УДК 517.9

А. Н. Сендер
канд. физ.-мат. наук, доц.,
зав. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: alexander_sender@tut.by

P-АДИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ КАК АППАРАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНО-ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$

Рассматривается приближение непрерывных p-адических функций p-адического аргумента с помощью сплайнов, имеющих следующий вид: $L_{n,m}(x,\alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \frac{\lambda_k}{|x-k|_p^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$, _где их параметры определяются из интерполяционных отношений с помощью приближенной функции. Теорема о равномерной сходимости приближения непрерывной функции с помощью сплайнов доказывается для различных_ $\alpha \in \mathbb{Q}$.

В теории чисел наряду с полем действительных чисел огромную роль играет поле p-адических чисел [1; 2], на котором возможно построение нетривиального анализа. А.М. Островский доказал, что на поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ имеются только два существенно разных нормирования: обычный модуль $|\cdot|$ и p-адическая норма $|\cdot|_p$.

Пусть p – простое число, $x \in \mathbb{Q}$. В поле $\mathbb{Q}$ введем норму по правилу

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\gamma(x)}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

где $\gamma(x)$ определяется из представления $x = p^{\gamma}\dfrac{m}{n}$, $m, n,\ \gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Q}$ и числа m и n взаимно просты с p.

Норма $|x|_p$ обладает следующими свойствами:

1) $|x|_p \geq 0$, если $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$;

3) $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$.

В случае когда $|x|_p \neq |y|_p$, мы имеем равенство $|x+y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$. Определенная таким образом норма $|x|_p$ называется _p-адической нормой_. Поле $\mathbb{Q}$, пополненное по p-адической норме, называется полем p-адических чисел. Поле $\mathbb{Q}$, пополненное по обычному модулю называется полем вещественных чисел.

Существует несколько реализаций p-адических чисел, одну из которых мы только что упомянули. Приведем другую их реализацию. P-адическим числом называется формальный степенной ряд вида $x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^k$, где $0 \leq x_k \leq p-1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{Z}$ и $x_N \neq 0$. Множество таких чисел обозначается через $\mathbb{Q}_p$. Целой частью p-адического числа называется число вида $[x]_p = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p^k$, а дробной частью – число вида

$\{x\}_p = \sum_{k=N}^{-1} x_k p^k$. Множество чисел с нулевой дробной частью называется целыми p-адическим числами и обозначается через $\mathbb{Z}_p$.

Теперь, когда мы уже определили p-адические числа как формальные степенные ряды, то норму в $\mathbb{Q}_p$ можно переписать в виде:

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-N}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Таким образом, формальные степенные ряды, являющиеся элементами $\mathbb{Q}_p$, сходятся по p-адической норме. Теперь приведем основные свойства $\mathbb{Q}_p$: все треугольники равнобедренные и остроугольные, т. е. если одна сторона треугольника меньше другой, то третья равна большей; каждый шар в $\mathbb{Q}_p$ является открыто-замкнутым; каждая точка шара является его центром; для двух шаров в $\mathbb{Q}_p$ возможны две ситуации: два шара либо не пересекаются, либо шар с меньшим радиусом содержится в шаре с большим радиусом; $\mathbb{Z}_p = \{x \in Q_p : |x|_p \leq 1\}$ – компактное открытое множество (обычно компакт замкнут).

Следует отметить, что $\mathbb{Q}_p$ и R являются полными и локально-компактными, но R – является связным, а $\mathbb{Q}_p$ – вполне несвязно. Из указанных свойств $\mathbb{Q}_p$ как ультраметрического пространства вытекает его полная несвязность.

Сформулируем теорему о равномерном приближении непрерывной функции локально-постоянной функцией.

Теорема 1 [3]. *Пусть* $X \subset \mathbb{Z}_p$ *и* $f : X \to \mathbb{Q}_p$ *– непрерывная функция. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая локально-постоянная функция* g*, что для любого* $x \in X$ $|f(x) - g(x)|_p < \varepsilon$.

Теорией аппроксимации в неархимедовом анализе (в частности, p-адическом) занимались многие математики, однако большинство работ по p-адической интерполяции и аппроксимации посвящены обобщению интерполяционных теорем Дьедонне и Малера либо являются частными случаями теоремы Стоуна – Вейерштрасса.

Одной из *задач* исследования является нахождение сплайна, который равномерно приближал бы функцию из пространства $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$. По теореме 1 любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить локально-постоянной функцией. Исследуемые непрерывные функции рассматриваются на $\mathbb{Z}_p$. Но т. к. $\mathbb{Z}_p$ является компактом, то локально-постоянная функция есть конечная линейная комбинация индикаторов шаров. Более того, индикатор является непрерывной функцией и конечные линейные комбинации индикаторов шаров плотны в $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$. Поэтому чтобы равномерно приблизить сплайнами произвольную непрерывную функцию, достаточно уметь приближать p-адическими сплайнами индикатор шара, лежащего в единичном шаре, т. е. в $\mathbb{Z}_p$.

Данная работа посвящена приближению непрерывной функции $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{K}$, где $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$, по норме $\| f \| = \max_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|_p$. $\mathbb{K}$ – трансцендентное расширение поля $\mathbb{Q}_p$, содержащее $\mathbb{Q}_p$ и p^α, т. е.

