УДК 513.82

А. А. Юдов[1], М. А. Кононюк[2], К. П. Козакевич[3], Е. В. Кисилюк[4]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц.,
доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]учитель математики гимназии № 1 г. Бреста
[3,4]магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: modelmath@brsu.brest.by

КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ СТРУКТУР НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Целью исследования является нахождение инвариантных подпространств, прямых и плоскостей для подгрупп Ли группы Ли H вращений пятимерного евклидова пространства и исследование инвариантных структур на однородных редуктивных пространствах с фундаментальной группой – группой Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Введение

Изучение геометрии однородных пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л. К. Тутаев, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, А. А. Бурдун, В. В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др.

В работе исследуется подгруппы Ли группы Ли движений пятимерного евклидова пространства, находятся инвариантные прямые и К-плоскости для таких подгрупп и исследуются инвариантные структуры на однородных пространствах, структурной группой которых является группа Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Инвариантные подпространства подгрупп Ли

Рассмотрим пространство R_5 – пятимерное евклидово пространство.

Выберем в пространстве R_5 репер $\varepsilon=(0,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)$, причем $e_1^2=1, e_2^2=e_3^2=e_4^2=e_5^2=1, (e_i,e_j)=0, i\neq j$.

Произвольную точку M пространства R_5 в репере ε зададим координатами $M(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$, которые будем записывать в виде $M(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T\equiv(X)_\varepsilon$.

На множестве реперов пространства R_5 действует группа Ли G движений, которая при заданном репере ε изоморфна группе матриц вида:

$$\overline{A}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & A\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $t=(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)^T, A-(5\times5)$ – матрица, причем $A^TE_5A=E_5$, где знак ^{T} означает транспонирование, а матрица E_5 является единичной матрицей, причем элементы главной диагонали 1, а прочие элементы нули.

При движении, заданном матрицей (1), репер ε переходит в репер $\varepsilon'=(0,e_1',e_2',e_3',e_4',e_5')=(0',e')$, где $e'=eA,\ 0'(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=(T)_\varepsilon$, а точка M переходит в точку M', имеющую в репере ε' такие же координаты, какие точка M имеет в репере ε.

Пусть $M'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (X)_{\varepsilon'}, M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (X')_{\varepsilon}$. Тогда получим: $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) = eA(X) = e((T) + A(X))$. С другой стороны, $\overline{OM'} = e(X')$. Отсюда $(X') = (T) + A(X)$, т. е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = \overline{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T. \qquad (2)$$

Таким образом, в пространстве R_5 действует слева группа Ли G, которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства R_5 по формуле (2). Алгебру Ли $\overline{G}$ этой группы можно отожествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix}\right\},$$

где $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)^T$, а матрица B удовлетворяет условию: $B^T E_5 + E_5 B = 0$.

Группа Ли H стационарности точки О и алгебра Ли $\overline{H}$ этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right\}, \ \overline{H} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right\}.$$

Рассмотрим в алгебре Ли $\overline{G}$ базис:

$$\begin{aligned} &i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{61}, i_7 = E_{23} - E_{32}, i_8 = E_{24} - E_{42}, \\ &i_9 = E_{25} - E_{52}, i_{10} = E_{26} - E_{62}, i_{12} = E_{34} - E_{43}, i_{13} = E_{35} - E_{53}, i_{14} = E_{36} - E_{63}, \\ &i_{16} = E_{45} - E_{54}, i_{17} = E_{46} - E_{64}, i_{19} = E_{56} - E_{65}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $E_{\alpha\beta} - (6 \times 6) -$ матрицы, у которых в α-й строке, β-м столбце стоит 1, а остальные элементы нули. При этом вектора i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора $i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}$ задают базис алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H вращений пространства L_5.

Согласно формуле

$$[A, B] = AB - BA, \qquad (4)$$

где $A, B \in \overline{G}$, получим формулы для коммутаторов базисных векторов $i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}$:

$$\begin{gathered} i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{61}, i_6 = E_{23} - E_{32}, i_7 = E_{24} - E_{42}, \\ i_8 = E_{25} - E_{52}, i_9 = E_{34} - E_{43}, i_{10} = E_{35} - E_{53}, i_{11} = E_{45} - E_{54}, i_{12} = E_{36} - E_{63}, \\ i_{13} = E_{45} - E_{54}, i_{14} = E_{46} - E_{64}, i_{15} = E_{56} - E_{65}. \end{gathered} \qquad (5)$$

