УДК 513.82

***А. А. Юдов*[1]*, Е. В. Кисилюк*[2]**

[1]канд. физ.-мат. наук, доц.
доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: modelmath@brsu.brest.by

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОГО РИПЕРА ПОДМНОГООБРАЗИЯ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Изучаются подмногообразия однородного пространства, описывается построение канонического рипера подмногообразия однородного пространства и строится вычислительный аппарат метода построения канонического рипера. Подмногообразие исследуется локально.

1. Построение инвариантного продолжения подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в алгебру Ли

Пусть G – группа Ли, H – ее замкнутая подгруппа Ли, $M = G/H$ – однородное G-пространство,

$$\pi : G \to G/H : a \to aH - \tag{1}$$

каноническая проекция.

Группа G действует в M с помощью левых сдвигов:

$$G \times M \to M : (a, bH) \to abH = a \cdot bH = T_a(bH). \tag{2}$$

Определение: *Подмногообразием* размерности *n* однородного пространства M будем называть пару (D_0, f), где D_0 – окрестность нуля евклидова пространства R_n, f – аналитическое вложение D_0 в M.

Таким образом, подмногообразия однородного пространства изучаются локально. Теория построения канонического репера подмногообразия подробно описана в работе [4]. Ниже излагаются идеи работы [4] и строится канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в алгебру Ли.

Предположим, что $f(0) = \pi(e)$. В противном случае, если $f(0) = \pi(a) \neq \pi(e)$, от подмногообразия (D_0, f) перейдем к ему эквивалентному $(D_0, T_{a^{-1}} \circ f)$. Пусть $\dim G = r$, $\dim H = s$, тогда $\dim M = r - s = m$.

Рассмотрим пространство Γ_1 всех касательных к M *n*-мерных подпространств. Действие группы G на M продолжается в действии на Γ_1, на котором группа G будет действовать с помощью дифференциалов левых сдвигов пространства M:

$$G \times \Gamma_1 \to \Gamma_1 : (a, K) \to dT_a(K) = a \circ K. \tag{3}$$

При этом Γ_1 становится G-пространством, но необязательно однородным. Наряду с G-пространством Γ_1 будем рассматривать его подмножество Q_1, состоящее из *n*-мерных подпространств, касательных к M в точке $\pi(e)$. Q_1 будет H-пространством, тоже необязательно однородным. Между H-орбитами множества Q_1 и G-орбитами множества Γ_1 существует естественное взаимно-однозначное соответствие. Далее будем рассматривать G-орбиты пространства Γ_1. Каждой такой орбите будет сопоставляться класс *n*-мерных подмногообразий пространства M, такой, что все касательные подпространства подмногообразия этого класса попадут в данную орбиту (по крайней мере, в некоторой окрестности). Предположим, что подмногообразие (D_0, f)принадлежит классу с орбитой $O(K_1) = \{a \circ K_1 \mid a \in G\}$, где $K_1 = T_{f(0)}(\operatorname{Im} f)$, $\operatorname{Im} f = f(D_0)$. Пусть H_1 – группа стационарности элемента K_1:

$$H_1 = \{a \in G \mid a \circ K_1 = K_1\}.$$

Приведем основные факты теории вычислительного аппарата метода построения канонического репера.

Рассмотрим множество Q_1 всех n-мерных подпространств, касательных к M в точке $\pi(e)$. Наряду с множеством Q_1 рассмотрим множество

$$Z_1 = \{d\pi_e^{-1}(K) \mid K \in Q_1\}.$$

Множество Q_1 является H-пространством. Множество Z_1 также является H-пространством, причем действие группы H в Z_1 индуцируется присоединенным представлением Ad. H-пространства Q_1 и Z_1 изоморфны. Отсюда, в частности, следует, что

$$H_1 = \{a \in H | Ada(K'_1) = K'_1\}, \tag{4}$$

где $K'_1 = d\pi_e{}^{-1}(K_1)$.