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p((p^\alpha)) = \left\{ x = \sum_{k=N}^{\infty} x_k p^{\alpha k}, x_k \in \mathbb{Q}_p \right\} =$$

$$= \left\{ x = \sum_{k=N}^{\infty} \left(\sum_{j=n_k}^{\infty} x_{k,j} p^j \right) p^{\alpha k}, x_{k,j} \in \{0,1,\ldots,p-1\} \right\} =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{(k,j)\in Q(x)\subset \mathbb{Z}^2/\sim} x_{k,j} p^{j+\alpha k}, & \textit{если } \alpha - \text{рациональный}, \\ \sum\limits_{(k,j)\in Q(x)\subset \mathbb{Z}^2} x_{k,j} p^{j+\alpha k}, & \textit{если } \alpha - \text{иррациональный}, \end{cases}$$

где $Q(x)$ – множество индексов, по которым идет суммирование. По теоремам о существовании и единственности продолжения неархимедовой нормы норма $|p^\alpha|_p = p^{-\alpha}$, заданная на $\mathbb{Q}_p$, продолжается на все поле $\mathbb{K}$.

Приближение будет осуществляться линейными комбинациями сдвигов функции $\frac{1}{|x|_p^\alpha}$ методом интерполяции: значение аппроксиманта должно совпадать со значениями функции на дискретном множестве (чаще всего на конечном). Эти соотношения интерполяции всегда приводят к системе линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей. В качестве аппроксиманта будем брать функцию

$$\varphi_\alpha(r) = \begin{cases} \frac{1}{r^\alpha}, & r > 0, \\ 0, & r = 0, \end{cases}$$

где α – положительное рациональное число. В итоге аппроксимант будет иметь вид:

$$L_{n,m}(x,\alpha) = \sum_{k=1}^{p^{n+m}} \lambda_k \varphi_\alpha(|x - x_k|_p), \tag{1}$$

где x_k – узлы интерполяции (в нашем случае числа $\{0,1,2,\ldots,p^{n+m}-1\}$, занумерованные в лексикографическом порядке), а коэффициенты λ_k находятся из системы линейных уравнений (соотношений интерполяции):

$$\sum_{k=1}^{p^{n+m}} \lambda_k \varphi_\alpha(|x_i - x_k|_p) = f(x_i),\ i = 1,\ldots,p^{n+m}. \tag{2}$$

Аппроксимант вида (1) называется p-адическим сплайном.

Следующая лемма является вспомогательной при доказательстве утверждения леммы 2.

Лемма 1. *Функция* $\varphi_\alpha(x) = |x|_p^{-\alpha}$ *является непрерывной в* $\mathbb{Z}_p$.

Доказательство. Т. к. функция $\varphi_\alpha|_{\mathbb{Z}_p\setminus\{0\}}$ – локально-постоянная, то она непрерывна. Проверим непрерывность функции φ_α в точке нуль. Для этого нужно показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\varphi_\alpha(x) = 0$. Бесконечно малая величина x представляется в виде

$$x = ap^{l(n)},$$

где

$$|a|_p = 1 \text{ и } l(n) \to +\infty \text{ при } n \to +\infty.$$

Тогда

$$\left|\varphi_\alpha(x)\right|_p = \left|\left|ap^{l(n)}\right|_p^{-\alpha}\right|_p = p^{-\alpha l(n)}.$$

Если $x \to 0$, то $l(n) \to +\infty$ и $\left|\varphi_\alpha(x)\right|_p \to 0$. Поэтому $\varphi_\alpha \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$, что и требовалось доказать.

В данной статье исследуется расстояние в пространстве $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ между характеристической функцией шара $B[a, p^{-m}]$ (m – фиксированное неотрицательное целое число) и соответствующим p-адическим сплайном в зависимости от параметра α. Показано, что при $0 < \alpha \le 1$ расстояние неуменьшаемо, а при $\alpha > 1$ расстояние вычисляется точно либо оценивается сверху величиной, стремящейся к нулю, когда n стремится к бесконечности.

Мы будем рассматривать случай, когда $f = I_{B[a,p^{-m}]}$, где $I_{B[a,p^{-m}]}$ – характеристическая функция шара $B[a, p^{-m}]$. Такой выбор функции f не ограничивает общности, поскольку $I_{B[a,p^{-m}]} \in C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ и конечные линейные комбинации характеристических функций шаров плотны в $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$. Задача интерполирования состоит в том, чтобы найти коэффициенты λ_k для функции вида (1) из равенства (2).

Формула (2) – это система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов λ_i, $i = 1, 2, \ldots, p^{n+m}$, причем элементы матрицы этой системы равны

$$A_{ij} = \varphi_\alpha(|x_i - x_j|_p), i, j = 1, \ldots, p^{n+m}.$$

Матрица A имеет вид

$$A = \sum_{k=1}^{n+m} (I_k - I_{k-1}) p^{\alpha(n+m-k)},$$

где $I_k = \left(\delta_{\left[\frac{i-1}{p^k}\right], \left[\frac{j-1}{p^k}\right]}\right)_{i,j=1}^{p^{n+m}}$, $k = 0, 1, \ldots, n+m$ – блочно-диагональная матрица размерности $p^{n+m} \times p^{n+m}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$ (подробнее в [4; 5]).

