УДК 512.542

А. А. Трофимук[1], В. О. Лукьяненко[2]
[1]канд. физ.-мат. наук,
доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Информатика»
Гомельского государственного технического университета имени П. В. Сухого
e-mail:[1]alexander.trofimuk@gmail.com

О СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Подгруппа A группы G называется tcc-подгруппой в G, если в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$ и для любых $X \le A$ и $Y \le T$ существует элемент $u \in \langle X, Y\rangle$ такой, что $XY^u \le G$. Устанавливается сверхразрешимость группы G в каждом из следующих случаев: все максимальные подгруппы являются tcc-подгруппами в G; все 2-максимальные подгруппы являются tcc-подгруппами в G.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1; 2].

Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-максимальной подгруппой, если в G найдется такая максимальная подгруппа M, в которой H является максимальной подгруппой.

Запись $H \le G$ означает, что H – подгруппа группы G. Подгруппы A и B груп-пы G называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Заметим, что равенство $AB = BA$ равносильно тому, что $AB \le G$.

Исследования, связанные с изучением максимальных подгрупп, относятся к одному из самых перспективных направлений в теории групп. Это связано прежде всего с тем, что многие известные классы групп допускают описания на основе свойств максимальных подгрупп. Отметим, например, что группа G нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы нормальны; сверхразрешима тогда и только тогда, когда индексы всех ее максимальных подгрупп являются простыми числами (Б. Хупперт [2]).

По мере развития теории максимальных подгрупп многими авторами предпринимались также попытки изучения и применения 2-максимальных подгрупп. При этом как и для максимальных подгрупп, рассматривались группы с различными ограничениями на способ вложения обобщенно максимальных подгрупп в эти группы. Пожалуй, наиболее ранний результат, относящийся к этому направлению, был получен Б. Хупертом [3], установившим сверхразрешимость группы, в которой все 2-максимальные подгруппы нормальны. Сверхразрешимость разрешимых групп, у которых все 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами, была установлена Агравалем [4, теорема 6.5], а в работе [5] Л. Я. Поляков доказал, что группа сверхразрешима, если любая ее 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами этой группы. Подгруппа H из G называется *квазинормальной* в G, если H перестановочна со всеми подгруппами из G. Группы, все 2-максимальные подгруппы которых являются квазинормальными, были рассмотрены в работе А. Манна [6]. Очевидно, что если все максимальные подгруппы квазинормальны, то группа сверхразрешима, т. к. из квазинормальности подгруппы следует ее субнормальность. В [6] также было установлено, что ранг разрешимой группы G не превышает 1 при условии, что каждая ее 2-максимальная подгруппа является квазинормальной в G. Легко увидеть, что в этом случае группа G также сверхразрешима. Подробный обзор результатов, связанных с перестановочностью максимальных подгрупп и их обобщений, представлен в [7].

Одной из фундаментальных работ последнего десятилетия, посвященных перестановочности обобщенно максимальных подгрупп, является работа [8], в которой В. Го, К. Шум и А. Н. Скиба ввели понятие *tcc-перестановочной* подгруппы: подгруппа A группы G называются *tcc-перестановочной*, если для произвольной подгруппы B группы G и любых $X \le A$ и $Y \le B$ существует элемент $u \in \langle X,Y \rangle$ такой, что $XY^u \le G$. Из работы [9] вытекает сверхразрешимость *группы G, у которой все максимальные (2-максимальные) подгруппы tcc-перестановочны.*

Введем следующее

Определение 1. *Подгруппа A группы G называется tcc-подгруппой в G, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *в G существует подгруппа T такая, что $G = AT$;*

2) *для любых $X \le A$ и $Y \le T$ существует элемент $u \in \langle X,Y \rangle$ такой, что $XY^u \le G$.*

Подгруппу T в дальнейшем будем называть *tcc-добавлением* к подгруппе A в группе G.

Следующая теорема развивает результаты работы [9].