Пусть $\{\omega^1, \omega^2, ..., \omega^r\}$ – базис пространства $\overline{G}^*$ дуального к алгебре Ли $\overline{G}$ группы Ли G, $\{\omega^1, \omega^2, ..., \omega^t\}$ – базис пространства $K_1'^*$, дуального к K_1', $\{\omega^1, \omega^2, ..., \omega^5\}$ – базис пространства $\overline{H}^*$, дуального к $\overline{H}$. При этом $t = s + n$. Тогда система Пфаффа, определяющая пространство K_1', будет иметь вид:

$$\omega^{t+1} = 0,\ \omega^{t+2} = 0, ...,\ \omega^r = 0. \tag{5}$$

Найдем внешние дифференциалы форм системы (5):

$$d\omega^{t+1} = 0,\ d\omega^{t+2} = 0, ...,\ d\omega^r = 0. \tag{6}$$

Введем индексы суммирования: $i, j = 1,2,..,r$; $\sigma, \tau = s+1, s+2, ..., r$; $\varepsilon, \mu = t+1, t+2, ..., r$; $a, b, c = 1,2,...,s_1$; $\alpha, \beta, \gamma = 1,2,...,t$; $p, q, l = s_1+1, s_1+2, ..., s$; $\rho, \delta = s+1, s+2, ..., t$.

Разложим внешние дифференциалы (6) по базису:

$$d\omega^{t+1} = \Lambda_{ij}^{t+1} \omega^i \wedge \omega^j, ..., \Lambda_{ij}^r \omega^i \wedge \omega^j. \tag{7}$$

Предположим, что подмногообразие (D_0, f) продолжается в пространство $M = G/H$ и $f_1 : D_0 \to M_1$ – соответствующее продолжение, $K_1 = T_{f(0)}(\operatorname{Im} f)$, $K_1' = d\pi_e^{-1}(K_1)$, $K_2 = T_{f_1(0)}(\operatorname{Im} f_1)$, $K_2' = d\pi_{1|e}^{-1}(K_2)$.

Лемма 1 [4]. В формулах (7) равны нулю коэффициенты $\Lambda_{a\alpha}^{t+1} ... \Lambda_{a\alpha}^r$; $\Lambda_{p,q}^{t+1}, ..., \Lambda_{p,q}^r$.

Следствие 1. Система форм

$$\begin{cases} \omega^{t+1} = 0, ..., \omega^r = 0; \\ d\omega^{t+1} = 0, ..., d\omega^r = 0 \end{cases} \tag{8}$$

эквивалентна системе

$$\omega^{t+1} = 0, ..., \omega^r = 0; \text{ (а)}$$

$$\omega^p \wedge \theta^{t+1}{}_p = 0, ..., \omega^p \wedge \theta_p^r = 0. \quad \text{(б)} \tag{9}$$

Пусть H_1 – алгебра Ли группы H_1, тогда

$$H_1 = \{v \in H \mid [v, K_1'] \subset K_1'\}. \tag{10}$$

Пусть $K_1' = H \oplus N$, $K_2' = H \oplus N$.

Теорема 1.1. [4]. Если выполняется условие

$$[N, N] \subset K_1', \tag{11}$$

то внешние дифференциалы $d\omega^{t+1} = 0, ..., d\omega^r = 0$ обращаются в нуль в пространстве K_2'.

Заметим, что условие (11) всегда выполняется для одномерного подмногообразия (D_0, f), а также для подмногообразий любой размерности в случае, когда группа Ли G является полупрямым произведением группы стационарности точки пространства M и абелевой группы, в частности для всех евклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Используя лемму Картана, систему (9, б) на пространстве K_2' можно переписать в виде [4]: $\Theta_\rho^{t+1} = \mathrm{A}_{\rho\delta}^{t+1}\widetilde{\omega}^\delta, \ldots, \Theta_\rho^r = \mathrm{A}_{\rho\delta}^r\widetilde{\omega}^\delta$, $\mathrm{A}_{\rho\delta}^\varepsilon = \mathrm{A}_{\delta\rho}^\varepsilon, \varepsilon = t+1, \ldots, r$ ($\widetilde{\omega}^\delta$ – ограничение формы ω^δ на пространство K_2'), а систему (9) в виде:

$$\omega^{t+1} = 0, ..., \omega^r = 0;$$

$$\Omega_\rho^{t+1} \equiv \Theta_\rho^{t+1} - \mathrm{A}_{\rho\delta}^{t+1}\widetilde{\omega}^\delta = 0, \ldots, \Omega_\rho^r \equiv \Theta_\rho^r - \mathrm{A}_{\rho\delta}^r\widetilde{\omega}^\delta = 0. \tag{12}$$

Теорема 1.2. [4]. Система 1-форм

$$\omega^{t+1} = 0, ..., \omega^r = 0,\ \Omega_\rho^{t+1} = 0, ..., \Omega_\rho^r = 0 \tag{13}$$

есть система форм Пфаффа, определяющая подпространство K'_2.

