УДК 519.6+519.81

В. В. Морозов
ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: morozoffw@mail.ru

ИТЕРАТИВНЫЙ БАЗИС В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ БАНАХОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Отсутствие в бесконечномерных банаховых пространствах счетного базиса вынуждает исследователей, изучающих нелинейные функциональные уравнения с дифференциальными и/или интегральными операторами, разрабатывать все новые и новые грандиозные сеточные схемы. Однако, следуя постулатам функционального анализа А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [1], Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [2], аппроксимацию корней банаховых уравнений надлежит осуществлять с помощью элементов всюду плотного в сепарабельном пространстве решений множества многочленов. Во избежание теоретических изъянов дискретного представления элементов непрерывных функциональных пространств (например, при доказательстве сходимости дискретного приближения к непрерывной функции по норме) для аппроксимации элементов непрерывных банаховых пространств необходим полиномиальный базис. В качестве такового в работе используется базис, являющийся одновременно базисом всюду плотного множества и итеративным базисом вычислительного процесса, позволяющий при доказательстве сходимости полиномиального приближения сколь угодно увеличивать параметр дискретизации пространств и сколь угодно уменьшать погрешность приближения их элементов.

Памяти Я. В. Радыно посвящается

Введение

Итерационным базисом в методах численного приближения элементов непрерывных функциональных пространств является базис евклидового пространства R_n, где n – параметр дискретизации функционального пространства, задающий количество точек базового множества, в которых требуется определить значение искомой функции. Далее, руководствуясь правилами дискретной аппроксимации дифференциальных и интегральных операторов, неизвестные значения функции в точках сетки связывают в систему n уравнений и, в случае нелинейности и сильной дифференцируемости оператора системы, решают ее методом Ньютона, где роль производной Фреше играет матрица частных производных Якоби. Несогласованность по норме пространства решений корня операторного уравнения и его дискретного приближения значительно усложняет доказательство сходимости процесса, которое связано с динамичным увеличением n.

Значительно ближе к постулатам функционального анализа размещается теория Галеркина решения функциональных уравнений в гильбертовых пространствах. И хотя эти методы по-прежнему не являются итерационными [3] относительно увеличения параметра дискретизации n, преимущество их неоспоримо с точки зрения аппроксимации корней по норме. Естественно, каждому исследователю для генерации фундаментальной последовательности Коши необходимо изучить динамику сходимости приближения к корню уравнения при $n \to \infty$. Однако на практике для локализации корня в окрестности приближения одной сходимости вычислительного процесса по невязке приближения даже в гильбертовых пространствах явно недостаточно. Т. е. слабая сходимость образа в пространстве отображения корня не только не обеспечивает сильную сходимость приближения к корню по норме, но и оставляет открытым вопрос о существовании корня вблизи этого приближения.

Моделирование реальных технологических процессов с помощью интегро-дифференциальных операторов основано на описании свойств пространства решений, которому принадлежит искомый корень, и описания отображения этого пространства в пространство образов, в которое отображается пространство решений. Сепарабельность этих пространств при описании реальных процессов функциональными уравнениями с интегральными и/или дифференциальными операторами достаточно хорошо изучена в монографиях [1–4] и др. Важнейшим достижением этих исследований стало установление счетных всюду плотных множеств в функциональных банаховых пространствах. Это свойство сепарабельных пространств позволяет организовать вычислительный процесс, максимально соответствующий качественной теории функционального анализа. Вслед за определением достоверных оценок норм приближений элементов процесса появляется возможность генерировать слабые производные дифференцируемых отображений, а также оценивать их нормы.

Для решения интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в работе используются полиномиальные методы приближения корня многочленами всюду плотного множества пространства решений. Причем применяемый для аппроксимации элементов полиномиальный базис одновременно является базисом всюду плотного множества и итеративным базисом вычислительного процесса, т. е. итерационный многочлен приближения корня степени n из P_n в случае необходимости может быть представлен в виде многочлена в реорганизованном базисе P_{n+1}. Отметим, что здесь вместо традиционного базиса множества многочленов используется лагранжевый базис, который и обеспечивает итеративность вычислительного процесса при увеличении параметра дискретизации. Логическим завершением вычислительного процесса является локализация корня функционального уравнения с заданной точностью приближения.

В данной работе излагаются два критерия локализации изолированных корней – для недифференцируемых и дифференцируемых отображений в операторном уравнении. Целью работы является определение условий сходимости итерационных методов решения функциональных уравнений, а также установление и доказательство критериев локализации корней операторных уравнений.

Решаемые задачи:

1) разработать алгоритм итерационного метода решения банаховых уравнений;

2) сформулировать и доказать критерии локализации корней банаховых уравнений.

Критерии локализации корней операторных уравнений

Отображением банаховых пространств, или банаховым отображением, будем называть отображение

$$F : U \to V,$$

где U и V являются B-пространствами.

Как известно, банахово пространство метрическое (с метрикой, порожденной нормой B-пространства), поэтому все утверждения, справедливые для метрических пространств, будут справедливы и для банаховых. Один из простейших критериев существования и единственности неподвижной точки при отображении метрического пространства в себя (и в то же время один из наиболее важных из них) носит название принцип сжимающих отображений в метрическом пространстве.

Определение. Пусть U – метрическое пространство. Отображение $F : U \to U$ называется сжимающим отображением или сжатием, если существует такое действительное число $0 < \tau < 1$, что для любых двух точек u и v из пространства U выполняется неравенство

$$\rho(F(u), F(v)) \le \tau \rho(u, v). \tag{1}$$

Число τ называется коэффициентом сжатия.

Всякое сжимающее отображение непрерывно. Действительно, если последовательность $u_n \to u$, то из неравенства (1) вытекает, что

$$\rho(F(u_n), F(u)) \le \tau \rho(u_n, u)$$

и в силу определения предела из условия $u_n \to u$ следует, что $F(u_n) \to F(u)$.