Всего получено 11 подгрупп Ли $G_1 ... G_{11}$ группы Ли вращений, которые в базисе (1.15) задаются своими алгебрами Ли $\overline{G}_1 ... \overline{G}_{11}$ в виде:

$$\overline{G_1} = \{i_6\}, \overline{G_2} = \{i_6 + \lambda i_{13}\}, \overline{G_3} = \{i_6, i_{13}\}, \overline{G_4} = \{i_6, i_7, i_{10}\}, \overline{G_5} = \{i_6 + i_{13}, i_7 - i_{11}, i_8 + i_{10}\},$$
$$\overline{G_6} = \{i_6 + 2i_{13}, \sqrt{3}i_{12} + i_7 + i_{11}, \sqrt{3}i_9 - i_8 + i_{10}\}, \overline{G_7} = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\},$$
$$\overline{G_8} = \{i_6, i_{13}, i_7 - i_{11}, i_8 + i_{10}\}, \overline{G_9} = \{i_6, i_7, i_{10}, i_8 + i_9, i_{11} + i_{12}, i_{13} + i_{14}\},$$
$$\overline{G_{10}} = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{11}, i_8\}, \overline{G_{11}} = \{i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}\}$$

причем группа Ли G_{11} совпадает с группой Ли всех вращений H.

Рассматривается однопараметрическая подгруппа Ли G группы Ли вращений пятимерного евклидова пространства R_5, соответствующая алгебре Ли с оператором i_6:

$$\{i_6\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \tag{2.1}$$

Ставится задача найти все инвариантные относительно G одномерные, двумерные, трехмерные и четырехмерные векторные подпространства пространства R_5, а также инвариантные прямые и k-плоскости.

Найдем одномерные подпространства пространства R_5, инвариантные относительно этого оператора. Условие инвариантности подпространства с направляющим вектором $a(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ имеет вид: $ai_6 = \lambda a.$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-a_2, a_1, 0, 0, 0) = \lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5). \tag{2.2}$$

Отсюда следует система:

$$\begin{cases} -a_2 = \lambda a_1, \\ a_1 = \lambda a_2, \\ 0 = \lambda a_3, \\ 0 = \lambda a_4, \\ 0 = \lambda a_5. \end{cases} \tag{2.3}$$

Из первого и второго уравнений системы (2.3) следует: $-a_2 = \lambda^2 a_2$.

Рассмотрим два случая:

1. При $\lambda \neq 0: a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0.$

$-a_2 = \lambda^2 a_2 \Rightarrow a_2 = 0$, иначе $\lambda^2 = -1$, значит, и $a_1 = 0.$

Вывод: ненулевых решений нет.

2. При $\lambda = 0$: $a_1 = 0, a_2 = 0.$

Вывод: все подпространства инвариантны в виде: $\{a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5\}, \forall a_3, a_4, a_5.$

Найдем двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора i_6. Условие инвариантности подпространства с базисом $\{a, b\}$, $a(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, b $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ имеет вид: $ai_6 = \lambda a + \mu b, bi_6 = \nu a + \delta b.$

$$\begin{matrix}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \\ (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)\end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{matrix}(-a_2, a_1, 0, 0, 0) \\ (-b_2, b_1, 0, 0, 0)\end{matrix}. \qquad (2.4)$$

Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} -a_2 = \lambda a_1 + \mu b_1 & -b_2 = \nu a_1 + \delta b_1, \\ a_1 = \lambda a_2 + \mu b_2 & b_1 = \nu a_2 + \delta b_2, \\ 0 = \lambda a_3 + \mu b_3 & 0 = \nu a_3 + \delta b_3, \\ 0 = \lambda a_4 + \mu b_4 & 0 = \nu a_4 + \delta b_4, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 & 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases} \qquad (2.5)$$

С помощью замены базиса получаем, что решение системы (2.5) можно свести к рассмотрению 10 частных случаев $1^\circ - 10^\circ$:

$$1^0: \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, \qquad 6^0: \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_3 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_5 \end{pmatrix},$$

$$2^0: \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, \qquad 7^0: \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$3^0: \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_5 \end{pmatrix}, \qquad 8^0: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_5 \end{pmatrix},$$

$$4^0: \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad 9^0: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$5^0: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 1 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, \qquad 10^0: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$1^\circ. a(1, 0, a_3, a_4, a_5), b(0, 1, b_3, b_4, b_5).$

В этом случае система (2.5) имеет вид:

$$\begin{cases} 0=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0 \quad -1=\nu\cdot 1+\delta\cdot 0, \\ 1=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 1 \quad 0=\nu\cdot 0+\delta\cdot 1, \\ 0=\lambda a_3+\mu b_3 \quad 0=\nu a_3+\delta b_3, \\ 0=\lambda a_4+\mu b_4 \quad 0=\nu a_4+\delta b_4, \\ 0=\lambda a_5+\mu b_5 \quad 0=\nu a_5+\delta b_5. \end{cases}$$

Отсюда следует: $b_3=0, b_4=0, b_5=0, a_3=0, a_4=0, a_5=0.$

Получаем инвариантное подпространство в виде: $\{e_1, e_2\}$.