Теорема 1.3. Система форм

$$\Omega_\rho^{t+1} = 0, ..., \Omega_\rho^r = 0,\ p = s+1, ..., t, \tag{14}$$

рассматриваемая как алгебраическая система относительно форм $\omega^{s_1+1} = 0, ..., \omega^s = 0$, разрешима относительно этих форм. При этом получается выражение форм $\omega^{s_1+1}, ..., \omega^s$ через формы $\omega^{s_1+1}, ..., \omega^t$.

Разрешив систему (14) относительно форм $\omega^{s_1+1} = 0, ..., \omega^s = 0$, найдем

$$\omega^{s_1+1} = \lambda_\rho^{s_1+1}\omega^\rho, ..., \omega^s = \lambda_\rho^s\omega^\rho. \tag{15}$$

Система (15) эквивалентна системе (14). Тогда систему (13) можно переписать в виде:

$$\omega^{t+1} = 0, ..., \omega^r = 0,\ \omega^{s_1+1} - \lambda_\rho^{s_1+1}\omega^\rho = 0, ..., \omega^s - \lambda_\rho^s\omega^\rho = 0. \tag{16}$$

Коэффициенты $\lambda_\rho^{s_1+1}, ..., \lambda_\rho^s$, $\rho = s+1, ..., t$ называются *дифференциальными инвариантами подмногообразия* (D_0, f), *полученными при первом продолжении.* Может быть, среди полученных дифференциальных инвариантов есть зависимость. Чтобы получить независимые инварианты первого продолжения, надо подействовать на подмногообразие (D_0, f) преобразованием h_1 группы H_1. При этом подмногообразие (D_0, f) перейдет в $(D_0, h_1 \circ f)$, а подпространство K_1 (а следовательно, и K_1') не изменится, а подпространство K_2 и, соответственно, K_2' изменится. При этом надо так подобрать элемент h_1, чтобы K_2' привелось к возможно более простому виду. В соответствии с этим и система (13), определяющая K_2', приведется к более простому виду и оставшиеся коэффициенты будут независимыми дифференциальными инвариантами первого продолжения.

Замечание 1. Теорема 1.3 верна как при выполнении условий $\dim H - \dim H_1 = \dim Q$, так и в случае

$$\dim Q > \dim H - \dim H_1 . \qquad (17)$$

Рассмотрим теперь подмногообразие (D_0, f) пространства $M_1 = G/H_1$ и применим к нему аналогичные рассуждения. Пусть $f_2 : D_0 \to G/H_2$ – продолжение отображения f_1 в пространство $M_2 = G/H_2$, где H_2 – группа стационарности пространства $K_2 = T_{f_1(0)}(Imf_1)$. Системой Пфаффа, определяющей K_2, будет система (13). Продолжив ее и применив лемму Картана, придем, аналогично предыдущему, к системе Пфаффа, определяющей подпространство K_3', где $K_3 = T_{f_2(0)}(Imf_2)$, $K_3' = d\pi_{2|e}{}^{-1}(K_3), \pi_2 : G \to G/H_2 : a \mapsto aH_2$ – каноническая проекция.

При этом получим новые дифференциальные инварианты. Выберем, как и выше, среди дифференциальных инвариантов независимые. При этом будем действовать преобразованиями группы H_2.

Предположим, что, повторив операцию продолжения $p+1$ раз, мы приведем группу стационарности пространства $K_{\rho+1}$ к единице: $H_{\rho+1} = e$. При этом получится система Пфаффа, определяющая пространство $K'_{\rho+2}$:

$$\omega^1 = \lambda^1_\rho \omega^\rho ,..., \omega^s = \lambda^s_\rho \omega^\rho ,\ \omega^{t+1} = 0,..., \omega^r = 0 , \qquad (18)$$

в которой все формы выражены через базисные формы $\omega^{s+1} = 0,..., \omega^t = 0$.

Определение. Коэффициенты $\lambda^1_\rho ,..., \lambda^s_\rho$ называются *дифференциальными инвариантами подмногообразия* (D_0, f) в точке $f(0)$.