Более наглядно матрицу I_k можно изобразить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Матрица A для случая, когда $p=3$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \\ 1^\alpha & 1^\alpha & 1^\alpha \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} 0 & 3^\alpha & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 0 & 3^\alpha \\ 3^\alpha & 3^\alpha & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем матрицу к виду $A=\sum_{k=0}^{n+m} a_k I_k$. Тогда имеем следующую цепочку равенств:

$$A=\sum_{k=1}^{n+m}(I_k-I_{k-1})p^{\alpha(n+m-k)}=(I_1-I_0)p^{\alpha(n+m-1)}+(I_2-I_1)p^{\alpha(n+m-2)}+\ldots+$$
$$+(I_{n+m}-I_{n+m-1})p^{\alpha(n+m-n-m)}=-I_0p^{\alpha(n+m-1)}+$$
$$+I_1p^{\alpha(n+m-2)}(p^\alpha-1)+\ldots+I_kp^{\alpha(n+m-k+1)}(p^\alpha-1)+\ldots+I_np^{\alpha(n+m-n-m)},$$

откуда получим значения коэффициентов:

$$a_0=-p^{\alpha(n+m-1)},\quad a_k=p^{\alpha(n+m-k-1)}(p^\alpha-1),\quad k=1,\ldots,n+m-1, \tag{3}$$

$$a_{n+m}=1. \tag{4}$$

Тогда для матрицы A (см. [2]) существует обратная матрица

$$A^{-1}=\sum_{k=0}^{n+m} b_k I_k, \tag{5}$$

где

$$b_0 = \frac{1}{a_0}, \quad b_k = -\frac{a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i}, \quad k = 1,..., n+m. \tag{6}$$

Справедлива следующая теорема о вычислении коэффицентов λ_k для сплайна вида (1).

Теорема 2. *Задача* (2) *имеет единственное решение для любой правой части, а для* $f = I_{B[a,p^{-m}]}$ *коэффициенты* λ_i *вычисляются по следующим формулам:*

$$\lambda_i = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k, \quad 1 \le i \le p^{n+m} : x_i \in B[a, p^{-m}], \tag{7}$$

$$\lambda_i = p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k, \quad 1 \le i \le p^{n+m} : x_i \in S[a, p^{-m+N}], где\ N = 1,..., m. \tag{8}$$

Для доказательства теоремы о приближении функции из пространства $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{K})$ p-адическим сплайном вида (1) нам потребуется следующее утверждение, являющееся обобщением утверждения: *если* $|x|_p > |y|_p$, *то* $|x + y|_p = |x|_p$, которое доказывается методом математической индукции [3].

Утверждение 1. *Если* $|x_1|_p > \ldots > |x_n|_p$, *то* $|x_1 + \ldots + x_n|_p = |x_1|_p$.

Чтобы доказать равномерную сходимость данного p-адического сплайна к характеристической функции шара, нужно вначале показать справедливость следующей леммы.

Лемма 2. *Справедлива следующая формула:*

$$\max_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha) \right|_p = \max_{k=1,...p^{n+m}} |\lambda_k|_p \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}}. \tag{9}$$

Доказательство. Возьмем произвольный $x \in \mathbb{Z}_p = \coprod_{k=1}^{p^{n+m}} B[x_k, p^{-n-m}]$. Очевидно, что x попадет в некоторый шар $B[x_\nu, p^{-n-m}]$, $\nu \in \{1, 2, \ldots, p^{n+m}\}$. Рассмотрим модуль разности:

$$\left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha) \right|_p = \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - \sum_{i=1}^{p^{n+m}} \lambda_i \varphi_\alpha(|x - x_i|_p) \right|_p. \tag{10}$$

Поскольку $|x - x_i|_p = |x_i - x_\nu|_p$, $\forall i \ne \nu$, $i = 1, \ldots, p^{n+m}$ (утверждение 1), то левая часть равенства (10) приведется к виду:

$$\left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - \sum_{i=1}^{\nu-1} \lambda_i \varphi_\alpha(|x_\nu - x_i|_p) - \sum_{i=\nu+1}^{p^{n+m}} \lambda_i \varphi_\alpha(|x_\nu - x_i|_p) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p =$$

$$= \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x_\nu, \alpha) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p =$$

$$= \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - I_{B[a,p^{-m}]}(x_\nu) - \lambda_\nu \varphi_\alpha(|x - x_\nu|_p) \right|_p. \tag{11}$$

Т. к. $x \in B[x_\nu, p^{-n-m}]$ и поскольку в $\mathbb{Q}_p$ шары либо не пересекаются, либо шар с меньшим радиусом содержится в шаре с большим радиусом, то либо

$$B[x_\nu, p^{-n-m}] \bigcap B[a, p^{-m}] = \varnothing,$$

и тогда

$$I_{B[a,p^{-m}]}(x) = I_{B[a,p^{-m}]}(x_\nu) = 0,$$

либо

$$B[x_\nu, p^{-n-m}] \subset B[a, p^{-m}],$$

и тогда

$$I_{B[a,p^{-m}]}(x) = I_{B[a,p^{-m}]}(x_\nu) = 1.$$

В обоих случаях имеем

$$I_{B[a,p^{-m}]}(x) = I_{B[a,p^{-m}]}(x_\nu).$$

Отсюда, учитывая (10) и (11), получим равенство:

$$\left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha) \right|_p = \left|\lambda_\nu\right|_p \frac{1}{\left\| x - x_\nu \right|_p \Big|_p^\alpha}, \; x \in \mathbb{Z}_p. \tag{12}$$

