}\| + \left\|C^n B(y - y_\delta)\right\|. \tag{12}$$

Обозначим $\sigma = B(y - y_\delta)$, тогда

$$\left\|C^n B(y - y_\delta)\right\| = \left\|C^n \sigma\right\| = \left\|\int_0^M \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^k\right)^n} dE_\lambda \sigma\right\| \le \left\|\int_0^{\varepsilon_0} \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^k\right)^n} dE_\lambda \sigma\right\| + \left\|\int_{\varepsilon_0}^M \frac{1}{\left(1 + \alpha\lambda^k\right)^n} dE_\lambda \sigma\right\| \le$$

$\le \left\|E_{\varepsilon_0}\sigma\right\| + q^n\|\sigma\| \to 0,\ n \to \infty,\ \varepsilon_0 \to 0$, так как при $\alpha > 0,\ \lambda \in (0, M]$ имеем $\frac{1}{1 + \alpha\lambda^k} \le q < 1$. Поэтому (см. лемму 2) $\varliminf_{n\to\infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \varliminf_{n\to\infty} \|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$.

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определён при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (6) и определим момент останова m' условием

$$\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,\ (n < m'),\ \|w_{m'} - w_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \tag{13}$$

Из (12) следует, что $m \le m'$. Из леммы 1 при $n = m'$ получим $\sum_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$. Отсюда справедливо $\sum_{k=0}^{m'-1} \left(\|w_k - w_{k+1}\| - \|C\|\beta\right)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$.

Так как по (13) при $n < m'$ имеем $\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta$, то $m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 \le \|w_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая, что $w_0 = z_0$ и $m \le m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова $m \le m' \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$.

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y\,. \qquad (14)$$

Предположим, что (14) верно, тогда

$$x - C^n x = B(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})y,$$
$$(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1} y,$$
$$(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1} Ax,$$
$$(E - C^n)x = (E - C^n)x.$$

Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (14) доказана.

Из (11) вычтем (14), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y - y_\delta) + u_{n-k-1}\right]. \qquad (15)$$

Отсюда

$\Delta_n = C^n\Delta_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y - y_\delta) + u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$.

Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n\Delta_0\right\| + (\|B\|\delta + \|C\|\beta)n\,. \qquad (16)$$

В частности, (16) справедливо и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m\Delta_0\right\| \to 0,\, m \to \infty$. Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0$, $\delta \to 0, \beta \to 0$ достаточно показать, что $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \to 0, m \to \infty,\ \delta \to 0, \beta \to 0.$

Из (15) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1}\,. \qquad (17)$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha(A^*A)^k\right)^{-1}$ принадлежит [0, 1], то нетрудно показать, что

$$\left\|C^n(E - C)\right\| \le \frac{1}{n+1}\,. \qquad (18)$$

Поэтому из (17) получим при $n = m - 1$

$$\|z_{m-1} - z_m\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x)\right\| + \left\|C^{m-1}B(y_\delta - y)\right\| + \|Cu_{m-1}\| +$$

$$+ \left\|C\sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C)u_{m-k-2}\right\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}}(E - C)\right\|\left\|C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x)\right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta + \|C\|\beta\sum_{k=0}^{m-2}\frac{1}{k+1} \le$$

$$\leq \frac{2}{m}\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln m$ [4].

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta) \geq d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, $d > 1$, $p \in (0,1)$, то при всех достаточно малых δ,β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta + 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$.

Поскольку $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon$, то $\varepsilon \leq \frac{2}{m}\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$

Отсюда получим, что $m \leq \frac{2\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}$. Умножим обе части последнего неравенства на $\|B\|\delta + \|C\|\beta$, получим

$$m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \leq \frac{2\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\|\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}.$$

При $m \to \infty$ множитель $\left\| C^{\frac{m-1}{2}}(z_0 - x) \right\| \to 0$, а дробь $\frac{2\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta}\right]}$ ограничена при $\delta, \beta \to 0$. Поэтому $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \to 0$ при $m \to \infty$, $\delta, \beta \to 0$. Отсюда и из неравенства (16) при $m \to \infty$

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\|\Delta_m\| = \lim_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = \lim_{\delta,\beta\to 0}\left(\left\|C^m \Delta_0\right\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta)\right) = 0.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. Априорный выбор числа итераций в неявном итерационном методе решения линейных операторных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Учёные записки Брестского ун-та. – 2007. – Т. 3, ч. 2. – С. 16–23.

2. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

3. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.

4. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Наука. – 1971. – 1108 с.

***O.V. Matysik, V.F. Savchuk.* On Aposteriori Choice of the Number of Iterations in the Implicit Iteration Procedure for Solving Equations of Type One**

In the Hilbert space for solving linear operator equations of type I with affirmative limited and self–conjugate operator the implicit iteration method is proposed. The application of a rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even when there are no data about source representability of exact solution. In its initial norm of Gilbert space the convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.