Определение. Точка $u \in U$ называется неподвижной точкой отображения F, если она является решением уравнения

$$F(u) = u, F : U \to U. \tag{2}$$

Теорема (принцип сжимающих отображений). Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве U, имеет одну и только одну неподвижную точку.

Доказательство. Пусть u_0 – произвольная точка из U. Положим

$$u_1 = F(u_0),\ u_2 = F(u_1) = F(F(u_0)),\ \ldots,$$

$$u_n = F(u_{n-1}) = \ldots = \underbrace{F(\ldots(F}_{n}(u_0))\ldots) \text{ и т. д.}$$

Покажем, что последовательность $\{u_n, n = 0, 1, \ldots\}$ приближений корня u уравнения (2) фундаментальная, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N \in N$, что при всех натуральных n и m больше N справедливо неравенство $\rho(u_n, u_m) < \varepsilon$.

Для определенности будем считать, что $n \le m$, тогда

$$\rho(u_n, u_m) = \rho(\underbrace{F(\ldots(F}_{n}(u_0))\ldots), \underbrace{F(\ldots(F}_{m}(u_0))\ldots)) \le$$

$$\le \tau^n \rho(u_0, \underbrace{F(\ldots(F(F}_{m-n}(u_0)))\ldots)) \le \tau^n \frac{\rho(u_0, u_1)}{1-\tau},\ \tau < 1.$$

Значит, последовательность приближений $\{u_n, n = 0, 1, \ldots\}$ фундаментальная и в силу полноты U имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u\ .$$

Тогда для непрерывного отображения F справедливо утверждение

$$F(u) = F(\lim_{n\to\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} F(u_n) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = u \in U.$$

Единственность неподвижной точки следует из соотношения

$$\rho(u^1, u^2) = \rho(F(u^1), F(u^2)) \le \tau \rho(u^1, u^2),\ \tau < 1.$$

Принцип сжатия дает и фактический метод приближенного решения операторного уравнения (2) – метод последовательных приближений.

Локализация корня уравнения подразумевает определение границ области пространства решений, которой принадлежит изолированный корень уравнения. Чаще всего это происходит в шаре $Q_r = ||u - u_0|| \le r$ определенного радиуса r.

Теорема. Пусть в полном метрическом пространстве Q_r, порожденном нормой $||\ ||$, оператор F удовлетворяет условию Липшица с константой $K < 1$. Тогда если

$$||u_0 - F(u_0)|| \le (1 - K)\, r,$$

то уравнение (2) имеет единственное решение $u \in Q_r$.

Доказательство. Покажем методом индукции, что все приближения

$$\{u_0,\ u_{n+1} = F(u_n),\ n = 0,\ 1,\ \dots\}$$

корня (2) находятся в области Q_r и

$$||u_{n+1} - u_n|| \le (1 - K)\, r\, K^n. \tag{3}$$

Предположим, что утверждение теоремы справедливо при $n \le m - 1$, т. е. все элементы последовательности u_n, $n = 0,\ 1,\ \dots,\ m - 1$ находятся в области Q_r и для них выполняется соотношение (3). Докажем, что в этом случае

$$||u_{m+1} - u_m|| \le (1 - K)\, r\, K^m$$

и

$$||u_{m+1} - u_0|| \le r.$$

Первое из соотношений является следствием индуктивного предположения

$$||u_{m+1} - u_m|| = ||F(u_m) - F(u_{m-1})|| \le K\, ||u_m - u_{m-1}|| \le$$
$$\le K\,(1 - K)\, r\, K^{m-1} = (1 - K)\, r\, K^m.$$

Второе вытекает из определения и свойств нормы

$$||u_{m+1} - u_0|| = ||(u_{m+1} - u_m) + (u_m - u_{m-1}) + \dots + (u_1 - u_0)|| \le$$
$$\le (1 - K)\, r\,(K^m + K^{m-1} + \dots + 1) \le r\,((K^m + K^{m-1} + \dots + 1) -$$
$$-(K^{m+1} + K^m + \dots + K)) \le r\,(1 - K^{m+1}) \le r.$$

Полнота метрического пространства Q_r обеспечивает сходимость фундаментальной последовательности $\{u_n,\ n = 0,\ 1,\ \dots\}$ к корню (2).

Наряду с решением уравнения вида (2) большое значение имеет разработка методов решения уравнений вида

$$F(u) = v,\ F : U \to V, \tag{4}$$

из которого (2) получается как частный случай при $V = U$.

В качестве пространства решений U и пространства образов V оператора F будем рассматривать банаховы пространства. В связи с этим уравнение (4) будем называть банаховым.

Определение. Пусть $A : U \to V$ – ограниченный линейный банаховый оператор.

Выражение

$$\lfloor A \rfloor = \inf_{||u||=1} ||A\,u||$$

будем называть i-гранью оператора A, а выражение

$$\lceil A \rceil = \sup_{||u||=1} ||A\,u||$$

назовем s-гранью оператора A.

В изложенном выше критерии локализации корня уравнения (2) не требуется дифференцируемость оператора F в области Q_r, однако для более точной оценки качества приближения потребуется существование не только первой производной Фреше оператора F уравнения (4), но и ограниченность второй производной F.