Теорема 3.1. *1. Если в группе G все максимальные подгруппы являются tcc-подгруппами, то G сверхразрешима.*

2. Если в группе G все 2-максимальные подгруппы являются tcc-подгруппами, то G сверхразрешима.

1. Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах.

Если $H \le G$ и $H \ne G$, то пишем $H < G$. Через G', $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, центр, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G соответственно; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно; $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Элементарная абелева группа порядка p^t и циклическая группа порядка m обозначаются E_{p^t} и Z_m соответственно, а $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B.

Пусть G – группа и

$$|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}, p_1 > p_2 > \ldots > p_k, \; a_i \in \mathbb{N}.$$

Пусть G_{p_i} – силовская p_i-подгруппа группы G.

Говорят, что группа G обладает силовской башней сверхразрешимого типа, если существует цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \le G_1 \le G_2 \le \ldots \le G_{k-1} \le G_k = G$$

такая, что G_i нормальна в группе G и фактор-группа G_i / G_{i-1} изоморфна силовской p_i-подгруппе G_{p_i} из G для всех i.

Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами. Через $\mathfrak{U}$ обозначим класс всех сверхразрешимых групп. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой, а группа с нормальной p'-холловой подгруппой называется p-нильпотентной.

Лемма 2.1 *[9, теорема 1, предложения 1–2]. Пусть $G = AB$ – произведение tcc-перестановочных подгрупп A и B. Тогда для минимальной нормальной подгруппы N группы G справедливы следующие утверждения:*

(1) $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{1, N\}$;

(2) *если $N \le A \cap B$ или $N \cap A = N \cap B = 1$, то $|N| = p$, где p – простое число.*

Лемма 2.2 *[10, теорема 4]. Пусть $G = AB$ является произведением tcc-перестановочных подгрупп A и B. Тогда $[A, B] \le F(G)$.*

Лемма 2.3 *[11, лемма 6]. Предположим, что разрешимая группа $G \notin \mathfrak{U}$, но фактор-группа $G / K \in \mathfrak{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $Z(G) = O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;

(2) *группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N, $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ для некоторого $p \in \pi(G)$;*

(3) *G – примитивная группа; $G = [N]M$, где M – максимальная подгруппа в группе G с единичным ядром;*

(4) *N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$;*

(5) *если V – подгруппа группы G и $G = VN$, то $V = M^x$ для некоторого $x \in G$.*

Из леммы 2.3 легко получается следующая

Лемма 2.4 *[12]. Пусть G – минимальная несверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *G разрешима и $|\pi(G)| \le 3$;*

(2) *G имеет единственную нормальную силовскую подгруппу P и $P = G^{\mathfrak{U}}$;*

(3) *$P / \Phi(P)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G / \Phi(P)$ и $|P / \Phi(P)| > p$;*

(4) *если Q – дополнение к P в G, то $Q / Q \cap \Phi(G)$ либо примарная циклическая группа, либо минимальная неабелева группа;*

(5) *если $|\pi(Q)| = 2$, то Q – нециклическая группа с циклическими силовскими подгруппами.*

(6) *если G не является группой Шмидта, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.*

Приведем некоторые свойства tcc-подгрупп.

Лемма 2.5 *Пусть A – tcc-подгруппа группы G и Y – tcc-добавление к A в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *A – tcc-подгруппа в H для каждой подгруппы H группы G такой, что $A \le H$;*

(2) *AN/N – tcc-подгруппа в G/N для каждой нормальной подгруппы N группы G;*

(3) *для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A и $X \leq Y$ существует $y \in Y$ такой, что $A_1X^y \leq G$. В частности, $A_1M \leq G$ для некоторой максимальной подгруппы M группы Y и $A_1H \leq G$ для некоторой π-холловой подгруппы H разрешимой группы Y и любого $\pi \subseteq \pi(G)$;*

(4) *$A_1K \leq G$ для каждой субнормальной подгруппы K в Y и для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A;*