$2^\circ. a(1, a_2, 0, a_4, a_5), b(0, 0, 1, b_4, b_5).$

$$\begin{cases} -a_2=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0 \quad 0=\nu\cdot 1+\delta\cdot 0, \\ 1=\lambda\cdot a_2+\mu\cdot 0 \quad 0=\nu\cdot a_2+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 1 \quad 0=\nu\cdot 0+\delta\cdot 1, \\ 0=\lambda a_4+\mu b_4 \quad 0=\nu a_4+\delta b_4, \\ 0=\lambda a_5+\mu b_5 \quad 0=\nu a_5+\delta b_5. \end{cases}$$

Из системы получим: $-a_2=\lambda, 1=\lambda a_2$. Отсюда следует противоречие: $1=-a_2^2$. Система инвариантности противоречива.

$3^\circ. a(1, a_2, a_3, 0, a_5), b(0, 0, 0, 1, b_5).$

$$\begin{cases} -a_2=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0 \quad 0=\nu\cdot 1+\delta\cdot 0, \\ 1=\lambda\cdot a_2+\mu\cdot 0 \quad 0=\nu a_2+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda a_3+\mu\cdot 0 \quad 0=\nu a_3+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 1 \quad 0=\nu\cdot 0+\delta\cdot 1, \\ 0=\lambda a_5+\mu b_5 \quad 0=\nu a_5+\delta b_5. \end{cases}$$

Система инвариантности противоречива.

$4^\circ. a(1, a_2, a_3, a_4, 0), b(0, 0, 0, 0, 1).$

$$\begin{cases} -a_2=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0 \quad 0=\nu\cdot 1+\delta\cdot 0, \\ 1=\lambda a_2+\mu\cdot 0 \quad 0=\nu a_2+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda a_3+\mu\cdot 0 \quad 0=\nu a_3+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda a_4+\mu\cdot 0 \quad 0=\nu a_4+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda a_5+\mu\cdot 1 \quad 0=\nu a_5+\delta\cdot 1. \end{cases}$$

Система инвариантности противоречива, т. к. из нее следует: $a_2^2=-1.$

$5^\circ. a(0, 1, 0, a_4, a_5), b(0, 0, 1, b_4, b_5).$

$$\begin{cases} -1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_2 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 \quad 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1, \\ 0 = \lambda a_4 + \mu b_4 \quad 0 = \nu a_4 + \delta b_4, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 \quad 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases}$$

В этом случае система инвариантности противоречива, т. к. из нее следует: $1 = 0$.

$6^\circ. a(0, 1, a_3, 0, a_5), b(0, 0, 0, 1, b_5)$.

$$\begin{cases} -1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_3 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu a_3 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 \quad 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 \quad 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases}$$

Система инвариантности противоречива.

$7^\circ. a(0, 1, a_3, a_4, 0), b(0, 0, 0, 0, 1)$.

$$\begin{cases} -1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_3 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu a_3 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda a_4 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu a_4 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 \quad 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1. \end{cases}$$

Система инвариантности противоречива.

$8^\circ. a(0, 0, 1, 0, a_5), b(0, 0, 0, 1, b_5)$.

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 \quad 0 = \nu \cdot 1 + \delta \cdot 0, \\ 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 \quad 0 = \nu \cdot 0 + \delta \cdot 1, \\ 0 = \lambda a_5 + \mu b_5 \quad 0 = \nu a_5 + \delta b_5. \end{cases}$$

Система инвариантности принимает вид:

$$\lambda = 0,\ \mu = 0, \lambda a_5 + \mu b_5 = 0,\ \nu = 0, \delta = 0, \nu a_5 + \delta b_5 = 0.$$

Инвариантные пространства принимают вид: $\{e_3 + a_5 e_5, e_4 + b_5 e_5\}$.

$9^\circ. a(0, 0, 1, a_4, 0), b(0, 0, 0, 0, 1)$.

$$\begin{cases} 0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0 & 0=\nu\cdot 0+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0 & 0=\nu\cdot 0+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0 & 0=\nu\cdot 1+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda a_4+\mu\cdot 0 & 0=\nu a_4+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 1 & 0=\nu\cdot 0+\delta\cdot 1. \end{cases}$$

Система инвариантности принимает вид:

$$\lambda = 0,\ \mu = 0,\ \lambda a_4 = 0,\ \nu = 0,\ \delta = 0,\ \nu a_4 = 0.$$

Получаем инвариантные подпространства в виде: $\{e_3 + a_4 e_4, e_5\}$.