Возьмем максимум от обеих частей, при этом получим:

$$\max_{x\in\mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha) \right|_p = \left|\lambda_\nu\right|_p \frac{1}{\left\| x^* - x_\nu \right|_p \Big|_p^\alpha}, \; x^* \in B[x_\nu, p^{-m-n}],$$

где x^* – точка, в которой достигается максимум правой части равенства (12), согласно лемме 1 о непрерывности функции $\varphi_\alpha(x)$ в $\mathbb{Z}_p$. Чтобы значение правой части (12) было максимальным, необходимо и достаточно, чтобы $x^* \in S[x_\nu, p^{-m-n}]$ и было максимальным число $\left|\lambda_\nu\right|_p$. Удовлетворив этим требованиям, получим утверждение леммы.

Используя результаты леммы 2, получаем теорему о равномерном приближении характеристической функции шара с помощью p-адического сплайна.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{Q}$. *Тогда справедливы соотношения:*

1) $\max\limits_{x\in\mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha) \right|_p = \dfrac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}}$ для $\alpha > 2$.

2) $\max\limits_{x\in\mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,2) \right|_p = \dfrac{1}{p^{(n+1)}}$ для $\alpha = 2$.

3) $\max\limits_{x\in\mathbb{Z}_p} \left| I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha) \right|_p = \dfrac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}}$ *для* $1 < \alpha < 2$.

4) $\max\limits_{x\in\mathbb{Z}_p} \left| I_{B[0,1]}(x) - L_{n,m}(x,1) \right|_p \geq \dfrac{1}{p}$ для $\alpha = 1$.

5) $\max\limits_{x\in\mathbb{Z}_p} | I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha) |_p = \dfrac{1}{p^{\alpha}}$ для $0<\alpha<1$.

где сплайн $L_{n,m}(x,\alpha) = \sum\limits_{k=1}^{p^{n+m}} \dfrac{\lambda_k}{|x-k|_p^{\alpha}}$, $\alpha>1, \alpha\in\mathbb{Q}$, $\lambda_k \in \{1,\dots,p^{n+m}\}$.

В $\mathbb{Q}_p$ норма $|p^{\alpha}|_p = p^{-\alpha}$ принимает дискретные значения, равные целой степени p. Но т. к. $\alpha\in\mathbb{Q}$, то в данном случае функция f будет принимать значения не из поля $\mathbb{Q}_p$, а из поля K, являющегося трансцендентным расширением поля $\mathbb{Q}_p$, содержащего $\mathbb{Q}_p$ и p^{α}.

Доказательство. Доказательство теоремы вытекает из леммы 2. Надо лишь найти значение $\max\limits_{k=1,\dots,p^{n+m}} |\lambda_k|_p$ и подставить его в выражение (9). Для вычисления максимума нужно воспользоваться формулами (5), (6) и утверждением 2.

Вначале докажем теорему для случая, когда $\alpha\geq 2$. Из формул (3), (4) следует, что

$$|a_k|_p = p^{-\alpha(n+m-k-1)}, \quad k=0,1,\dots,n+m-1, \quad |a_{n+m}|_p = 1. \tag{13}$$

Подставим в формулу (7) значения b_k, $k=0,1,\dots,n+m$, в соответствии с равенствами (6):

$$\lambda_i = \sum_{k=0}^{n} b_k p^k + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{-a_k p^k}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum\limits_{i=0}^{k} a_i p^i} +$$

$$+p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum\limits_{i=0}^{k} a_i p^i} = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k} a_i p^i} - \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i p^i} \right) +$$

$$+p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum\limits_{i=0}^{k} a_i p^i} = \frac{1}{a_0} + \left(\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{1} a_i p^i} - \frac{1}{a_0} \right) +$$

$$+\left(\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{2} a_i p^i} - \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{1} a_i p^i} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} - \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i p^i} \right) +$$

$$+p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum\limits_{i=0}^{k} a_i p^i} = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum\limits_{i=0}^{k} a_i p^i}.$$

В итоге выражение (7) примет вид

$$\lambda_i = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i p^i} + p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{-a_k}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum\limits_{i=0}^{k} a_i p^i}. \tag{14}$$

Вычислим p-адический модуль от слагаемых в (14), используя равенства (13). Тогда $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$ и, используя утверждение 1, имеем

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i p^i\right|_p = \left|a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i p^i\right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)n}. \tag{15}$$

В результате первое слагаемое (14) примет вид:

$$\left|\frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}\right|_p = p^{\alpha(n+m-1)-(\alpha-1)n} = p^{\alpha(m-1)+n}. \tag{16}$$

Для того чтобы найти p-адический модуль $|b_k|_p$, вычислим p-адические модули выражений

$$\left|\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i\right|_p = \left|a_0 + \sum_{i=1}^{k-1} a_i p^i\right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)(k-1)},$$

$$\left|\sum_{i=0}^{k} a_i p^i\right|_p = \left|a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i p^i\right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)k}.$$

Тогда окончательный результат для $|b_k|_p$ будет следующим:

$$|b_k|_p = \left|\frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i}\right|_p = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)k}}, \text{ где } k = n+1, ..., n+m-1. \tag{17}$$