При построении канонического репера в произвольной точке подмногообразия (D_0, f) получим дифференциальные инварианты $\lambda^1_\rho(x_0),..., \lambda^s_\rho(x_0)$, $x_0 \in D_0$, являющиеся функциями. Эти функции определяют подмногообразие (D_0, f) с точностью до преобразования группы G [3] и потому образуют полную систему дифференциальных инвариантов подмногообразия (D_0, f).

Чтобы получить канонический репер и дифференциальные инварианты подмногообразия (D_0, f) в произвольной точке $x \in D = f(D_0)$, нужно перейти от подмногообразия (D_0, f) к подмногообразию $(D_0, a \circ f)$, причем a выбрать так, чтобы $a \circ x = \pi(e)$. Возможен и второй путь, при котором по аналогии с вышеописанным непосредственно используются подпространства $K'_{1|x},..., K'_{p+1|x}$.

Таким образом, строить канонический репер и находить дифференциальные инварианты можно сразу для всех точек подмногообразия (D_0, f).

Определение. Систему (18) будем называть *характеризующей системой* подмногообразия (D_0, f).

2. Проблема эквивалентности подмногообразий однородного пространства

Рассмотрим проблему эквивалентности подмногообразий однородного пространства $M = G/H$.

Пусть заданы два подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) пространства M .

Определение. Два подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) однородного G-пространства M называются эквивалентными (или G-эквивалентными), если существует элемент $a \in G$ такой, что

$$g(x_0) = T_a(f(x_0)), \ \ \forall x_0 \in D_0. \tag{19}$$

Определение. Подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) однородного пространства M будем называть эквивалентными по образу, если существует $a \in G$ такое, что

$$g(D_0) = T_a(f(D_0)).$$

Очевидно, что эквивалентные подмногообразия являются эквивалентными по образу.

Подмногообразию (D_0, f), для которого возможно построение канонического репера, была сопоставлена цепочка подгрупп $H \supset H_1 \supset ... \supset H_{P+1} = e$, названная типовой цепочкой или типом подмногообразия (D_0, f). Нетрудно видеть, что каждая подгруппа этой цепочки определена с точностью до сопряженности в группе G.

Определение. Подмногообразия, имеющие одинаковые (с точностью до сопряженности) типовые цепочки, будем называть однотипными.

Теорема 2.1. [3]. Подмногообразия, эквивалентные по образу, однотипны.

Таким образом, классификация подмногообразий по типам более широкая, чем по эквивалентности. Сформулируем критерий эквивалентности подмногообразий.

Теорема 2.2. Два подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) однородного G-пространства $M = G/H$ тогда и только тогда эквивалентны, когда

$$\hat{f}^*(\omega^i) = \hat{g}^*(\omega^i), \tag{20}$$

$i = 1,2,..,r$, где ω^i – базисные левоинвариантные формы на группе Ли G (т. е. базис в $\overline{G}^*$), а $\hat{f}$ и $\hat{g}$-канонические лифты подмногообразий (D_0, f) и (D_0, g).

Доказательство. Необходимость.

Пусть подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) эквивалентны, т. е. существует элемент $a \in G$, выполняется равенство (19), и пусть $\hat{f} = \lambda_f \circ f$ и $\hat{g} = \lambda_g \circ g$ их канонические лифты. Условие (19) удобно записывать в виде:

$$g(x_0) = a \circ f(x_0), \ \ \forall x_0 \in D_0. \tag{21}$$

Пусть $\widetilde{f} : f(D_0) = \operatorname{Im} f \to M_1 : x \to \overline{T}_x(\operatorname{Im} f)$,

$\widetilde{g} : g(D_0) = \operatorname{Im} g \to M_1 : x \to \overline{T}_x(\operatorname{Im} g)$ – соответствующие продолжающие отображения, причем очевидно, что продолжение производится в одно и то же пространство $M_1 = G/H_1$. Действие G в пространстве M_1 определим формулой:

$$G \times M_1 \to M_1 : (a, K) \to dT_a(K) \equiv a \circ K. \tag{22}$$

Тогда имеем:

$$a \circ (\overline{T}_x(\operatorname{Im} f)) = dT_a(T_x(\operatorname{Im} f)) = \overline{T}_{a\circ x}(T_a(\operatorname{Im} f)) = \overline{T}_{a\circ x}(\operatorname{Im}(T_a \circ f)) = T_{a\circ x}(\operatorname{Im} g).$$

Отсюда:

$$\widetilde{g}(a \circ x) = a \circ \widetilde{f}(x). \tag{23}$$

Значит, $a \circ f_1(x_0) = a \circ \widetilde{f}(f(x_0)) = \widetilde{g}(a \circ f(x_0)) = \widetilde{g}(g(x_0)) = g_1(x_0)$.