$10^\circ. a(0, 0, 0, 1, 0), b(0, 0, 0, 0, 1).$

$$\begin{cases} 0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0 & 0=\nu\cdot 0+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0 & 0=\nu\cdot 0+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0 & 0=\nu\cdot 0+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0 & 0=\nu\cdot 1+\delta\cdot 0, \\ 0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 1 & 0=\nu\cdot 0+\delta\cdot 1. \end{cases}$$

Система инвариантности не противоречива. Получаем инвариантное подпространство: $\{e_4, e_5\}$.

Результаты исследования инвариантных подпространств относительно оператора i_6 сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. Относительно оператора i_6 инвариантны только следующее одномерное подпространство пространства $R_5 : \{a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5\}, \forall a_3, a_4, a_5$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3 + a_5 e_5, e_4 + b_5 e_5\}, \{e_3 + a_4 e_4, e_5\}, \{e_4, e_5\}$.

Используя теорему 2.1, найдем подпространства инвариантные относительно всех операторов из групп $G_2, ..., G_{10}$.

Непосредственным вычислением доказываются следующие теоремы.

Теорема 2.2. Относительно оператора $i_6 + \lambda i_{13}, \lambda \neq 0$ инвариантны только следующее одномерное подпространство пространства $R_5 \{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$.

Теорема 2.3. Из подпространств, перечисленных в теореме 2.1, относительно оператора i_{13} инвариантны только следующее одномерное подпространство: $\{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$.

Теорема 2.4. Из подпространств, перечисленных в теореме 2.1 относительно оператора i_7 инвариантны только одномерное подпространство: $\{a_4 e_4 + a_5 e_5\} \forall a_4, a_5$ и только двумерное подпространство: $\{e_4, e_5\}$.

Теорема 2.5. Из подпространств, перечисленных в теореме 2.4, относительно оператора i_{10} инвариантны только следующее одномерное подпространство: $\{a_4e_4+a_5e_5\}\forall a_4,a_5$ и только следующее двумерное подпространство: $\{e_4,e_5\}$.

Теорема 2.6. Относительно оператора i_6+i_{13} инвариантны только следующее одномерное подпространство $\{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1+a_3e_3+a_4e_4,e_2-a_4e_3+a_3e_4\},\{e_1,e_2\},\ \{e_3,e_4\},\{e_1+a_3e_3+a_4e_4,e_2+a_4e_3-a_3e_4\}$.

Теорема 2.7. Из подпространств, перечисленных в теореме 2.6, относительно оператора i_7-i_{11} инвариантно только следующее одномерное пространство $\{e_5\}$, двумерных подпространств нет.

Теорема 2.8. Из подпространств, перечисленных в теореме 2.7, относительно оператора i_8+i_{10} инвариантно только следующее одномерное пространство $\{e_5\}$, двумерных подпространств нет.

Теорема 2.9. Относительно оператора i_6+2i_{13} одномерных и двумерных подпространств нет.

Теорема 2.10. Из подпространств, перечисленных в теоремах 2.1, 2.4, 2.5, относительно оператора i_{15} нет инвариантных одномерных подпространств, существует только следующее двумерное подпространство $\{e_4,e_5\}$.

Теорема 2.11. Из подпространств, перечисленных в теоремах 2.1, 2.3, относительно оператора i_7-i_{11} и i_8+i_{10} инвариантно только следующее одномерное пространство $\{e_5\}$, двумерных подпространств нет.

Теорема 2.12. Из подпространств, перечисленных в теоремах 2.1, 2.3, относительно операторов $i_8+i_9,i_{11}+i_{12}$ и $i_{13}+i_{14}$ нет инвариантных одномерных подпространств, существует только следующее двумерное подпространство $\{e_4,e_5\}$.

Теорема 2.13. Из подпространств, перечисленных в теоремах 2.1, 2.4, 2.5, относительно операторов i_{11} и i_8 нет инвариантных двумерных подпространств, существует только следующее одномерное подпространство $\{e_5\}$.

На основании доказанных теорем получаем следующую теорему, в которой перечисляются все инвариантные одномерных и двумерные подпространства для подгрупп Ли $G_1...G_{11}$.

Теорема 2.14. Относительно подгрупп Ли $G_1...G_{11}$ инвариантны только следующие одномерные и двумерные подпространства пространства R_5:

1°. Для G_1 одномерные и двумерные: $\{a_3e_3+a_4e_4+a_5e_5\}$,

$\{e_1,e_2\},\{e_3+a_5e_5,e_4+b_5e_5\},\{e_3+a_4e_4,e_5\},\{e_4,e_5\}$.