Идея метода Ньютона решения уравнения $F(u) = v$ (не ограничивая общности, будем считать далее, что $v = 0$) заключается в аппроксимации приращения $F(u) - F(u_0)$ его главной линейной частью $F'(u_0)(u - u_0)$ из формулы Тейлора. Тогда приближенное значение корня банахова уравнения

$$F(u) = 0, F : U \to V \tag{5}$$

можно найти, решив линейное уравнение

$$F'(u_0)(u - u_0) = -F(u_0).$$

Из «формулы конечных приращений» [5, с. 134] следует, что для достаточно гладкого в области Q_r отображения

$$||F(u) - F(u_0) - F'(u_0)(u - u_0)|| \le \frac{1}{2} \sup_{u \in Q_r} \lceil F''(u) \rceil \, ||u - u_0||^2.$$

Следовательно, норма невязки $||F(u)||$ на найденном приближении u, для которого $-F(u0) - F'(u0)(u - u0) = 0$, соизмерима с квадратом нормы приращения аргумента, что позволяет при достаточно малых приращениях организовать вблизи корня уравнения (5) сходящийся итерационный процесс

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n, \text{ где } \Delta u_n = -[F'(u_n)]^{-1} F(u_n), n = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Однако в бесконечномерном случае установление обратного оператора $[F'(u_n)]^{-1}$ на каждом шаге итерационного процесса может стать задачей достаточно трудоемкой. Поэтому иногда целесообразно использовать так называемый модифицированный метод Ньютона. Модификация состоит в том, что вместо последовательности (6) рассматривается последовательность, определяемая формулой

$$u_{n+1} = u_n - [F'(u_0)]^{-1} F(u_n), n = 0, 1, \ldots. \tag{7}$$

Идея модифицированного метода заключается в использовании на каждом шаге обратного оператора $[F'(u)]^{-1}$, вычисленного при одном и том же значении $u = u_0$.

Теорема. Пусть в некотором шаре Q_r банахово отображение $F : U \to V$ сильно дифференцируемо и производная $F'(u)$ удовлетворяет в нем условию Липшица с константой L, т. е.

$$\lceil F'(u) - F'(v) \rceil \le L \, ||u - v||.$$

При этом нулевое приближение u_0 выбрано так, что справедливы оценки

1. $[F'(u_0)]^{-1}$ существует и $\lceil [F'(u_0)]^{-1} \rceil \le C$;
2. $\eta \ge ||[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)||$;
3. $k = CL\eta \le 1/4$.

Тогда в шаре Q_r, где r – меньший корень уравнения

$$CLr^2 - r + \eta = 0, \tag{8}$$

уравнение (5) имеет единственное решение u^* и последовательность приближений

$$\{u_n, n = 0, 1, \ldots\},$$

определяемая рекуррентным соотношением (7), сходится к этому корню.

Для доказательства утверждения рассмотрим в пространстве U отображение

$$A(u) = u - [F'(u_0)]^{-1} F(u).$$

Его сильная производная в точке u_0 равна 0. Докажем, что отображение A переводит шар Q_r в себя.

Действительно,

$$\begin{gathered} ||A(u)-u_0|| \le ||u-u_0-[F'(u_0)]^{-1}F(u)|| \le \\ \le \lceil [F'(u_0)]^{-1} \rceil\, ||F'(u_0)(u-u_0)-F(u)+F(u_0)|| + ||[F'(u_0)]^{-1}F(u_0)|| \le \\ \le C\,||F'(u_0)(u-u_0)-F(u)+F(u_0)|| + \eta. \end{gathered} \tag{9}$$

Обозначим отображение, расположенное в скобках нормы, через $\Phi(u)$ и найдем его производную по переменной u:

$$\Phi'(u) = F'(u_0) - F'(u).$$

Следовательно, при $||u-u_0|| \le r$ имеет место неравенство

$$\lceil \Phi'(u) \rceil = \lceil F'(u_0) - F'(u) \rceil \le Lr.$$

Т. к. $\Phi(u_0) = 0$, то по «формуле конечных приращений»

$$||\Phi(u)|| = ||\Phi(u) - \Phi(u_0)|| \le Lr\,||u-u_0|| \le Lr^2.$$

Тогда, продолжая цепочку неравенств (9), получаем оценку

$$||A(u)-u_0|| \le CLr^2 + \eta = r,$$

а это значит, что отображение A переводит шар Q_r в себя.

Покажем, что A – сжимающее отображение элементов этого шара:

$$A'(u) = I - [F'(u_0)]^{-1}F'(u) = [F'(u_0)]^{-1}(F'(u_0) - F'(u)).$$

Отсюда при $||u-u_0|| \le r$ справедливо соотношение

$$\lceil A'(u) \rceil \le \lceil [F'(u_0)]^{-1} \rceil\, ||F'(u_0) - F'(u)|| \le CL\,||u-u_0|| \le CLr.$$

Но r – меньший корень уравнения (8), т. е. $r = \dfrac{1-\sqrt{1-4k}}{2k}\eta$, поэтому

$$\lceil A'(u) \rceil \le CLr = k\,\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2k} = \frac{1-\sqrt{1-4k}}{2} = q \le 1/2.$$

Используя неравенство (аналог теоремы о среднем для отображений)

$$||A(u) - A(u_0)|| \le \sup_{u \in Q_r} \lceil A'(u) \rceil\, ||u-u_0||,$$

заключаем, что A – сжимающее отображение.

Следовательно, оператор A имеет в шаре Q_r одну и только одну неподвижную точку u^*, для которой

$$u^* = u^* - [F'(u_0)]^{-1}F(u^*).$$

Вместе с тем, исходя из соотношения (7)

$$u_{n+1} = A(u_n) \equiv u_n - [F'(u_0)]^{-1}F(u_n)$$

и в силу теоремы о сжимающих отображениях, последовательность приближенных решений $\{u_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ сходится к u^*.

Из оценки s-грани оператора A сразу следует оценка скорости сходимости модифицированного метода Ньютона к корню уравнения (5):

$$||u_n - u^*|| \le \frac{q^n \eta}{1-q}.$$

Таким образом, погрешность приближения данного метода убывает не медленнее, чем геометрическая прогрессия с шагом q.