Теперь вычислим $|b_{n+m}|_p$. Для этого нужно вычислить p-адические модули

$$\left|\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i\right|_p = \left|a_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i\right|_p = \max\left\{\left|-p^{-\alpha(n+m-1)}\right|_p, \left|\sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i\right|_p\right\} =$$

$$= \max\left\{p^{-\alpha(n+m-1)}, \left|\sum_{i=1}^{n+m-1} p^{\alpha(n+m-1)} \cdot (p^{\alpha} - 1) \cdot p^{(1-\alpha)i}\right|_p\right\} =$$

$$= \max\left\{p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m+1}\right\} = p^{-n-m+1},$$

$$\left|\sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i\right|_p = \left|a_0 + \sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m}\right|_p =$$

$$= \max\left\{\left|-p^{-\alpha(n+m-1)}\right|_p, \left|\sum_{i=1}^{n+m-1} a_i p^i\right|_p, |a_{n+m} p^{n+m}|_p\right\} =$$

$$= \max\left\{p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m+1}, p^{-n-m}\right\} = p^{-n-m+1}.$$

В итоге получим:

$$|b_{n+m}|_p = \left| \frac{-1}{\sum\limits_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum\limits_{i=0}^{n+m} a_i p^i} \right|_p = p^{-2(n+m-1)}. \tag{18}$$

Рассмотрим два случая. Если $\alpha > 2$, то $|b_{n+1}|_p$ больше всех остальных $|b_k|_p$, $k = n+2,\ldots,n+m$. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m}\right|_p = \max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k\right|_p, |b_{n+m}|_p\right\} =$$
$$= \max\left\{\frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}}, p^{-2(n+m-1)}\right\} = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}} = |b_{n+1}|_p .$$

Отсюда при $\alpha > 2$

$$\left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = p^{-n} \cdot |b_{n+1}|_p = p^{-n} \cdot \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)(n+1)}} = p^{\alpha(m-1)+n+1}. \tag{19}$$

Если $\alpha = 2$, то $|b_{n+1}|_p = |b_{n+2}|_p = \ldots = |b_{n+m-1}|_p = p^{2m+2n-1} > |b_{n+m}|_p$. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m}\right|_p \le \max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k\right|_p, |b_{n+m}|_p\right\} =$$
$$= \max\left\{p^{2(n+m)-1}, p^{-2(n+m-1)}\right\} = p^{2(n+m)-1} = |b_{n+1}|_p .$$

При $\alpha = 2$

$$\left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p \le p^{-n} \cdot |b_{n+1}|_p = p^{-n} \cdot \frac{p^{2(n+m)-1}}{p^{(2-2)(n+1)}} = p^{2m+n-1}. \tag{20}$$

Очевидно, что значение модуля из формулы (19) и формулы (20) больше модуля из формулы (16). Поэтому модуль правой части равенства (14) для $\alpha > 2$ равен $p^{\alpha(m-1)+n+1}$, а для $\alpha = 2$ не превосходит p^{2m+n-1}. По доказанному видно, что для $\alpha > 2$

$$\left|p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k\right|_p \le \left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1}$$

для всех $N = 1,\ldots,m,$ а для $\alpha = 2$

$$\left|p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k\right|_p \le \left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = p^{2m+n-1}$$

для всех $N = 1,\ldots,m$. Отсюда вытекает равенство

$$\max_{k=1,\ldots p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1}, \quad \text{где } \alpha > 2. \tag{21}$$

В силу (20) имеем неравенство

$$\max_{k=1,\dots p^{n+m}} \left|\lambda_k\right|_p \le p^{2m+n-1}, \quad где\ \alpha = 2. \tag{22}$$

Подставляя (21) в (9), для $\alpha > 2$ получим:

$$\max_{x\in\mathbb{Z}_p} \left|I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha)\right|_p = p^{\alpha(m-1)+n+1} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}}. \tag{23}$$

Это эквивалентно утверждению 1 теоремы.

Подставляя (22) в (9), для $\alpha = 2$ имеем:

$$\max_{x\in\mathbb{Z}_p} \left|I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha)\right|_p \le p^{2m+n-1} \cdot \frac{1}{p^{2(n+m)}} = \frac{1}{p^{n+1}}. \tag{24}$$

Это эквивалентно утверждению 2 теоремы.

Теперь рассмотрим случай $1 < \alpha < 2$.

Значение p-адического модуля для коэффициентов из формул (3) и (4) будет равно:

$$|a_i|_p = p^{-\alpha(n+m-i-1)}, \quad i = 0,1,\dots,n+m-1, \quad |a_{n+m}|_p = 1. \tag{25}$$

Вычислим p-адический модуль от слагаемых в (14), используя формулы (25).

