УДК 378.147:51

И. Н. Мельникова[1], В. В. Войтович[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]магистрант физико-математического факультета
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: 375298029207@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ К ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук, а также при решении прикладных физических задач требуется знание математики на достаточно высоком уровне. Поэтому при изучении математических предметов у физиков необходимо математические понятия рассматривать в тесной связи с физическими понятиями. В публикации проводится изучение дифференциальных уравнений и их систем на примерах физических задач с целью более глубокого усвоения этих понятий.

Физико-математические факультеты университетов уделяют большое внимание изучению дифференциальных уравнений, требующих формального их решения, а также решению технических и прикладных задач, приводящих к составлению дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения играют значительную роль в приложениях математики к техническим наукам. С помощью данных уравнений многие прикладные процессы описываются полнее. Они помогают решать многие вопросы общетехнических, а также специальных прикладных дисциплин: физики, теоретической механики, сопротивления материалов, гидравлики, теории машин и механизмов, химии, технологии производств, биологии, т. к. дифференциальные уравнения часто возникают в процессе решения данных вопросов.

Многочисленные и разнообразные технические приложения теории обыкновенных дифференциальных уравнений требуют глубокого знания разных физических и математических законов.

При помощи задач инженерно-технического характера появляется возможность овладеть методами решения дифференциальных уравнений. Упомянутые выше задачи облегчают изучение ряда важнейших дисциплин, которые являются основой образования специалиста любой отрасли.

Задача. Найти формулу критических скоростей тонкого вращающегося вала длиной l. Радиус поперечного сечения вала a, вес P и модуль упругости материала E.

Решение.

1) При увеличении угловой скорости вращающегося вала от значения $\omega = 0$ до некоторого предельного значения $\omega = \omega_1$, называемого критической угловой скоростью, вал сохраняет свою прямолинейную ось. В момент достижения критической скорости ω_1 вал искривляется и начинает бить. При дальнейшем увеличении ω биение прекращается, а затем вновь возникает при второй критической скорости ω_2, и так периодически.

2) При вращении изогнутого вала на каждый его элемент действует центробежная сила, которую можно считать непрерывно распределенной нагрузкой.

На элемент $d\xi$ вала (рисунок) действует центробежная сила $F = m\omega^2\eta$, где m – масса элемента $d\xi$, ω – угловая скорость вращения, η – прогиб, равный радиусу вращения элемента $d\xi$.

Вес элемента $d\xi$ равен $\frac{P}{l}d\xi$, а масса $m = \frac{P}{gl}d\xi$. Таким образом, элементарная центробежная сила $dF = \frac{P}{gl}\omega^2 \cdot \eta \cdot d\xi$. Прогиб η является функцией ξ, определяемой уравнением упругой линии. Таким образом, выражение $\frac{P}{gl} \cdot \omega^2\eta = f(\xi)$ и окончательно элементарная центробежная сила

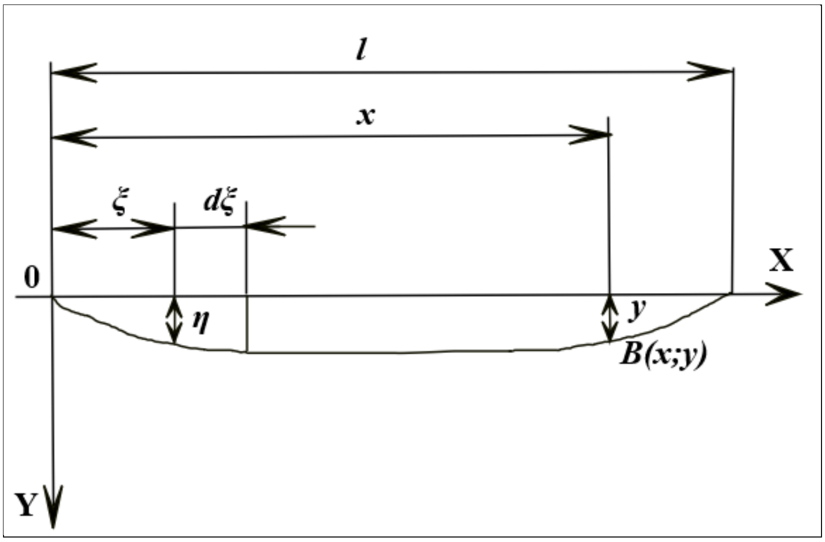
$$dF = f(\xi)d\xi = \frac{P}{gl} \cdot \omega^2\eta d\xi. \qquad (1)$$

Момент этой силы относительно произвольного сечения B будет:

$$dF \cdot (x - \xi) = (x - \xi) f(\xi) d\xi.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям изгибающий момент

$$M = \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi.$$



Рисунок

Дифференцируя под знаком интеграла дважды это выражение по параметру x, получим:

$$\frac{dM}{dx}=\int_0^x f(\xi)d\xi+(x-x)f(x)\frac{dx}{dx}-(x-0)f(0)\frac{d}{dx}=$$

$$=\int_0^x f(\xi)d\xi;$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\int_0^x 0\cdot d\xi+f(x)\frac{dx}{dx}-f(0)\frac{d}{dx}(0)=f(x). \qquad (2)$$