Как видно, использование на каждом шаге итерационного процесса обратного оператора производной Фреше, вычисленного при одном и том же значении аргумента, значительно замедляет сходимость процесса к корню уравнения. Сформулируем критерий локализации корня, основанный на квадратичной сходимости ньютоновского процесса (6).

Теорема. Пусть в шаре Q_r банахово отображение $F : U \to V$ дважды непрерывно дифференцируемо и $\sup\limits_{u\in Q}\lceil F''(u)\rceil \le K$, а для нуль-приближения u_0 выполнены условия:

1. $[F'(u_0)]^{-1}$ существует и $\lfloor F'(u_0)\rfloor^{-1} \le C$ ($\lfloor F'(u_0)\rfloor \ge C^{-1}$);
2. $\eta \ge ||[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)||$;
3. $k = CK\eta \le 1/2$;
4. $r \ge \dfrac{1-\sqrt{1-2k}}{k}\eta$.

Тогда последовательность

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,\ \Delta u_n = -[F'(u_n)]^{-1} F(u_n),\ n = 0, 1, \ldots$$

сходится в шаре Q_r к решению u^* уравнения со скоростью

$$||u^* - u_n|| \le t^* - t_n,$$

где t_n – последовательность приближений меньшего корня t^* уравнения

$$P(t) \equiv \frac{KC}{2}t^2 - t + \eta = 0,$$

построенная по правилу

$$t_{n+1} = t_n - [P'(t_n)]^{-1} P(t_n),\ t_0 = 0.$$

Доказательство теоремы приведено в [5, с. 141–142]. Опишем лишь фрагмент доказательства, связанный с индуктивным переходом.

По теореме [5, с. 115] оценим i-грань оператора $F'(u_n)$:

$$\lfloor F'(u_n)\rfloor \ge \lfloor F'(u_0)\rfloor - \sup_{u\in Q}\left|F''(u)\right| \, ||u_n - u_0|| \ge$$

$$\ge 1/C - K||(u_n - u_{n-1}) + \ldots + (u_1 - u_0)|| = 1/C - K((t_n - t_{n-1}) + \ldots + (t_1 - t_0)) \ge$$

$$\ge 1/C - Kt_n\ (= -P'(t_n)/C) > 1/C - Kt^* = 1/C - K\,\frac{1-\sqrt{1-2k}}{CK\eta}\eta \ge \frac{\sqrt{1-2k}}{C} \ge 0.$$

Отсюда следует существование обратного ограниченного оператора к $F'(u_n)$ и существование приближения u_{n+1}.

По теореме о среднем найдем $P(t_n)$ и оценим норму $F(u_n)$

$$P(t_n) = P(t_n) - P(t_{n-1}) - P'(t_{n-1})\Delta t_{n-1} = \int_0^1 (P'(t_{n-1} + \tau\Delta t_{n-1}) - P'(t_{n-1}))\Delta t_{n-1}\, d\tau =$$

$$= \int_0^1 (KC(t_{n-1} + \tau\Delta t_{n-1}) - KC(t_{n-1}))\Delta t_{n-1}\, d\tau = KC\int_0^1 \tau\Delta^2 t_{n-1}\, d\tau = \frac{1}{2}KC(t_n - t_{n-1})^2,$$

$$||F(u_n) - F(u_{n-1}) - F'(u_{n-1})\Delta u_{n-1}|| \le \frac{1}{2}K\,||u_n - u_{n-1}||^2 \le \frac{1}{2}K(t_n - t_{n-1})^2 = \frac{P(t_n)}{C}.$$

Поправка к u_n находится из уравнения $F'(u_n)\Delta u_n = -F(u_n)$, тогда по определению i-грани $\lfloor F'(u_n)\rfloor ||\Delta u_n|| \le ||F(u_n)||$ или $||\Delta u_n|| \le ||F(u_n)|| \lfloor F'(u_n)\rfloor^{-1}$.

Учитывая, что $1/C - Kt_n = -P'(t_n)/C$, оценим норму приращения Δu_n

$$||u_{n+1} - u_n|| \le \frac{||F(u_n)||}{\lfloor F'(u_n)\rfloor} \le -\frac{P(t_n)}{P'(t_n)} = t_{n+1} - t_n.$$

Отметим, что в изложенной редакции этот критерий является не улучшаемым на множестве отображений $F : R \to R$ [6, с. 244].

Итерационный базис полиномиального анализа

Ввиду отсутствия в бесконечномерных банаховых пространствах счетного базиса, алгоритм построения дискретной матрицы Гато (численного аналога производной Фреше) в точке приложения сильной производной основан на свойствах специального итеративного базиса. С увеличением порядка n дискретизации пространства увеличивается размерность этого базиса и матрицы Гато, а также увеличивается точность ее приближения к линейному оператору производной Фреше. Полиномиальная аппроксимация производной Фреше банахова отображения бесконечномерных пространств, представляющая собой матрицу неограниченной размерности, является примером реализации на практике теории сепарабельности пространств функционального анализа.

Для полиномиальной аппроксимации функциональных операторов в качестве проектора $\overset{n}{\Pi} : U \to P^n$ элементов пространства абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций на множество многочленов используем интерполяционный процесс Лагранжа с чебышевской сеткой. Благодаря уникальному свойству лагранжева базиса множества P^n, где коэффициенты разложения полинома являются его значениями в точках сетки, полиномиальные методы решения интегро-дифференциальных уравнений и многих других задач прикладного анализа становятся итерационными.

Итеративным базисом множества многочленов P^n на сетке Ω отрезка $[a, b]$ назовем систему функций

$$E = \{e^j(x), j = 0, \dots, n\},$$

удовлетворяющую условиям:

1) все функции $e^j(x), j = 0, \dots, n$ из E являются многочленами степени n;

2) значение $e^j(x)$ равно 1 при $x = x_j$ и равно 0 в других точках x_i ($i \ne j$).