Получим: $|a_i p^i|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$, $i = 0,1,\dots,n+m-1$,

$$\left|\sum_{i=0}^{n} a_i p^i\right|_p = \left|a_n p^n\right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)n}, \tag{26}$$

$$\left|\frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}\right|_p = p^{\alpha(n+m-1)-(\alpha-1)n} = p^{\alpha(m-1)+n}. \tag{27}$$

Чтобы найти p-адические модули коэффициентов $|b_k|_p$, вычислим p-адические модули приведенных ниже сумм для случая, когда $1 < \alpha < 2$:

$$\left|\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i\right|_p = \left|a_{k-1} p^{k-1}\right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)(k-1)},$$

$$\left|\sum_{i=0}^{k} a_i p^i\right|_p = \left|a_k p^k\right|_p = p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)k}.$$

Тогда значение p-адического модуля для $|b_k|_p$ для данного случая будет иметь вид:

$$\left|b_k\right|_p = \left|\frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i}\right|_p = \frac{p^{\alpha(n+m)-1}}{p^{(\alpha-2)k}}, \quad где \quad k = n+1,\dots,n+m-1. \tag{28}$$

Теперь вычислим $|b_{n+m}|_p$. Для этого нужно вычислить p-адические модули следующих сумм:

$$\left|\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i\right|_p = \left|a_{n+m-1} p^{n+m-1}\right|_p = p^{-(n+m-1)}.$$

$$\left|\sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i\right|_p = \left|\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m} p^{n+m}\right|_p = \max\left\{\left|\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i\right|_p, |\, a_{n+m} p^{n+m}\, |_p\right\} =$$

$$= \max\left\{p^{-(n+m-1)}, p^{-n-m}\right\} = p^{-(n+m-1)}.$$

В итоге получим значение p-адического модуля для b_{n+m}:

$$\left|b_{n+m}\right|_p = \left|\frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i}\right|_p = p^{2(n+m-1)}. \tag{29}$$

Если $1 < \alpha < 2$, то $\left|b_{n+1}\right|_p$ больше всех остальных $\left|b_k\right|_p$, $k = n+2,\ldots,n+m$. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m}\right|_p = \max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k\right|_p, \left|b_{n+m}\right|_p\right\} =$$

$$= \max\left\{p^{2(n+m)+\alpha-3}, p^{2(n+m-1)}\right\} = p^{2(n+m)+\alpha-3} = \left|b_{n+1}\right|_p.$$

Отсюда получаем:

$$\left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = p^{-n} \cdot \left|b_{n+m-1}\right|_p = p^{-n} \cdot p^{2(n+m)+\alpha-3} = p^{n+2m+\alpha-3}. \tag{30}$$

Очевидно, что p-адический модуль (30) больше p-адического модуля (27). Поэтому модуль правой части равенства (14) для $1 < \alpha < 2$ равен $p^{n+2m+\alpha-3}$. Из доказанного видно, что для $1 < \alpha < 2$

$$\left|p^n \sum_{k=n+N}^{n+m} b_k\right|_p \le \left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = p^{n+2m+\alpha-3} \ \textit{для всех}\ N = 1,\ldots,m.$$

Тогда

$$\max_{k=1,\ldots p^{n+m}} \left|\lambda_k\right|_p = p^{n+2m+\alpha-3}. \tag{31}$$

Подставляя (31) в (9), имеем:

$$\max_{x\in\mathbb{Z}_p} \left|I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha)\right|_p = p^{n+2m+\alpha-3} \cdot \frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}}. \tag{32}$$

В каждом из условий 1–3 теоремы 3 справа стоит некоторая вещественнозначная функция ошибки, зависящая от параметра α. Найдем пределы слева и справа в точке $\alpha = 2$. Тогда из соотношений 1 и 3 теоремы 3 имеем:

$$\lim_{\alpha\to 2+0} \frac{1}{p^{(\alpha-1)(n+1)}} = \frac{1}{p^{n+1}},$$

$$\lim_{\alpha\to 2-0}\frac{p^{(2-\alpha)m+\alpha-3}}{p^{(\alpha-1)n}}=\lim_{\alpha\to 2-0}\frac{p^{-1}}{p^{n}}=\frac{1}{p^{n+1}}.$$

Отсюда видно, что пределы слева и справа в точке $\alpha = 2$ совпадают и равняются значению функции ошибки в той же самой точке $\alpha = 2$ (теорема 3 соотношение 2), т. е.

$$\max_{x\in\mathbb{Z}_p}|I_{B[a,p^{-m}]}(x)-L_{n,m}(x,2)|_p=\frac{1}{p^{(n+1)}},\ где\ \ \alpha=2.$$

Это эквивалентно утверждению 3 теоремы.

Покажем, что при $\alpha = 1$ выражение

$$\left|I_{B[a,p^{-m}]}(x)-L_{n,m}(x,1)\right|_p$$

не стремится к нулю. Для этого достаточно привести хотя бы один контрпример. Пусть $m = 0$. Тогда

$$\lambda_j=\sum_{k=0}^{n}b_k p^k=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}a_i p^i}\ \text{ для всех }\ j=1,\ldots,p^n$$

и с учетом формул (3) и (4) справедлива оценка

$$\left|\sum_{i=0}^{n}a_i p^i\right|_p=\left|p^{n-1}(n(p-1)-1)\right|_p\le p^{-n+1}\left|n(p-1)-1\right|_p\le p^{-n+1},$$

из которой следует соотношение:

$$\left|\lambda_j\right|_p\ge p^{n-1}. \tag{33}$$

Используя (33) в правой части формулы (9), получим:

$$\max_{k=1,\ldots p^n}\left|\lambda_k\right|_p\cdot\frac{1}{p^n}\ge\frac{p^{n-1}}{p^n}=\frac{1}{p}. \tag{34}$$

Это эквивалентно утверждению 4 теоремы.