(5) *если T нормальная подгруппа в G такая, что $T \leq A$ и $T \cap Y = 1$, то T_1 нормальная подгруппа в G для каждой нормальной подгруппы T_1 группы A такой, что $T_1 \leq T$;*

(6) *если T нормальная подгруппа в G такая, что $T \cap A = 1$ и $T \leq Y$, то $A_1 \leq N_G(T_1)$ для каждой нормальной подгруппы T_1 группы T и для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A;*

(7) *A^x – tcc-подгруппа группы G и Y^x – tcc-добавление к A^x в G для любого $x \in G$.*

Доказательство.

1. Т. к. Y – tcc-добавление к A в G, то $G = AY$, A и Y – tcc-перестановочные подгруппы из G. По тождеству Дедекинда $H = H \cap AY = A(H \cap Y)$. Т. к. $H \cap Y \leq Y$, то для любых $X \leq A$ и $Z \leq H \cap Y$ существует элемент $u \in \langle X, Z\rangle$ такой, что $XZ^u \leq G$. Поэтому A и $H \cap Y$ tcc-перестановочны и, значит, A – tcc-подгруппа в H.

2. Т. к. $G = AY$, то $G/N = (AN/N)(YN/N)$. Пусть B/N – произвольная подгруппа из AN/N и X/N – произвольная подгруппа в YN/N. Т. к. $N \leq B \leq AN$, то по тождеству Дедекинда $B = B \cap AN = (B \cap A)N$.

Аналогично $X = X \cap YN = (X \cap Y)N$. Т. к. $B \cap A \leq A$ и $X \cap Y \leq Y$, то $(B \cap A)(X \cap Y)^u \leq G$ для некоторого $u \in \langle B \cap A, X \cap Y\rangle$. Поэтому

$$(B/N)(X/N)^{uN} = (B \cap A)(X \cap Y)^u N/N \leq G/N$$

для

$$uN \in \langle B \cap A, X \cap Y\rangle N/N \subseteq \langle B, X\rangle N/N = \langle B/N, X/N\rangle .$$

Значит, AN/N – tcc-подгруппа в G/N.

3. Т. к. A – tcc-подгруппа группы G, то по определению для каждой нормальной подгруппы A_1 группы A и $X \leq Y$ существует $u \in \langle A_1 X\rangle$ такой, что $A_1X^u \leq G$. Т. к. $u \in G = AY = YA$, то $u = ya$ для некоторых $y \in Y$ и $a \in A$. Тогда

$$A_1X^u = A_1X^{ya} = A_1(X^y)^a = A_1^a(X^y)^a = (A_1X^y)^a \leq G.$$

Поэтому существует подгруппа A_1X^y в группе G для некоторого $y\in Y$. Очевидно, что если X – π-холлова подгруппа группы Y, то $H=X^y$ – π-холлова подгруппа группы Y. Поэтому $A_1H\leq G$. Аналогично и в случае, когда X – максимальная подгруппа группы Y. Тогда $M=X^y$ – максимальная подгруппа группы Y и $A_1M\leq G$.

4. Поскольку K субнормальная подгруппа в Y, то существует цепь подгрупп

$$Y=K_0\geq K_1\geq\ldots\geq K_{n-1}\geq K_n=K,$$

в которой подгруппа K_{i+1} нормальна в K_i для всех i. Применим индукцию по n. По п. (3) существует $y\in Y$ такой, что $A_1K_1^y=A_1K_1\leq G$. Поэтому утверждение справедливо для $n=0$ и $n=1$. Значит, $n\geq 2$. Согласно п. (1) A – tcc-подгруппа в AK_1 и K_1 – tcc-добавление к A в AK_1. Т. к. длина субнормальной цепи между K и K_1 меньше, чем n, то по индукции в группе AK_1 существует подгруппа A_1K, а следовательно, $A_1K\leq G$.