Доказательство следует по теореме 2.1.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам: $\{e_1,e_2\}^\perp=\{e_3,e_4,e_5\},\{e_3+a_4e_4,e_5\}^\perp=\{e_1,e_2,a_4e_3-e_4\}$,

$\{e_4,e_5\}^\perp=\{e_1,e_2,e_3\},\{e_3+a_5e_5,e_4+b_5e_5\}^\perp=\{e_1,e_2,-a_5e_3-b_5e_4+e_5\}$.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам: $\{a_3e_3+a_4e_4+a_5e_5\}^{\perp}=\{e_1,e_2,a_5e_3-a_3e_5,a_5e_4-a_4e_5\}$.

2°. Для $G_2:\{e_5\},\{e_1,e_2\},\{e_3,e_4\}$, при $\lambda\neq 0$,

$\{e_1+a_3e_3+a_4e_4,e_2-a_4e_3+a_3e_4\},\{e_1,e_2\},\{e_3,e_4\}$, при $\lambda=1$,

$\{e_1+a_3e_3+a_4e_4,e_2+a_4e_3+a_3e_4\},\{e_1,e_2\},\{e_3,e_4\}$, при $\lambda=-1$.

Доказательство следует по теореме 2.2.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам: $\{e_1,e_2\}^{\perp}=(e_3,e_4,e_5\},\{e_3,e_4\}^{\perp}=\{e_1,e_2,e_5\}$.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам: $\{e_5\}^{\perp}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$.

3°. Для $G_3:\{e_5\},\{e_1,e_2\},\{e_3,e_4\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.3.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам: $\{e_1,e_2\}^{\perp}=(e_3,e_4,e_5\},\{e_3,e_4\}^{\perp}=\{e_1,e_2,e_5\}$.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам: $\{e_5\}^{\perp}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$.

4°. Для $G_4:\{a_4e_4+a_5e_5\},\forall a_4,a_5,\{e_4,e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.4, 2.5.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам: $\{e_4,e_5\}^{\perp}=\{e_1,e_2,e_3\}$.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам: $\{a_4e_4+a_5e_5\}^{\perp}=\{e_1,e_2,e_3,-a_5e_4+a_4e_5\}$.

5°. Для $G_5:\{e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.6, 2.7, 2.8.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам: $\{e_5\}^{\perp}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$.

6°. Для G_6 нет инвариантных подпространств.

7°. Для $G_7:\{e_4,e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.4, 2.5, 2.10.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам: $\{e_4,e_5\}^{\perp}=\{e_1,e_2,e_3\}$.

8°. Для $G_8:\{e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.3, 2.11.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам: $\{e_5\}^{\perp}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$.

9°. Для $G_9 : \{e_4, e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.3, 2.12.

Трехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным двумерным подпространствам: $\{e_4, e_5\}^{\perp} = \{e_1, e_2, e_3\}$.

10°. Для $G_{10} : \{e_5\}$. Доказательство следует по теоремам 2.1, 2.4, 2.5, 2.13.

Четырехмерные инвариантные подпространства находим как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам: $\{e_5\}^{\perp} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Замечание 2.1. Все инвариантные четырехмерные подпространства пространства R_5 относительно группы Ли G_i получаются как ортогональные дополнения к найденным инвариантным одномерным подпространствам, а инвариантные трехмерные подпространства находятся как ортогональные дополнения к инвариантным двумерным. Таким образом, теорема 2.14 классифицирует все инвариантные подпространства пространства R_5 относительно всех подгрупп Ли вращений группы Ли движений пространства R_5.

Замечание 2.2. Каждому инвариантному подпространству $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ соответствует инвариантная k-плоскость: $[0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k]$ и обратно. Таким образом, теорема 2.14 дает классификацию всех инвариантных прямых и k-плоскостей пространства R_5 относительно подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_5.

Образы стационарности подгрупп Ли группы Ли движений пространства *R*₅

Используя найденные инвариантные подпространства относительно подгрупп Ли $G_1 \ldots G_{11}$, находим далее образы стационарности для этих подгрупп.

Определение 2.1. Образом стационарности подгруппы K группы G называется совокупность D фигур пространства R_5 и ему соответствующего векторного пространства ${}^1E_5$ таких, что группе K принадлежат те и только те преобразования, при которых каждая из фигур совокупности D инвариантна.

Определение 2.2. Упорядоченная совокупность фигур пространства R_5 называется флагом, если все фигуры этой совокупности являются k-плоскостями ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) пространства R_5, причем каждая предыдущая плоскость содержится в последующей.