Пусть $0<\alpha<1$. В этом случае значение p-адического модуля для коэффициентов из формул (3) и (4) будет равно:

$$|a_i|_p=p^{-\alpha(n+m-i-1)},\quad i=0,1,\ldots,n+m-1,\quad |a_{n+m}|_p=1. \tag{35}$$

Вычислим p-адический модуль от слагаемых в (14), используя формулы (35).

Тогда $|a_ip^i|_p=p^{-\alpha(n+m-1)+(\alpha-1)i}$, $i=0,1,\ldots,n+m-1$, и т. к. $|a_0|_p>|a_1p|_p>\ldots>|a_{n+m-1}p^{n+m-1}|_p$, то

$$\left|\sum_{i=0}^{n}a_i p^i\right|_p=\left|a_0\right|_p=p^{-\alpha(n+m-1)}, \tag{36}$$

откуда

$$\left|\frac{1}{\sum_{i=0}^{n} a_i p^i}\right|_p = p^{\alpha(n+m-1)} = p^{\alpha n+\alpha(m-1)}. \tag{37}$$

Чтобы найти p-адические модули коэффициентов $|b_k|_p$, вычислим p-адические модули следующих выражений для случая, когда $0<\alpha<1$:

$$\left|\sum_{i=0}^{k} a_i p^i\right|_p = |a_0|_p = p^{-\alpha(n+m-1)},\; k=0,1,\ldots n+m-1.$$

В итоге значение p-адического модуля для $|b_k|_p$ примет вид:

$$|b_k|_p = \left|\frac{-a_k}{\sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{k} a_i p^i}\right|_p = p^{\alpha(n+m+k-1)},\; где \quad k=n+1,\ldots,n+m-1. \tag{38}$$

Далее вычислим $|b_{n+m}|_p$, для чего нужно вычислить суммы

$$\left|\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i\right|_p = |a_0|_p = p^{-\alpha(n+m-1)}.$$

$$\left|\sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i\right|_p = \left|\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i + a_{n+m}p^{n+m}\right|_p = \max\left\{p^{-\alpha(n+m-1)}, |a_{n+m}p^{n+m}|_p\right\} =$$
$$= \max\left\{p^{-\alpha(n+m-1)}, p^{-n-m}\right\} = p^{-\alpha(n+m-1)}.$$

В результате получим:

$$|b_{n+m}|_p = \left|\frac{-1}{\sum_{i=0}^{n+m-1} a_i p^i \sum_{i=0}^{n+m} a_i p^i}\right|_p = p^{2\alpha(n+m-1)}. \tag{39}$$

Если $0<\alpha<1$, то $|b_{n+1}|_p < |b_{n+2}|_p < \ldots < |b_{n+m-1}|_p = |b_{n+m}|_p$. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k + b_{n+m}\right|_p \le \max\left\{\left|\sum_{k=n+1}^{n+m-1} b_k\right|_p, |b_{n+m}|_p\right\} =$$
$$= \max\left\{p^{2\alpha(n+m-1)}, p^{2\alpha(n+m-1)}\right\} = p^{2\alpha(n+m-1)} = |b_{n+m-1}|_p.$$

Отсюда

$$\left|p^n \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k\right|_p \le p^{-n}\cdot|b_{n+m-1}|_p = p^{-n}\cdot p^{2\alpha(n+m-1)} = p^{(2\alpha-1)n+2\alpha(m-1)}. \tag{40}$$

Поскольку p-адический модуль (37) больше p-адического модуля (40) для достаточно больших n $\left(n > \dfrac{\alpha(m-1)}{1-\alpha}\right)$, то

$$\max_{k=1,\ldots p^{n+m}} |\lambda_k|_p = p^{\alpha(n+m-1)}. \tag{41}$$

Подставляя (41) в (9), имеем:

$$\max_{x\in\mathbb{Z}_p}\left|I_{B[a,p^{-m}]}(x) - L_{n,m}(x,\alpha)\right|_p = p^{\alpha(n+m-1)}\cdot\frac{1}{p^{\alpha(n+m)}} = \frac{1}{p^{\alpha}}, \tag{42}$$

что эквивалентно утверждению 5 теоремы.

Согласно теореме 1, любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить локально постоянной функцией. Исследуемые непрерывные функции рассматриваются на множестве целых p-адических чисел. Но поскольку известно, что $\mathbb{Z}_p$ является компактом, то локально постоянная функция есть конечная линейная комбинация характеристических функций шаров. Следовательно, данную функцию можно равномерно приблизить конечной линейной комбинацией характеристических функций шаров, т. е.

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k I_{B[a_k,p^{-m_k}]} \rightrightarrows f(x), \quad \max_{k=1,\ldots,N} m_k \to \infty,\ \mu_k = f(a_k)\in\mathbb{K}.$$

На основании теоремы 1 и данных рассуждений покажем справедливость следующей теоремы о равномерной сходимости p-адического сплайна к непрерывной $\mathbb{Q}_p$-значной функции, заданной на $\mathbb{Z}_p$, если параметр $\alpha > 1$ и $\alpha\in\mathbb{Q}$.