Таким образом, $\forall x_0 \in D_0 \ \ g_1(x_0) = a \circ f_1(x_0)$

Аналогично доказываются равенства $g_2(x_0)=a\circ f_2(x_0),...,g_p(x_0)=a\circ f_p(x_0)$, а следовательно и

$$\hat{g}(x_0)=a\circ\hat{f}(x_0)=L_a\left(\hat{f}(x_0)\right),\forall x_0\in D_0. \qquad (24)$$

Таким образом, эквивалентным подмногообразиям соответствуют эквивалентные канонические лифты. Из (24) для любой левоинвариантной 1-формы ω^i на группе G получим $\hat{g}^*(\omega^i)=\left(L_a\circ\hat{f}\right)^*(\omega^i)=\hat{f}^*(L_a{}^*(\omega^i))$ и, следовательно, в силу левоинвариантности формы $\omega^i:\hat{g}^*(\omega^i)=\hat{f}^*(\omega^i)$.

Достаточность. Пусть выполняется равенство (20), тогда в силу теоремы 2.3 [1, с. 238] отображения $\hat{f}$ и $\hat{g}$ отличаются левым сдвигом, т. е. существует элемент $a\in G$, такой что $\hat{g}(x_0)=L_a\left(\hat{f}(x_0)\right)$, $\forall x_0\in D_0$.

Применим к обеим частям этого равенства каноническую проекцию π и, поскольку π есть G-морфизм, получим: $\pi\circ\hat{g}(x_0)=\pi\circ L_a\circ\hat{f}(x_0)=a\circ\pi\circ\hat{f}(x_0)$.

Т. к. $\hat{f}=\lambda_f\circ f$, $\hat{g}=\lambda_g\circ g$, то $\pi\circ\lambda_g\circ g(x_0)=a\circ\pi\circ\lambda_f\circ f(x_0)$.

Поскольку λ_f и λ_g – сечения, то $\pi\circ\lambda_g=Id$, $\pi\circ\lambda_f=Id$. Отсюда: $g(x_0)=a\circ f(x_0)$, $\forall x_0\in D_0$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Подмногообразия (D_0,f)и (D_0,g) однородного G-пространства M тогда и только тогда эквивалентны, когда эквивалентны (в группе G) их канонические лифты.

Необходимость доказывается равенством (24).

Достаточность. Пусть существует элемент $a\in G$, такой что $\hat{g}(x_0)=L_a\left(\hat{f}(x_0)\right)$, $\forall x_0\in D_0$.

Применим к обеим частям этого равенства каноническую проекцию $\pi:\pi\circ\hat{g}(x_0)=\pi\circ L_a\left(\hat{f}(x_0)\right)=T_a\circ\pi\circ\hat{f}(x_0)$. Отсюда $g(x_0)=T_a\circ f(x_0)$.

Достаточность доказана.

Теорема 2.3. Если канонический лифт $\hat{f}$ подмногообразия (D_0,f) подвергнуть преобразованию $I(h)\colon G\to G\colon a\to hah^{-1}$, то получим канонический лифт подмногообразия $(D_0,T_h\circ f)$, построенный по системе подпространств $h\circ K_1, h\circ K_2,\ldots, h\circ K_{p+1}$.

Доказательство.