Рассмотрим группу $G_1 = \{i_6\}$, где

$$\{i_6\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим произвольный элемент из алгебры вращений:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \phi \\ -\beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ -\gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ -\delta & -\phi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно группы G_1 инвариантны только следующее одномерное подпространство пространства R_5: $\{a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5\}, \forall a_3, a_4, a_5$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3 + a_5e_5, e_4 + b_5e_5\}$, $\{e_3 + a_4e_4, e_5\}, \{e_4, e_5\}$.

Зафиксируем вектор $\overline{e_3}$. Рассмотрим вектор (0, 0, 1, 0, 0) и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(0,0,1,0,0)\cdot\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \phi \\ -\beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ -\gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ -\delta & -\phi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix} = (-\beta, -\omega, 0, \psi, \rho) = \lambda\cdot\overline{e_3} = (0,0,\lambda,0,0).$$

Из этого следует, что $\beta = 0, \omega = 0, \psi = 0, \rho = 0.$

Зафиксируем вектор $\overline{e_4}$. Рассмотрим вектор (0, 0, 0, 1, 0) и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(0,0,0,1,0)\cdot\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \phi \\ -\beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ -\gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ -\delta & -\phi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix} = (-\gamma, -\varepsilon, -\psi, 0, \eta) = \mu\cdot\overline{e_4} = (0,0,0,\mu,0).$$

Из этого следует, что $\gamma = 0, \varepsilon = 0, \psi = 0, \eta = 0.$

Зафиксируем вектор $\overline{e_5}$. Рассмотрим вектор (0, 0, 0, 0, 1) и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(0,0,0,0,1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ -\alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \phi \\ -\beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ -\gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ -\delta & -\phi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix} = (-\delta, -\phi, -\rho, -\eta, 0) = \nu\cdot\overline{e_5} = (0,0,0,0,\nu).$$

Из этого следует, что $\delta = 0, \phi = 0, \rho = 0, \eta = 0.$

Полученные результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2.15. Среди подгрупп $G_1 \ldots G_{11}$ флаговые образы стационарности имеют только следующие подгруппы:

1° Для G_1 образом стационарности является флаг: точка, точечно неподвижная трехмерная плоскость $[R_0, R_3^\circ]$, где $\circ$ означает точечную неподвижность соответствующей плоскости.

2° Для G_2 образом стационарности является флаг $[R_0, R_1, R_2]$, причем $R_1 \perp R_2$.

3° Для G_3 образом стационарности является прямая и две ортогональные ей попарно 2-плоскости.

4° Для G_4 образом стационарности является флаг $[R_0, R_2^0]$.

5° Для G_7 образом стационарности является флаг $[R_0, R_2]$.

6° Для G_{11} образом стационарности является флаг $[R_0, R_1]$.

Подгруппы Ли $G_5, G_6, G_8, G_9, G_{10}$ не имеют флаговых образов стационарности.

Используя геометрические характеристики подгрупп Ли, мы получаем цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_5:

$G_{11} \supset G_{10} \supset G_8 \supset G_5, G_{11} \supset G_9 \supset G_4 \supset G_1,\ G_{11} \supset G_8 \supset G_3 \supset G_2, G_{11} \supset G_8 \supset G_3 \supset G_1,$
$G_{11} \supset G_7 \supset G_4 \supset G_1, G_{11} \supset G_6;\ G_{11} \supset G_3 \supset G_2, G_{10} \supset G_8 \supset G_5, G_{10} \supset G_4 \supset G_1,$
$G_{10} \supset G_3 \supset G_2, G_{10} \supset G_3 \supset G_1, G_9 \supset G_4 \supset G_1, G_8 \supset G_5, G_7 \supset G_4 \supset G_1, G_4 \supset G_1, G_3 \supset G_2,$
$G_3 \supset G_1.$

Эти результаты можно представить в виде следующей схемы:

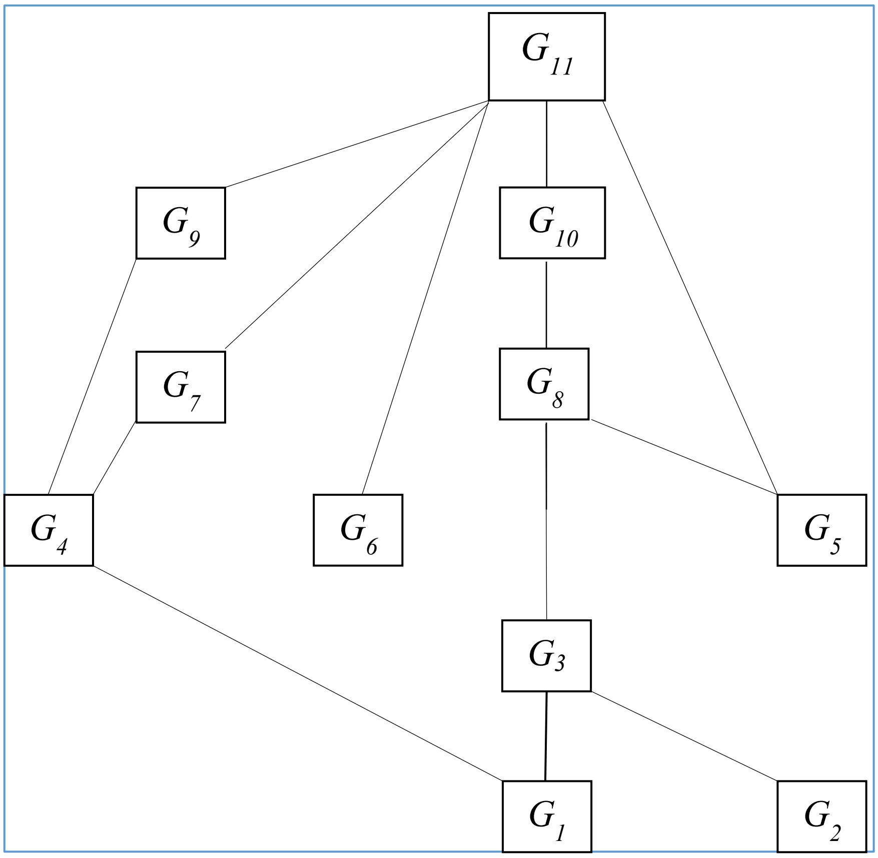

Схема. – Цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_5

Пусть G – группа Ли и H_1, H_2 – ее подгруппы Ли, причем $H_1 \subset H_2$.

Определение 2.3. Каноническим морфизмом однородного пространства G/H_1 в однородное пространство G/H_2 называется морфизм f вида:

$$f : G/H_1 \to G/H_2 : aH_1 \to aH_2, \ \forall a \in G.$$

Таким образом, полученная выше классификация цепочек подгрупп Ли группы вращений пространства R_5 приводит к классификации всех канонических морфизмов однородных пространств со структурной группой H – группой всех вращений пространства R_5.

Рассмотрим однородное пространство $H / G_{10}, G_{10} = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{11}, i_8, i_{13}\}$, $a = \{i_6\}$, $\overline{H} = \{i_6, ..., i_{15}\}$.

Теорема 3.7. Однородное пространство H / G_{10} является редуктивным, причем редуктивным дополнением для этого пространства является подпространство: m=$\{i_9, i_{12}, i_{14}, i_{15}\}$.

Тензоры кривизны и кручения канонической связности полученных редуктивных пространств [4]

Тензоры кривизны и кручения канонической связности будем вычислять на редуктивных однородных пространствах с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства R_5.

Свойства тензора кривизны и кручения канонической связности характеризуются следующей теоремой.

Теорема 4.1 [Номидзу, Кобаяси]. Пусть P есть G – инвариантная структура на редуктивном однородном пространстве G/H с разложением $\overline{G} = \overline{H} + m$. Для тензора кручения T и тензора кривизны R канонической связности в P мы имеем:

(1) $T(X,Y)_0 = -[X,Y]_m$ для $X,Y \in m$,

(2) $(R(X,Y)Z)_0 = -[[X,Y]_{\overline{H}}, Z]$ для $X,Y,Z \in m$,

(3) $\nabla T = 0$,

(4) $\nabla R = 0$.

Тензоры кривизны и кручения играют важную роль при исследовании свойств данной связности, поскольку они определяют связность с помощью структурных формул Э. Картана. Воспользуемся теоремой 4.1 и получим формулы для тензоров кривизны и кручения соответствующей канонической связности в исследуемых редуктивных однородных пространствах.

Рассмотрим редуктивное однородное пространство H / G_{10}, которое имеет редуктивное разложение $\overline{H} = \overline{G_{10}} + m$, где $m = \{i_9, i_{12}, i_{14}, i_{15}\}$. Выберем в редуктивном дополнении m базис: $e_1 = i_9, e_2 = i_{12}, e_3 = i_{14}, e_4 = i_{15}$.

Тогда согласно теореме 4.1 тензоры кручения получим по формуле $T(X,Y)_0 = -[X,Y]_m$ для $X,Y \in m$, а тензоры кривизны получим по формуле $(R(X,Y)Z)_0 = -[[X,Y]_{\overline{H}}, Z]$ для $X,Y,Z \in m$. Таким образом, координату $T_{jk}^{\ \ i}$ тензора кручения получим как i -ю координату разложения вектора $[e_j, e_k]_m$ по базису $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ редуктивного дополнения m. Координату $R^i{}_{jk,l}$ тензора кривизны получим как i -ю координату разложения вектора $[[e_j, e_k]\overline{G_i}, e_l]$ по базису B редуктивного дополнения m.