5. По п. 3 в группе G существует подгруппа T_1Y. Т. к. $T_1=T\cap T_1Y$ нормальна в T_1Y, то $Y\leq N_G\left(T_1\right)$ и T_1 нормальна в $G=AY$.

6. Т. к. T_1 субнормальна в Y, то по п. 4 в группе G существует подгруппа $A_1T_1\leq G$ каждой нормальной подгруппы A_1 группы A. Т. к. $T_1=T\cap A_1T_1$ нормальна в A_1T_1, то $A_1\leq N_G\left(T_1\right)$.

7. Т. к. $AY=G$, то $A^xY^x=G$. Пусть $K\leq A^x$, $L\leq Y^x$. Тогда $K^{x^{-1}}\leq A$, $L^{x^{-1}}\leq Y$ и существует $u\in\langle K^{x^{-1}},L^{x^{-1}}\rangle$ такой, что $K^{x^{-1}}(L^{x^{-1}})^u\leq G$. Т. к.

$$\langle K^{x^{-1}},L^{x^{-1}}\rangle=\langle K,L\rangle^{x^{-1}},$$

то существует $v\in\langle K,L\rangle$ такой, что $u=v^{x^{-1}}$.

Поскольку $x^{-1}u=vx^{-1}$, то

$$K^{x^{-1}}(L^{x^{-1}})^u=K^{x^{-1}}L^{vx^{-1}}=(KL^v)^{x^{-1}}.$$

Поэтому $KL^v\leq G$. Следовательно, A^x – tcc-подгруппа группы G и Y^x – ее tcc-добавление в G. Лемма доказана.

2. Доказательство основного результата

1. Предположим, что лемма неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. Пусть N – неединичная нормальная в G подгруппа и M/N – максимальная подгруппа G/N. Тогда M – максимальная подгруппа в G и по лемме 2.5 (2) все фактор-группы G/N наследуют условия теоремы. Поэтому G/N сверхразрешима.

Пусть H – максимальная подгруппа и Y – ее tcc-добавление в G. Если $F\left(G\right)\neq 1$, то G разрешима. Поэтому $F\left(G\right)=1$ и по лемме 2.2 $Y\leq C_G\left(H\right)$. Тогда H нормальна в G и $\left|G:H\right|$ – простое число. Т. к. H – произвольная максимальная подгруппа в G, то группа G сверхразрешима, а следовательно, разрешима.

По лемме 2.3 в G существует единственная минимальная нормальная подгруппа N такая, что

$$N = C_G(N) = \mathrm{O}_p(G) = F(G)$$

для некоторого $p \in \pi(G)$, N – элементарная абелева подгруппа порядка p^n, $n > 1$, $G = [N]T$, где T – некоторая максимальная подгруппа группы G.

Пусть U – tcc-добавление к T в G. По лемме 2.1 $N \le U$. Т. к. N – элементарная абелева p-подгруппа, выберем нормальную подгруппу N_1 в N такую, что $|N_1| = p$. Тогда по лемме 2.5 (6) $T \le N_G(N_1)$. Поскольку N_1 нормальна в N, то N_1 нормальна в $G = [N]T$ и $N = N_1$. Противоречие. Лемма доказана.

2. Предположим, что теорема неверна и пусть G – контрпример минимального порядка. По лемме 2.5 (1) и по теореме 3.1 каждая максимальная подгруппа M будет сверхразрешимой. Поэтому G – минимальная несверхразрешимая группа и применима лемма 2.4. Тогда группа G разрешима, $|\pi(G)| \le 3$ и имеет единственную нормальную силовскую подгруппу $P = G^{\mathfrak{U}}$. Очевидно, что $\Phi(G) = 1$. Поэтому P – минимальная нормальная подгруппа порядка p^n, $n > 1$ и $G = [P]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G.