$I(h)=R_{h^{-1}}\circ L_h$, $L_h\left(\hat{f}\right)$есть канонический лифт подмногообразия $(D_0,T_h\circ f)$. Это следует из того, что эквивалентным подмногообразиям соответствуют эквивалентные канонические лифты (следствие 1). С другой стороны, $R_{h^{-1}}\left(L_h\left(\hat{f}\right)\right)$ есть канонический лифт подмногообразия $(D_0,T_h\circ f)$ по совокупности подпространств

$h \circ K_1, h \circ K_2, \ldots, h \circ K_{p+1}$. Каждому подмногообразию (D_0, f), для которого возможно построение канонического репера, была отнесена совокупность функций $\lambda_p^1(x_0), \ldots, \lambda_p^s(x_0)$, $x_0 \in D_0$, которые называются дифференциальными инвариантами подмногообразия (D_0, f). Справедлива теорема о том, что два подмногообразия однородного пространства одинаковой размерности эквивалентны в том и только в том случае, если в соответствующих точках их дифференциальные инварианты одинаковы. Будем считать, что соответствие между точками подмногообразий задается с помощью прообразов. Что же означает «одинаковые дифференциальные инварианты»? Система $\omega^{t+1} = 0, \ldots, \omega^r = 0$, $\omega^{s_1+1} - \lambda_\rho^{s_1+1}\omega^p = 0, \ldots, \omega^s - \lambda_\rho^s \omega^p = 0$, задающая дифференциальные инварианты подмногообразия (D_0, f), дает выражение левоинвариантных форм группы через некоторые базисные: $\omega^{s+1}, \ldots, \omega^t$. Базисные формы выбираются произвольно с тем условием, что они, будучи ограничены на $T\left(\mathrm{Im}\hat{f}\right)$, образуют там базис. Вид функций, являющихся дифференциальными инвариантами, зависит от выбора базиса. Выберем базис $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ векторных полей на D_0. Условимся в качестве базисных форм подмногообразия (D_0, f)в точке $x_0 \in D_0$ брать формы $\overline{d\hat{f}(V_i)^*}$, где знак звездочка означает форму, дуальную соответствующему вектору, а знак черты означает ее левоинвариантное распространение на группу Ли G. При этом понятие «дифференциальные инварианты» приобретает конкретность для подмногообразия (D_0, f). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.4. Для того чтобы подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис векторных полей $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ на D_0, такой, что $\overline{d\hat{f}(V_i)^*} = \overline{d\hat{g}(V_i)^*}$, и для любых соответствующих точек этих подмногообразий дифференциальные инварианты, найденные соответственно в базисах $d\hat{f}(V_i)^*$ и $d\hat{g}(V_i)^*$, совпадают.

Доказательство. *Необходимость.*

Пусть подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) эквивалентны, т. е. существует такой элемент $a \in G$, что

$$g(x_0) = a \circ f(x_0). \tag{25}$$

Заметим, что эквивалентные подмногообразия продолжаются в одну и ту же орбиту $M_1 = G/H_1$ множества Γ_1. Пусть $\tilde{f} : \mathrm{Im} f \to M_1 : x \to \overline{T}_x(\mathrm{Im} f)$, $\tilde{g} : \mathrm{Im} g \to M_1 : x \to \overline{T}_x(\mathrm{Im} g)$ – продолжающие отображения. Тогда имеет место равенство (5): $\tilde{g}(a \circ x) = a \circ \tilde{f}(x)$. Значит, $a \circ f_1(x_0) = a \circ \tilde{f}(f(x)) = \tilde{g}(a \circ f(x_0)) =$ $= \tilde{g}(g(x_0)) = g_1(x_0)$.

Аналогично доказываются равенства:

$$g_i(x_0) = a \circ f_i(x_0),\ i = 1,2,\ldots,p, \tag{26}$$

где f_i, g_i – последующие отображения f и g. Отсюда:

$$\hat{g}(x_0) = a \circ \hat{f}(x_0). \tag{27}$$

Следовательно,

$$\hat{g}^*(x_0) = \left(a \circ \hat{f}\right)^*(x_0). \tag{28}$$

Равенство (27) выполняется и для любых линейных комбинаций форм ω^i.

Пусть $x_0 \in D_0$. Рассмотрим последовательность подпространств

$$N_f = T_{f(x_0)}(\operatorname{Im} f), N_{1f} = T_{f_1(x_0)}(\operatorname{Im} f_1), ..., N_{p+1,f} = T_{f_{p+1}(x_0)}(\operatorname{Im} f_{p+1}), \tag{29}$$

$$N_g = T_{g(x_0)}(\operatorname{Im} g), N_{1g} = T_{g_1(x_0)}(\operatorname{Im} g_1), ..., N_{p+1,g} = T_{g_{p+1}(x_0)}(\operatorname{Im} g_{p+1}). \tag{30}$$

В силу (26) пространства (29) с помощью сдвига элементом преобразуются в соответствующие пространства (30).