Проводя вычисления, получаем следующую теорему.

Теорема 4.2. Каноническая связность редуктивного однородного пространства H / G_{10} с редуктивным дополнением $m = \{i_9, i_{12}, i_{14}, i_{15}\}$ имеет нулевое кручение (каноническая связанность этого пространства без кручения) и только следующие координаты тензора кривизны (при этом следует учитывать, что тензор кривизны кососимметричен по первым двум нижним индексам):

$R^2_{12,1} = -1, R^l_{12,1} = 0$, при $l \neq 2$, $R^1_{12,2} = 1, R^l_{12,2} = 0$, при $l \neq 1$, $R^l_{12,3} = -1, R^l_{12,4} = 0$, при $\forall l$,
$R^3_{13,1} = -1, R^l_{13,1} = 0$, при $l \neq 3$, $R^l_{13,2} = R^l_{13,4} = 0$, при $\forall l$, $R^1_{13,3} = 1, R^l_{13,3} = 0$, при $l \neq 1$,
$R^4_{14,1} = -1, R^l_{14,1} = 0$, при $l \neq 4$, $R^l_{14,2} = R^l_{14,3} = 0$, для $\forall l$, $R^1_{14,4} = 1, R^l_{14,4} = 0$, при $l \neq 1$,
$R^l_{23,1} = R^l_{23,4} = 0$, для $\forall l$, $R^3_{23,2} = 1, R^l_{23,2} = 0$, при $l \neq 3$, $R^2_{23,3} = 1, R^l_{23,3} = 0$, при $l \neq 2$,
$R^l_{24,1} = R^l_{23,3} = 0$, для $\forall l$, $R^4_{24,2} = -1, R^l_{24,2} = 0$, при $l \neq 4$, $R^2_{24,4} = 1, R^l_{24,4} = 0$, при $l \neq 2$,
$R^l_{34,1} = R^l_{34,2} = 0$, для $\forall l$, $R^4_{34,3} = -1, R^l_{34,3} = 0$, при $l \neq 4$, $R^3_{34,4} = 1, R^l_{34,4} = 0$, при $l \neq 3$.

Имеет место теорема.

Теорема 4.3 [П. К. Рашевский]. Линейная связность без кручения полностью определяется заданием геодезических линий и канонических параметров на них.

Из теоремы 4.2 следует:

Теорема 4.3. Каноническая связность в редуктивном однородном пространстве G / G_{10} полностью характеризуется своими геодезическими линиями.

Имеет место следующее определение.

Определение 4.1 [Ш. Кобаяси]. Линейная связность *Г* на дифференцируемом многообразии *M* называется локально симметрической в $x \in M$, если существует инволютивное преобразование открытой окрестности *U* точки *x*, имеющее *x* неподвижной изолированной точкой. Линейная связность называется локально симметрической, если она локально симметрическая в каждой точке $x \in M$.

Имеет место теорема.

Теорема 4.4 [Ш. Кобаяси]. Линейная связность *Г* на *M* локально симметрическая тогда и только тогда, когда $T = 0, \nabla R = 0$.

На основании теорем 4.1, 4.3 и 4.4 получаем следующую теорему.

Теорема 4.5. Каноническая связность на однородном пространстве H / G_{10} является локально симметрической.

Заключение

Исследование редуктивных однородных пространств является актуальной задачей, поскольку эта теория находит применение в различных разделах геометрии и алгебры, а также теоретической физики. Особое место в этой теории занимают исследования однородных пространств со структурными группами – группами Ли движений евклидовых и псевдоевклидовых пространств.

Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для решения аналогичных задач в теории однородных пространств, а также для проверки различных гипотез и теорем в теории таких же пространств.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – Т. 126, кн. 1. – С 13–22.

2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.

3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

4. Юдов, А. А. Классификация и исследование редуктивных однородных пространств со структурной группой – группой Ли движений пятимерного евклидова пространства / А. А. Юдов, М. А. Кононюк // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2018. – № 2. – С. 94–106.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.05.2020

***Yudov A. A., Kononyuk M. A., Kazakevich K .P., Kisilyuk E. V.* Classification and Study of Invariant Structures on Homogeneous Spaces with a Structural Group - the Lie Group of Motions of a Five-Dimensional Euclidean Space**

The aim of the study is to find invariant subspaces, lines and planes for Lie subgroups of the Lie group H of rotations of a five-dimensional Euclidean space and to study invariant structures on homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of a five-dimensional Euclidean space.