Теорема 3. *Для любой функции* $f\in C(\mathbb{Z}_p,\mathbb{K})$ *существует последовательность* $L_{n,m}(x,\alpha)$, *где* $\alpha>1$, $\alpha\in\mathbb{Q}$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in Q_p}\left|L_{n,m}(x,\alpha) - f(x)\right|_p = 0. \tag{43}$$

Доказательство. Т. к. функцию $f\in C(\mathbb{Z}_p,\mathbb{K})$ можно равномерно приблизить линейной комбинацией характеристических функций шаров, то для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ такой, что для всех $N\ge N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\max_{x\in\mathbb{Z}_p}\left|\sum_{k=1}^{N}\mu_k I_{B[a_k,p^{-m_k}]}(x) - f(x)\right|_p < \varepsilon, \text{ для всех } x\in\mathbb{Z}_p. \tag{44}$$

Запишем сильное неравенство треугольника для $|\cdot|_p$:

$$\begin{gathered}\left|L_N(x,\alpha) - f(x)\right|_p = \\ = \left|L_N(x,\alpha) - \sum_{k=1}^{N}\mu_k I_{B[a_k,p^{-m_k}]}(x) + \sum_{k=1}^{N}\mu_k I_{B[a_k,p^{-m_k}]}(x) - f(x)\right|_p \le \\ \le \max\left\{\left|L_N(x,\alpha) - \sum_{k=1}^{N}\mu_k I_{B[a_k,p^{-m_k}]}(x)\right|_p, \left|\sum_{k=1}^{N}\mu_k I_{B[a_k,p^{-m_k}]}(x) - f(x)\right|_p\right\},\end{gathered} \tag{45}$$

где

$$L_N(x,\alpha) = \sum_{k=1}^{N}\mu_k L_{n_k,\,m_k}(x,\alpha).$$

Т. к. по теореме 3 p-адический сплайн равномерно приближает характеристическую функцию шара, то справедливы следующие оценки:

существует такой номер ν_1, что для любого $n_1 > \nu_1$

$$\left| I_{B[a_1, p^{-m_1}]}(x) - L_{n_1, m_1}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1,\ldots,N} |\mu_1|_p},$$

существует такой номер ν_2, что для любого $n_2 > \nu_2$

$$\left| I_{B[a_2, p^{-m_2}]}(x) - L_{n_2, m_2}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1,\ldots,N} |\mu_2|_p},$$

$$\ldots$$

существует такой номер ν_k, что для любого $n_k > \nu_k$

$$\left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1,\ldots,N} |\mu_k|_p},$$

$$\ldots$$

существует такой номер ν_N, что для любого $n_N > \nu_N$

$$\left| I_{B[a_N, p^{-m_N}]}(x) - L_{n_N, m_N}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1,\ldots,N} |\mu_N|_p},$$

для $k = 1, \ldots, N$. Т. к. этих номеров конечное число, то выберем из них максимальный такой, что

$$\nu = \max\left\{N_\varepsilon, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N\right\}.$$

Тогда для любого $n_k > \nu$ будем иметь

$$\left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1,\ldots,N} |\mu_k|_p}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=1}^{N} \mu_k I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - \sum_{k=1}^{N} \mu_k L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p = \\ &= \left| \sum_{k=1}^{N} \mu_k \left(I_{B[a_k, p^{-m_k}]}(x) - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right) \right|_p \le \\ &\le \max_{1,\ldots,N} |\mu_k|_p \cdot \left| I_{B[a_k, p^{-m_k}]} - L_{n_k, m_k}(x, \alpha) \right|_p \le \varepsilon. \end{aligned} \tag{46}$$

Т. к. первый член неравенства (45) меньше ε согласно неравенству (44), а второй меньше ε согласно выражению (46), то данное неравенство примет вид

$$\left|L_N(x,\alpha)-f(x)\right|_p \le \varepsilon,$$

что эквивалентно выражению (42).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schikhof, W. Ultrametric calculus / W. Schikhof. – Cambridge : University Press, 1984.

2. *P*-адический анализ и математическая физика / В. С. Владимиров [и др.]. – М. : Наука, 2001. – 352 с.

3. Радына, А. Я. Элементарныя ўводзіны ў *p*-адычны аналіз : дапаможнік / А. Я. Радына, Я. В. Радына. – Мінск : БДПУ, 2006. – 82 с.

4. Khrennikov, A. p-Adic interpolation and approximation of a continuous function by linear combi-nations of shifts of p-adic valuations / A. Khrennikov, A. Radyna // Journal of Approximation Theory. – 2003. – № 120. – P. 124–135.

5. Радына, А. Я. Інтэрпаляцыя и набліжэнне p-адычнымі лінейнымі сплайнамі функцыі класа $C(Z_p;R)$ / А. Я. Радына // Вес. НАН Беларусі. – 2004. – № 2. – С. 21–24.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 30.09.2019

Sender A. N. **P-adic Splines for Approximation of Local Constant Functions from $C(\mathbb{Z}_p,\mathbb{K})$**

The article is devoted to approximation of continuous p-adic function of p-adic argument by p-adic splines that is functions of the form $L_{n,m}(x,\alpha)=\sum_{k=1}^{p^{n+m}}\frac{\lambda_k}{|x-k|_p^{\alpha}}$, $\alpha\in\mathbb{Q}$ *where their parameters are defined from interpolation relations by a function to be approximated. The theorem about uniform approximation of a continuous function by such splines is proved for different* $\alpha\in\mathbb{Q}$.