Коэффициенты c_k^j , $k, j = 0, \dots, n$ этих многочленов находятся из системы

$$\sum_{k=0}^{n} W_{ik}\, c_k^j = e_i^j,\ i, j = 0, \dots, n,$$

где $(e_i^j, i = 0, \dots, n)$ – вектор, состоящий из нулей, $j^{-я}$ координата которого равна 1; W_{ik} – элементы матрицы Вандермонда W на сетке Ω.

Совокупность функций E образует линейно независимую систему многочленов степени n, т. е. базис множества $P^n_{[a,b]}$. Любой многочлен ${}^n\hbar(x) \in P^n_{[a,b]}$ можно представить (причем единственным образом) в базисе E линейной комбинацией

$$^{n}\hbar(x) = \sum_{j=0}^{n} {}^{n}\hbar(x_j)\, e^j(x),$$

где $\Omega = \{x_j, j = 0, \dots, n\}$ – сетка отрезка $[a, b]$.

Аналогичное представление любого многочлена $^{n}\hbar(x) \in P^n{}_{[a, b]}$ можно получить в виде формулы Лагранжа, т. е. итеративным базисом $P^n{}_{[a, b]}$ являются интерполяционные коэффициенты Лагранжа.

Опишем принцип построения проектора $\overset{n}{\Pi}$ элементов функционального B-пространства $U_{[a, b]}$ со всюду плотным множеством многочленов на подмножество $P^n{}_{[a, b]} \subset U_{[a, b]}$. Его идея в том, что сначала доказывается существование единственного многочлена степени n наилучшего приближения $u(x)$ по норме $U_{[a, b]}$ для любого элемента $u(x)$ из B-пространства.

Затем, исходя из метрических свойств проецируемого пространства $U_{[a, b]}$, этот единственный проекционный многочлен $u^n(x)$ определяется интерполированием элемента U^{n+1} на специально подобранной сетке Ω со значениями многочлена наилучшего приближения, равными значению функции $u(x)$ в узлах сетки.

Для определения коэффициентов многочлена наилучшего приближения $u(x)$ по норме функционального B-пространства минимизируем функционал, представляющий норму их разности. Полученный многочлен используем как полиномиальную проекцию $u(x)$ из $U_{[a, b]}$ в $P^n{}_{[a, b]}$, полученную оператором проектирования

$$\overset{n}{\Pi} : U_{[a, b]} \to P^n{}_{[a, b]}.$$

Построенный таким образом проектор является линейным оператором, т. к.

$$\overset{n}{\Pi}\,(u(x) + v(x)) = \overset{n}{\Pi}\, u(x) + \overset{n}{\Pi}\, v(x);$$

$$\overset{n}{\Pi}\,(\alpha \cdot u(x)) = \alpha\ \overset{n}{\Pi}\, u(x).$$

Дифференцируемый функционал $F\colon U \to R$ достигает экстремум в $v(x) \in U$, если его дифференциал в этой точке равен нулю при всех приращениях $\hbar = \hbar(x)$

$$F'(v(x))\hbar = 0.$$

Если в точке $v(x)$ функционал F, определенный в банаховом пространстве U, для всех $\hbar \in U$ удовлетворяет условиям

1. $F'(v(x))\, \hbar = 0$,
2. $F''((v(x))(\hbar, \hbar) \geq c\, ||\hbar||^2$, где $c > 0$,

то функционал F имеет в точке $v(x)$ минимум.

При существовании сильной производной отображения ее значение совпадает со слабой, поэтому функционал нормы разности многочлена $^{n}u(x)$ наилучшего приближения и самой функции $u(x)$ минимизируем с помощью его слабого дифференцирования по направлениям итеративного базиса $P^n{}_{[a, b]}$, которое аналогично вычислению частных производных в конечномерных пространствах.

Представление производной Фреше в виде матрицы упрощает построение и обращение оператора сильной производной.

В качестве примера найдем вектор коэффициентов $a^7 = (a_0, \dots, a_6)$ многочлена наилучшего приближения по норме Чебышева непрерывной функции

$$u(x) = \begin{cases} 0,5 - x, \text{ если } x \le 0,5 \\ x - 0,5, \text{ если } x > 0,5 \end{cases}, \; x \in [0; 1].$$

Численный эксперимент с описанным алгоритмом минимизации функционала определил многочлен наилучшего приближения шестой степени заданной функции $u(x) \in U_{[a,\,b]}$ с наибольшим отклонением по чебышевской норме:

$$||u(x) - {}^6u(x)||_C \le \delta = 2,55 \cdot 10^{-2},$$

где $u^6(x) = 0,525443233043373627969265525179599949154033 -$
$- 3,051821714256461127743517571697162047044227\, x +$
$+ 26,679830282873060805122612663897346158726901\, x^2 -$
$- 124,941882582367426257050478986731605646134858\, x^3 +$
$+ 256,685604904019280384255961499193896379991211\, x^4 -$
$- 233,057596335402680706876866406993712268308538\, x^5 +$
$+ 77,685865445134226902292288802331237422769512\, x^6.$

Теорема [7, с. 106]. Если $u(x)$ принадлежит множеству $C^a{}_{[a,b]}$ абсолютно непрерывных функций, то построенный на сетке Чебышева процесс интерполирования при $n \to \infty$ сходится к порождающей функции равномерно относительно x на отрезке $[a, b]$.

Преимущество чебышевской сетки объясняется не только наименьшим уклонением функций из $C^a{}_{[a,\,b]}$ от отвечающих им интерполяционных многочленов, т. е. ее аналитическими свойствами, но и геометрическими особенностями соответствующего данной сетке итерационного базиса.