Рассмотрим пространства $N_f{}^* = d\pi^1\left(T_{f(x_0)}(\operatorname{Im} f)\right)$ и $N_g = d\pi^1\left(T_{g(x_0)}(\operatorname{Im} g)\right)$. В силу равенств $\pi \circ L_a = T_a \circ \pi, d\pi \circ dL_a = dT_a \circ d\pi$ имеем

$$d\pi \circ dL_a\left(N_f{}^*\right) = dT_a\left(d\pi\left(N_f{}^*\right)\right) = dT_a\left(N_f\right) = N_g = d\pi\left(d\pi^1\left(N_g\right)\right) = d\pi\left(N_g{}^*\right).$$

Отсюда:

$$dL_a\left(N_f{}^*\right) = N_g{}^*, \tag{31}$$

поскольку при $d\,L_a$ полный прообраз преобразуется в полный прообраз.

Пусть

$$\omega^{t+1} = 0, ..., \omega^r = 0 \; - \tag{32}$$

система 1-форм в точке $\hat{g}^*(x_0)$, определяющая подпространство $N_g{}^*$, тогда система

$$dL_a\omega^{t+1} = 0, ..., dL_a\omega^r = 0 \tag{33}$$

1-форм в точке $\hat{f}(x_0)$ будет определять подпространство $N_f{}^*$. Рассуждая аналогично для подпространства $N_{if}{}^*$ и $N_{ig}{}^*$, $i = 1,2,...,p+1$, получим, что $N_{if}{}^*$ и $N_{ig}{}^*$ определяются системами 1-форм, отличающимися левым сдвигом L_a. Это означает, что дифференциальные инварианты подмногообразий (D_0, f) и (D_0, g) в соответствующих точках совпадают. Базисными формами подмногообразия (D_0, f), $\omega^{s+1}, ..., \omega^t$ можно выбрать формы $\overline{d\,\hat{f}(V_i)^*_{x_0}}$, где $V = \{V_1, ..., V_n\}$ – некоторый базис векторных полей на D_0. Тогда базисными формами подмногообразия (D_0, f) будут формы $\overline{d(a \circ \hat{f})(V_i)^*_{x_0}} = \overline{d\,\hat{g}(V_i)^*_{x_0}} = \overline{d\,\hat{f}(V_i)^*_{x_0}}$.

Достаточность. Пусть существует базис $V = \{V_1, ..., V_n\}$ векторных полей на D_0, такой, что $\forall x_0 \in D_0$ в базисе $\omega^i = \overline{d\,\hat{f}(V_i)^*_{x_0}} = \overline{d\,\hat{g}(V_i)^*_{x_0}}$ подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) имеют одинаковые дифференциальные инварианты. Это значит, что любая форма ω^i, не являющаяся базисной, выражается через ω^i на пространствах $T_{\hat{f}(x_0)}(Im\,\hat{f})$ и $T_{\hat{g}(x_0)}(Im\,\hat{g})$ с одними и теми же коэффициентами. Поскольку

$\omega^i = \overline{d\hat{f}(V_i)^*_{x_0}} = \overline{d\hat{g}(V_i)^*_{x_0}}$, то $\omega^i\left(d\hat{f}(V_i)^*_{x_0}\right) = \omega^i\left(d\hat{g}(V_i)^*_{x_0}\right) = \delta^i_k$, $i,k = 1,2,...,n$ и ,значит, $\hat{f}*\left(\omega^i\right) = \hat{g}\left(\omega^i\right)$ $i, = 1,2,...,n$.

Остальные левоинвариантные формы ω^i группы Ли G в точках $\hat{f}(x_0)$ и $\hat{g}(x_0)$ выражаются через базисные с одинаковыми коэффициентами: $\omega^i = \sum_i \alpha_i \omega^i$. Значит,

$$\hat{f}*\left(\omega^i\right) = \hat{f}*\left(\sum_i \alpha_i \omega^i\right) = \sum_i \alpha_i\, \hat{f}^*\left(\omega^i\right) = \sum_i \alpha_i\, \hat{g}^*\left(\omega^i\right) = \hat{g}*\left(\sum_i \alpha_i \omega^i\right) = \hat{g}*\left(\omega^i\right).$$