Если $|\pi(G)| = 3$, то G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и $M = [T]R$, где $|T| = t$, $|R| = r$, $t, r \in \pi(G)$. Подгруппы T и R являются 2-максимальными подгруппами группы G. Тогда по условию $TY_1 = G = RY_2$, где Y_1 и Y_2 – их tcc-добавления в G. Кроме того, $P \le Y_1$ и $P \le Y_2$. Пусть P_1 – минимальная нормальная подгруппа в P. Тогда по лемме 2.5 (6) $T \le N_G(P_1)$ и $R \le N_G(P_1)$. Тогда P_1 нормальна в $G = PM = PTR$, противоречие.

Таким образом, $|\pi(G)| = 2$. Тогда M – q-группа. Если $|M| > q$, то существует в M максимальная подгруппа M_1 такая, что $M_1 \ne 1$. Очевидно, что $H = [P]M_1$ – максимальная подгруппа в G. Т. к. H сверхразрешима, то в H существует максимальная подгруппа H_1 такая, что $M_1 \le H_1$ и $|H : H_1| = p$. По условию подгруппа H_1 – tcc-подгруппа группы G. Тогда $H_1V = G$, где V – ее tcc-добавление в G. По лемме 2.1 $P \le V$ и $P \cap H_1 = 1$. Тогда по тождеству Дедекинда

$$H_1 = H_1 \cap PM_1 = (H_1 \cap P)M_1 = M_1 .$$

Поэтому $|P| = p$. Противоречие.

Значит, $|M| = q$ и P – максимальная подгруппа. Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P. Тогда по условию $P_1K = G$, где K – tcc-добавление к P_1 в G. По лемме 2.1 $P \le K$ и $P \cap P_1 = 1$, что возможно только при $|P| = p$. Противоречие. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 320 с.

2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer. – 1967.

3. Huppert, B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert // Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

4. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Passaic : Polygonal Publishen House, 1982.

5. Поляков, Л. Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л. Я. Поляков // Конечные группы : сб. – Минск : Наука и техника, 1966. – С. 75–88.

6. Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A. Mann // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – Vol. 132. – P. 395–409.

7. Ковалева, В. А. Конечные группы с заданными обобщенно максимальными подгруппами (обзор). I. Конечные группы с обобщеннонормальными *n*-максимальными подгруппами / В. А. Ковалева // ПФМТ. – 2016. – Т. 29, № 4. – С. 48–58.

8. Guo, W. Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3–4. – P. 433–449.

9. Guo, W. Conditionally Permutable Subgroups and Supersolubility of Finite Groups / W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba // SEAMS Bull. Math. – 2004. – Vol. 29, № 2. – P. 240–254.

10. Arroyo-Jorda, M. Conditional permutability of subgroups and certain classes of groups / M. Arroyo-Jorda, P. Arroyo-Jorda // Journal of Algebra. – 2017. – Vol. 476. – P. 395–414.

11. On conditional permutability and factorized groups / M. Arroyo-Jorda [et al.] // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 2014. – Vol. 193. – P. 1123–1138.

12. Monakhov, V. S. On the supersoluble residual of a product of subnormal supersoluble subgroups / V. S. Monakhov, I. K. Chirik // Siberian Math. J. – 2017. – Vol. 58, № 2. – P. 271–280.

13. Doerk, K. Minimal nicht überauflösbare, endliche gruppen / K. Doerk // Math. Zeitschrift. – 1966. – Vol. 91. – P. 198–205.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.10.2019

Trofimuk A. A., Lukyanenko V. O. **On the Supersolubility of a Group with Given Conditions of Permutability of Maximal Subgroups**

A subgroup A of a group G is called tcc-subgroup of G, if there is a subgroup T of G such that $G = AT$ and for any $X \le A$ and for any $Y \le T$ there exists an element $u \in \langle X,Y \rangle$ such that $XY^u \le G$. In present paper the supersolubility of a group G is obtained in each of the following cases: all maximal subgroups of G are tcc-subgroups in G; all 2-maximal subgroups of G are tcc-subgroups in G.