Определение. Предскалярным произведением векторов u и v в линейном пространстве U назовем действительную функцию $\langle\langle u, v\rangle\rangle$, удовлетворяющую условиям:

1. $\langle\langle u, v\rangle\rangle = \langle\langle v, u\rangle\rangle$;
2. $\langle\langle \alpha\, u, v\rangle\rangle = \alpha\, \langle\langle u, v\rangle\rangle$, $0 < \alpha \in R$;
3. $\langle\langle \alpha\, u, u\rangle\rangle = \alpha\, \langle\langle u, u\rangle\rangle$, $\forall \alpha \in R$;
4. $\langle\langle u, u\rangle\rangle \ge 0$, причем $\langle\langle u, u\rangle\rangle = 0$ только при $u = 0$.

Введенное таким образом предскалярное произведение элементов полного по норме $||u|| = \langle\langle u, u\rangle\rangle^{1/2}$ банахова пространства $C_{[a,\,b]}$ задает в нем геометрию, подобную геометрии гильбертовых пространств. Например, угол между элементами u и v не отличается от угла между v и u (аксиома 1). Умножение одного из векторов пары на положительное число не влияет на величину угла между ними (аксиомы 1 и 2).

Произведение сонаправленных элементов B-пространства положительно, а противоположно направленных – отрицательно (аксиомы 3 и 4). В связи с этим угол между элементами $C_{[a,b]}$ будем определять из формулы

$$\langle\langle u, v\rangle\rangle = ||u||\; ||v||\; cos(u\hat{}v).$$

Равенство нулю предскалярного произведения ненулевых элементов означает их взаимную перпендикулярность относительно этой операции. Для введения понятия предскалярного произведения в B-пространстве $C_{[a,\,b]}$ непрерывных функций определим экстремальное умножение двух функций этого пространства.

Определение. Пусть

$$s = \max_{a \le x \le b} (u(x)\, v(x))$$

и

$$i = \min_{a \le x \le b} (u(x)\, v(x)),$$

тогда *экстремальным* умножением $u(x)$ и $v(x)$ из $C_{[a,\, b]}$ назовем функционал

$$\underset{a \le x \le b}{extr}(u(x),\, v(x)) = \begin{cases} s, \text{ если } |s| \ge |i|; \\ i, \text{ если } |i| > |s|. \end{cases}$$

Теорема. Экстремальное умножение элементов $u(x)$ и $v(x)$ банахова пространства $C_{[a,\, b]}$ задает в нем предскалярное произведение.

Доказательство справедливости 1, 3 и 4 условий из определения очевидно. Докажем истинность второго свойства при $\alpha > 0$:

$$\langle\langle \alpha\, u,\, v\rangle\rangle = \underset{a \le x \le b}{extr}(\alpha\, u(x),\, v(x)) = \begin{cases} \alpha\, s, \text{ если } |s| \ge |i|; \\ \alpha\, i, \text{ если } |i| > |s|. \end{cases} = \alpha\, \langle\langle u,\, v\rangle\rangle.$$

При $s + i = 0$ равенство $\langle\langle u, v\rangle\rangle = s$ означает, что предскалярное произведение в отличие от скалярного определяется с точностью до знака, а угол u^v находится из формулы $s = ||u||\ ||v||\ cos(u\hat{}v)$. Это обстоятельство никоим образом не влияет на достижение основных целей $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$, т. к. если $|cos(u\hat{}v)| \approx 0$, то углы u^v и $180^\circ - u\hat{}v$ незначительно отличаются от прямого, а если $|cos(u\hat{}v)| \approx 1$, то элементы $u(x)$ и $v(x)$ почти коллинеарны.

Полная линейно независимая система функций B-пространства не всегда может быть использована в качестве предбазиса. Во многом это связано с величиной углов между парами ее элементов. Если один из углов репера близок к 0° или 180°, то разложить по предбазису функцию из единичного шара, используя данную пару элементов системы, практически невозможно, из-за чего возникает проблема выбора предбазиса даже в сепарабельных B-пространствах. Одной из неудачных полных систем пространства $C_{[a,\, b]}$ с этой точки зрения является степенной предбазис $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$.

Значительно лучше различаются направления элементов итеративного предбазиса, но и в этом случае есть отличие в качестве аппроксимации функций из $C_{[a,\, b]}$ интерполяционными многочленами, зависящем от сетки отрезка $[a, b]$. Например, минимальное £ из множества значений углов между элементами итеративного предбазиса, построенного на равномерной сетке Ω^n, уже при $n = 16$ становится менее $30'$. На сетке Ω^{16} Чебышева параметр $£ > 66^\circ 30'$, что обеспечивает равномерную сходимость процесса интерполирования абсолютно непрерывных функций.

Локализация корней функциональных уравнений

Для решения интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений будем использовать полиномиальные методы приближения корней многочленами всюду плотного множества пространства решений. Тогда в описанном выше методе Ньютона появляется возможность аппроксимации производной Фреше оператора уравнения (5) с оценками граней, которые будут отвечать требованиям теории функционального анализа и могут применяться при локализации корней.

Рассмотрим задачу Коши с неразрешимым в явном виде относительно производной искомой функции нелинейным дифференциальным уравнением

$$ln\frac{du(x)}{dx} - \frac{du(x)}{dx} + u(x) = x\,,\ x \in [0;\, 1]$$

и начальным условием $u(0) = 1$.

Найти решение задачи Коши, имеющей два корня $u(x) = 1 + x$ и $u(x) = e^x$, численными методами не представляется возможным ввиду проблемы выбора текущих значений искомых функций из двух и более вероятных предложений. Следуя теории функционального анализа, подобные задачи необходимо решать функциональными методами, где приближения корня должны принадлежать пространству решений.