Таким образом, выполняется условие теоремы 2.3 [2, с. 238]. Тогда существует элемент $a \in G$, такой что для любого $x_0 \in D_0 : g(x_0) = L_a\left(f(x_0)\right)$, т. е. по следствию 1 подмногообразия (D_0, f) и (D_0, g) эквивалентны. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь каноническое вложение $\check{f}$ подмногообразия (D_0, f) в алгебру Ли $\overline{G}$ структурной группы Ли G:

$$\check{f} : D_0 \to \overline{G} : x_0 \to \exp^{-1}\left(\hat{f}(x_0)\right). \tag{34}$$

По теореме 3 при воздействии на канонический лифт $\hat{f}$ подмногообразия (D_0, f) преобразованием $I(h)$ получим канонический лифт подмногообразия $(D_0, T_h \circ f)$ по совокупности пространств

$$h \circ K_1, h \circ K_2, ..., h \circ K_{p+1},\ h \in H\,. \tag{35}$$

Справедлива формула

$$\exp Ad(\sigma)X = I(\sigma)(\exp X). \tag{36}$$

Рассмотрим $\check{f} = \exp^{-1} \circ \hat{f}$. Отсюда $\hat{f} = \exp \circ \check{f}$. В силу (36) имеем:

$$I(h)\left(\exp \circ \check{f}(x_0)\right) = \exp Adh\left(\check{f}(x_0)\right) = I(h)(\hat{f}(x_0)),\ x_0 \in D_0\,. \tag{37}$$

Отсюда следует, что $Ad(h)\check{f}$ есть образ при отображении $\exp^{-1}$ канонического лифта подмногообразия $(D_0, T_h \circ f)$ по совокупности пространств (35).

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 2.5. Если на каноническое вложение $\check{f}$ подмногообразия (D_0, f) подействовать преобразованием Adh присоединенной группы AdH, то оно преобразуется в каноническое вложение подмногообразия $(D_0, T_h \circ f)$ по совокупности подпространств (35).

Применив к равенству (37) каноническую проекцию π, получим:

$$\pi \circ I(h)(\exp \circ \check{f}(x_0)) = \pi \circ \exp\ Adh(\check{f}(x_0)) = \pi \circ I(h)(\hat{f}(x_0)). \tag{38}$$

Учитывая, что $\pi \circ I(h) = T_h \circ \pi,\ \pi \circ \hat{f} = f$, получим:

$$T_h \circ f(x_0) = \pi \circ I(h)(\hat{f}(x_0)), \tag{39}$$

$$T_h \circ f(x_0) = \pi \circ \exp Adh\,(\check{f}(x_0)). \tag{40}$$

Равенства (39) и (40) вместе с теоремами 2.3 и 2.5 доказывают, что имеет место теорема.

Теорема 2.6. Эквивалентность относительно внутренних автоморфизмов группы H на множестве канонических лифтов *n*-мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H–эквивалентность соответствующих подмногообразий. Эквивалентность относительно присоединенной группы AdH на множестве всех канонических вложений *n*-мерных подмногообразий однородного пространства G/H индуцирует H-эквивалентность соответствующих подмногообразий.

Поскольку в однородном пространстве G/H проблема G-эквивалентности подмногообразий сводится к проблеме H-эквивалентности, то теорема 2.5 сводит проблему G-эквивалентности подмногообразий в однородном пространстве $M = G/H$ к проблеме AdH-эквивалентности подмногообразий в алгебре Ли $\overline{G}$ структурной группы G.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии / П. К. Рашевский. – М., 1956. – С. 428.
2. Стернберг, С. Лекции по дифференциальной геометрии / С. Стернберг.– М. : Наука, 1970. – 336 с.
3. Юдов, А. А. *G*-пространства, порожденные однородным фактор-пространством / А. А. Юдов // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. – 1975. – № 2. – С. 27–31.
4. Юдов, А. А. Описание и обоснование метода Картана построения канонического репера подмногообразия / А. А. Юдов. – Деп. в ВИНИТИ 1982, рег. № 359582.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 14.10.2019

Yudov A. A., Kisilyuk E. V. **Method for Constructing a Canonical Riper of a Submariety of Homogeneous Space**

The work examines submanifolds of a homogeneous space, describes the construction of a canonical ripper of a submanifold of a homogeneous space, and constructs the computing apparatus of the method of constructing a canonical ripper. The submanifold is studied locally.