Т. к. на основании равенства (1) $f(x)=\frac{P}{gl}\omega^2 y$, то выражение (2) примет вид:

$$\frac{d^2M}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}\left(EJ\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{P\omega^2}{gl}y.$$

Получаем дифференциальное уравнение упругой линии:

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{P\omega^2}{EJgl}y=0. \qquad (3)$$

Вводим обозначение $\frac{P\omega^2}{EJgl}=q^4$. Тогда уравнение (3) примет вид:

$$\frac{d^4y}{dx^4}-q^4y=0.$$

Решая это неполное линейное уравнение четвертого порядка, получаем характеристическое уравнение:

$$r^4-q^4=0,$$

или

$$(r-q)(r+q)\left(r^2+q^2\right)=0.$$

Корнями характеристического уравнения будут:

$$\left.\begin{aligned} r_1&=q,\\ r_2&=-q,\\ r_3&=qi,\\ r_4&=-qi.\end{aligned}\right\}$$

Таким образом, общее решение дифференциального уравнения упругой линии вала будет:

$$y=C_1e^{qx}+C_2e^{-qx}+C_3\sin qx+C_4\cos qx. \qquad (4)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 используем граничные условия задачи. На опертых концах вала прогиб и кривизна оси вала равна нулю. Математически это выражается четырьмя граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \text{при } x = 0,\ \mathrm{y} = 0,\\
&2)\ \text{при } x = 0,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0,\\
&3)\ \text{при } x = l,\ \mathrm{y} = 0,\\
&4)\ \text{при } x = l,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Дифференцируя дважды общее решение (4), получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx} = C_1 q e^{qx} - C_2 q e^{-qx} + C_3 q \cos qx - C_4 q \sin qx,\\
&\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 q^2 e^{qx} + C_2 q^2 e^{-qx} - C_3 q^2 \sin qx - C_4 q^2 \cos qx.
\end{aligned}\right\}$$

Граничные условия дают следующую систему четырех уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 e^{q\cdot 0} + C_2 e^{-q\cdot 0} + C_3 \sin(q\cdot 0) + C_4 \cos(q\cdot 0) = 0,\\
&C_1 q^2 e^{q\cdot 0} + C_2 q^2 e^{-q\cdot 0} - C_3 q^2 \sin(q\cdot 0) - C_4 q^2 \cos(q\cdot 0) = 0,\\
&C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0,\\
&C_1 q^2 e^{ql} + C_2 q^2 e^{-ql} - C_3 q^2 \sin ql - C_4 q^2 \cos ql = 0
\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 + C_2 + C_4 = 0,\\
&C_1 + C_2 - C_4 = 0,\\
&C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0,\\
&C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} - C_3 \sin ql - C_4 \cos ql = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Складывая и вычитая два первых уравнения системы, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&C_4 = 0,\\
&C_1 + C_2 = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&C_2 = -C_1,\\
&C_4 = 0.
\end{aligned}\right\}$$

Поступая аналогично с двумя последующими уравнениями той же системы, получим:

$$\left.\begin{aligned} &C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0, \\ &C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Подставляя выражение (5) в (6), получим:

$$\left.\begin{aligned} &C_3 \sin ql = 0, \\ &C_1 \left(e^{ql} - e^{-ql}\right) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Т. к. при $l \neq 0$ и $q \neq 0$ последнее выражение в скобках не может равняться нулю, то окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} &C_1 = 0, \\ &C_2 = 0, \\ &C_4 = 0, \\ &C_3 \sin ql = 0. \end{aligned}\right\}$$

Если $C_3 = 0$, то уравнение упругой линии вала будет $y = 0$, т. е. упругая линия совпадает с осью x и вал не искривлен. При искривлении вала необходимо, чтобы $C_3 \neq 0$. Но тогда, очевидно, необходимо, чтобы

$$\sin ql = 0.$$

Отсюда $ql = k\pi$ и $q = \dfrac{k\pi}{l}$, где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

При $k = 0$ получим $q = 0$, и уравнение упругой линии вала будет:

$$y = C_1 + C_2 + C_4 = 0 \text{ – вал прямой.}$$

При остальных значениях q вал искривляется. В таких случаях уравнение упругой линии

$$y = C_3 \sin ql, \text{ при } q = q_1 = \frac{\pi}{l}; q = q_2 = \frac{2\pi}{l}; q = q_3 = \frac{3\pi}{l}.$$

Упругая линия будет синусоидой:

$$\left.\begin{aligned} &y = C_3 \sin \frac{\pi}{l} x, \\ &y = C_3 \sin \frac{2\pi}{l} x, \\ &y = C_3 \sin \frac{3\pi}{l} x, \\ &\ldots \end{aligned}\right\},$$

содержащей по длине вала 1, 2, 3 и больше полуволн. Таким образом, при критическом значении

$$q_{кр} = \frac{k\pi}{l}$$

упругая линия будет синусоидой с k полуволнами по длине.