В результате численного эксперимента получены полиномиальные приближения корней задачи Коши $u(x) = 1 + x$ (с нулевого приближения $u(x) = 1 + 1{,}05\,x$) и $u(x) = e^x$ (с нулевого приближения $u(x) = 1 + 1{,}5\,x$), что говорит о существовании границы между областями притяжения этих корней в методе Ньютона.

Для исключения очевидных решений задачи Коши изменим правую часть дифференциального уравнения тестового примера

$$ln\,\frac{du(x)}{dx} - \frac{du(x)}{dx} + u(x) = x - \frac{x^3}{2},\; x \in [0;\, 1],\; u(0) = 1.$$

Чтобы достичь погрешность невязки $\varepsilon = 10^{-11}$ по норме пространства $V = C_{[a,\, b]}$ (т. е. в каждой точке отрезка $[0;\, 1]$ интегрированной среды Maple) и осуществить локализацию корня с точностью $\delta = 10^{-10}$,требуется определить в интерполяционном приближении коэффициенты 21 слагаемого с 45 знаками после запятой:

$$\begin{aligned}
u^{20}(x) = {} & 1{,}000000000000000000000000000000000000000000000 + \\
& + 0{,}999997450903941080495609328586195514385892831\,x + \\
& + 0{,}500000641004640303744962891360413816831795123\,x^2 + \\
& + 0{,}416664885404963852064398795079660948973687445\,x^3 + \\
& + 0{,}072919773056052500031535341991068782481993208\,x^4 + \\
& + 0{,}109880609697454703486962877719948602198251388\,x^5 - \\
& - 0{,}070254001627622054482130252473729969528585944\,x^6 + \\
& + 0{,}094881792121906664721188996865207341430061325\,x^7 - \\
& - 0{,}120928789503148303710991614133549895287916387\,x^8 + \\
& + 0{,}157991630368968601615681523353908132168602771\,x^9 - \\
& - 0{,}202312328662188212112523800852603902521668854\,x^{10} + \\
& + 0{,}244118665582037917195967901413974514460801052\,x^{11} - \\
& - 0{,}266871190745496604712490455967763741316628887\,x^{12} + \\
& + 0{,}255231870682767274235596848368678175844410639\,x^{13} - \\
& - 0{,}206905690966297092079778644041262680936505170\,x^{14} + \\
& + 0{,}137837639512838629415560089038401857335101383\,x^{15} - \\
& - 0{,}072905068051804152769580708668832384378881476\,x^{16} + \\
& + 0{,}029288393674226899137536144067201749572294310\,x^{17} - \\
& - 0{,}008364402474524413927111069077651101540552282\,x^{18} + \\
& + 0{,}001508767367132599473580499007900761573757618\,x^{19} - \\
& - 0{,}000128957365748611516125557124949191296300889\,x^{20}.
\end{aligned}$$

С увеличением степени итеративный интерполяционный многочлен будет точнее аппроксимировать искомый корень, а производные полученного приближения будут точнее соответствовать производным искомого решения.

В качестве примера решения нелинейного интегрального уравнения рассмотрим задачу поиска функции $u(x)$, удовлетворяющей равенству

$$F(u) \equiv \int_0^1 u(t)\,ln(1 + u(x) + u(t))\,dt = 2 + x - x^2,\; x \in [0;\, 1].$$

Отличие интегрального оператора от дифференциального в уравнении (5) – более слабые ограничения на степень гладкости элементов пространства решений.

Здесь проще добиться сходимости полиномиального процесса аппроксимации, т. к. при решении дифференциального уравнения необходимо доказать сходимость этого процесса к корню не только для приближения $u^n(x)$ в $C_{[a,\,b]}$, но и по норме $C^k_{[a,\,b]}$.

Один из корней $u(x)$ уравнения, найденный параметрическим методом Ньютона с нуль-приближения $u_0(x) = 1 + x$, имеет симметричный относительно оси $x = 0,5$ график с $u(0) = u(1) = 1,11337968955\ldots$. Полиномиальное приближение этого корня с параметром дискретизации $n = 10$ пространства решений $C_{[a,\,b]}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
u^{10}(x) &= 1,11337968955264781516477820187974276322580006525 73 + \\
&+ 2,383953308354430311903277523526928622118375757194\, x - \\
&- 1,606698623238150977737360529416687074272228602295\, x^2 - \\
&- 1,386522001012796705248266960506303819683924 27045\, x^3 + \\
&+ 0,300548094891136355964908808570498564493954 6389\, x^4 + \\
&+ 0,398874888624261212392158605341844225164559 3254\, x^5 - \\
&- 0,024128518122639333486555205149839087126462 3311\, x^6 - \\
&- 0,069673562721101970796480464306321620380475 3352\, x^7 - \\
&- 0,012092989581326762352598228502062913638278 0313\, x^8 + \\
&+ 0,019674253507734836701145563052428879155597 5334\, x^9 - \\
&- 0,003934850701546967340229112610485775831119 44681\, x^{10}
\end{aligned}$$

(точность данного приближенного решения по невязке равна $\varepsilon = 3,5\cdot 10^{-10}$).

Решим с точностью до локализации ($\delta = 10^{-6}$) корня краевую задачу для нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$F(u(x)) \equiv u''(x)^{\int_0^1 \frac{ln|u(t)|dt}{1+t^2+u^2(x)}} + sin(u'(x)) = f(x),\ x \in [0;\,1] \tag{10}$$

с $f(x) = 1,7 + 0,7x - 0,7x^2$ и граничными условиями $u(0) = 1$, $u(1) = 2,6$.