Вернемся к ранее введенному обозначению

$$q^4 = \frac{P\omega^2}{EJgl}.$$

Подставляя в это последнее равенство критические значения $q_{кр}$ и $\omega_{кр}$, получим:

$$q_{кр}{}^4 = \frac{P\omega_{кр}{}^2}{EJgl}, \ \frac{k^4\pi^4}{l^4} = \frac{P\omega_{кр}{}^2}{EJgl}$$

или

$$\omega_{кр} = \frac{k^2\pi^2}{l}\sqrt{\frac{EJg}{Pl}}.$$

Вычислим момент инерции площади сечения вала. Момент инерции J материальной точки относительно оси представляет собой, как известно, произведение ее массы на квадрат расстояния точки от оси. Момент инерции всей площади поперечного сечения вала выражается формулой:

$$J = \lim_{\Delta m \to 0} \sum R^2 \Delta m = \int R^2 dm,$$

где Δm – масса элементарной частицы; R – расстояние какой-либо точки элементарной частицы от оси, dm – дифференциал однородной массы, имеющей форму круга (для вала) при плотности $\rho = 1$.

В общем случае $dm = \rho d\upsilon$ и $J = \rho \int R^2 d\upsilon.$

Момент инерции J всей площади поперечного сечения вала относительно диаметра будет:

$$J = \frac{\rho\pi a^4}{4}.$$

Эту величину можно получить из справочных таблиц или вычислить при помощи определенного интеграла, решив задачу определения момента инерции круга относительно его диаметра.

Масса вала равна $m = \rho\pi a^2 l = \dfrac{P}{g}.$

Таким образом, момент инерции сечения вала $J=\dfrac{Pa^2}{4gl}$, и для определения критической скорости получим выражение $\omega_{кр}=\dfrac{k^2\pi^2 a}{2l^2}\sqrt{E}$.

Минимальная критическая скорость будет: $\omega_1=\dfrac{\pi^2 a}{2l^2}\sqrt{E}$.

Вычислим момент инерции площади поперечного сечения стального вала J для конкретных данных: $\rho=7{,}8\cdot10^3\left(\dfrac{кг}{м^3}\right), l=0{,}5(м), R=a=0{,}5\cdot10^{-2}(м)$ и для модуля упругости стали $E=21\cdot10^{10}\left(\dfrac{Н}{м^2}\right)$.

$$J=\frac{\rho\cdot 3{,}14\cdot a^4}{4}=\frac{7{,}8\cdot10^3\cdot3{,}14\cdot\left(0{,}5\cdot10^{-2}\right)^4}{4}=3{,}82\cdot10^{-6}.$$

Для определения критической скорости возьмем $k=2$.

$$\omega_{кр}=\frac{2^2\cdot3{,}14^2\cdot0{,}5\cdot10^{-2}}{2\cdot0{,}5^2}\sqrt{21\cdot10^{10}}=180729{,}44.$$

Тогда минимальная критическая скорость будет равна

$$\omega_1=\frac{3{,}14^2\cdot0{,}5\cdot10^{-2}}{2\cdot0{,}5^2}\sqrt{21\cdot10^{10}}=45182{,}36.$$

Затем для определения критической скорости возьмем $k=1$.

$$\omega_{кр}=\frac{1^2\cdot3{,}14^2\cdot0{,}5\cdot10^{-2}}{2\cdot0{,}5^2}\sqrt{21\cdot10^{10}}=45182{,}36.$$

$$\omega_{кр}=\frac{3^2\cdot3{,}14^2\cdot0{,}5\cdot10^{-2}}{2\cdot0{,}5^2}\sqrt{21\cdot10^{10}}=406641{,}26.$$

Задачи подобного типа могут быть полезны преподавателям старших классов средней школы при проведении занятий в математических кружках, а также студентам высших технических учебных заведений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронков, И. М. Курс теоретической механики / И. М. Воронков. – М., 1995. –595 с.

2. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. – М. : Высш. шк., 1989. – 383 с.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов. – М., 1957. – 425 с.

4. Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. – 3-е изд. – Минск : Наука и техника, 1979. – 572 с.
5. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : Гостехтеориздат, 1950. – 436 с.
6. Айнс, Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э. Л. Айнс. – Харьков : ОНТИ, 1939. – 717 с.

Рукапіс пастуміў у рэдакцыю 25.10.2019

Melnikova I. N., Voytovich V. V. **Some Applications of the Theory of Differential Equations and Their Systems to Physical Processes**

When studying natural phenomena, solving many problems of physics and technology, chemistry and biology, other sciences, knowledge of mathematics at a sufficiently high level is required, as well as the ability to use this knowledge in solving applied physical problems. Therefore, when studying mathematical subjects at physicists, it is necessary to consider mathematical concepts in close connection with physical concepts. The publication studies differential equations and their systems using physical problems as examples to better understand these concepts.