Локализующим приближением, в δ-окрестности которого находится изолированный корень (10) $u^*(x) \in C^3_{[a,\,b]}$, является многочлен

$$\begin{aligned}
u^{20}(x) &= 1 + 1,8771257901x - 0,2078394535x^2 - 0,1309048306x^3 + 0,0381626580x^4 + \\
&+ 0,0299962918\, x^5 - 0,0069904404\, x^6 + 0,0158430316\, x^7 - 0,0315544899\, x^8 + \\
&+ 0,0385340690\, x^9 - 0,0917285535\, x^{10} + 0,2452625574\, x^{11} - 0,5299622003\, x^{12} + \\
&+ 0,9200025452x^{13} - 1,2542739854x^{14} + 1,3014076559x^{15} - 0,9982932186x^{16} + \\
&+ 0,5467412270\, x^{17} - 0,2021221423\, x^{18} + 0,0452236510\, x^{19} - 0,0046301625\, x^{20}
\end{aligned}$$

с нормой невязки $||F(u^{20}(x))||_C \le \varepsilon = 5,0\cdot 10^{-6}$.

Аналогично находится приближение корня краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения со смешанными производными

$$F(u) \equiv e^{\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\,\partial y}} + \iint_X \frac{ln\dfrac{\partial^2 u(t,s)}{\partial t\,\partial s}dt\,ds}{1 - ln\dfrac{\partial^2 u(x,s)}{\partial x\,\partial s}\dfrac{\partial^2 u(t,y)}{\partial t\,\partial y}} - f(x,y) = 0,$$

где

$$f(x,y) = (1 + x + y)\, ln\frac{(3 + x + y)^{3+x+y}(1 + x + y)^{1+x+y}}{(2 + x + y)^{2(2+x+y)}} + e^{-(x+y)} - 1,$$

удовлетворяющее на границе $X = \{(x,\, y)\colon 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ условиям

$$u(x,\ 0) = x - x^2 + e^{-x},\ u(x,\ 1) = x - x^2 + e^{-x-1},$$

$$u(0,\ y) = -y + y^2 + e^{-y},\ u(1,\ y) = -y + y^2 + e^{-y-1}.$$

Локализующее приближение корня имеет вид:

$$u^4(x, y) =$$
$$= 1 - 1{,}999479880628487074848812313371733749492719687998538742\ y +$$
$$+ 1{,}495573778135430620770395894801527192724580833951567728\ y^2 -$$
$$- 0{,}153751055776189882304232701105018944099825649101708533\ y^3 +$$
$$+ 0{,}025536599440688657978172889836686368313775634180447381\ y^4 +$$
$$+ 0{,}000520119371512925151187686628266250507280312001461257\ x +$$
$$+ 0{,}942016171857974309743470650543783574261930299609281599\ x\,y -$$
$$- 0{,}296754837555422642940685720436995716429911503262830 16\ x\,y^2 -$$
$$- 0{,}103971780743459254475252717868900569733196057111844 25\ x\,y^3 +$$
$$+ 0{,}090502227121686957627209078233751636600703653654848 74\ x\,y^4 -$$
$$- 0{,}504426221864569379229604105198472807275419166048432 27\ x^2 -$$
$$- 0{,}296754837555422642940685720436995716429911503262830 16\ x^2\,y -$$
$$- 0{,}444967597749907847824110090213841099644159840030416 32\ x^2\,y^2 +$$
$$+ 0{,}814307222455793053834029432468727038712670968797955 63\ x^2\,y^3 -$$
$$- 0{,}385847160726210625730930042783418319507945693384635 95\ x^2\,y^4 -$$
$$- 0{,}15375105577618988230423270110501894409982564910170853\ x^3 -$$
$$- 0{,}103971780743459254475252717868900569733196057111844 25\ x^3\,y +$$
$$+ 0{,}814307222455793053834029432468727038712670968797955 63\ x^3\,y^2 -$$
$$- 1{,}106400448124910236517172248252529466354281427036732 45\ x^3\,y^3 +$$
$$+ 0{,}493254209710302326500658458380191353841228490392162 50\ x^3\,y^4 +$$
$$+ 0{,}025536599440688657978172889836686368313775634180447381\ x^4 +$$
$$+ 0{,}090502227121686957627209078233751636600703653654848 74\ x^4\,y -$$
$$- 0{,}385847160726210625730930042783418319507945693384635 95\ x^4\,y^2 +$$
$$+ 0{,}493254209710302326500658458380191353841228490392162 50\ x^4\,y^3 -$$
$$- 0{,}214051485614807806329293333414561186714579466867405614\ x^4\,y^4.$$

Заключение

Локализация методами полиномиального анализа изолированного корня функционального уравнения (5) в определенной окрестности $Q_r = ||u - u_0|| \leq r$ приближения из всюду плотного множества пространства решений позволяет исследователям при достаточно малом r использовать его в качестве искомого корня не нарушая методологию функционального анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.
2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.
3. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайнико, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
4. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.
5. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование : пособие / В. В. Морозов. – Брест : БрГУ, 2012. – 246 с.

6. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Наука и техника, 1983. – 288 с.

7. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Линейная алгебра и нелинейные уравнения / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Наука и техника, 1985. – 280 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.04.2020

Morozov V. V. **An Iterative Basis in the Polynomial Analysis Banach Equations**

The absence of a counting basis in infinite-dimensional Banach spaces forces researchers studying nonlinear functional equations with differential and / or integral operators to develop ever-new grandiose grid schemes. However, following the postulates of functional analysis by A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin [1], L. V. Kantorovich and G. P. Akilov [2], the approximation of the roots of Banach equations should be performed using elements of a set of polynomials that are everywhere dense in a separable space. In order to avoid theoretical flaws in the discrete representation of elements of continuous functional spaces (for example, when proving the convergence of a discrete approximation to a continuous function by the norm), a polynomial basis is necessary for approximating elements of continuous Banach spaces. As such, we use a basis that is both the basis of an everywhere dense set and the iterative basis of the computational process, which allows us to increase the discretization parameter of spaces arbitrarily and reduce the approximation error of their elements arbitrarily when proving the convergence of a polynomial approximation.