УДК 519.6 + 517.983.54

О. В. Матысик
канд. физ.-мат. наук, доц.,
доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
e-mail: matysikoleg@mail.ru

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА МЕТОДОМ НЕЯВНОГО ТИПА

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений первого рода с положительным ограниченным и самосопряженным оператором предлагается неявный итерационный процесс. Изучен случай неединственного решения операторного уравнения. Показано, что в этом случае итерационный метод сходится к решению с минимальной нормой. Для предложенного метода доказана сходимость в энергетической норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности. Использование энергетической нормы позволяет сделать метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения уравнения. Проведено сравнение оценок погрешности рассматриваемого итерационного метода и явного метода Ландвебера.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с ограниченным положительным самосопряженным оператором A, для которого нуль является собственным значением оператора A, т. е. задача (1) имеет неединственное решение. Предположим, что $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнения решение (неединственное) задачи (1) существует. Для решения задачи предлагается неявный итерационный процесс:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha A\left(y - Ax_{n+1}\right), \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

2. Сходимость неявного метода итераций в случае неединственного решения уравнения. Обозначим через $N(A) = \left\{x \in H \,|\, Ax = 0\right\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $A \geq 0$, $y \in H$, $\alpha \in (0, +\infty)$, *тогда для итерационного метода* (2) *верны следующие утверждения*:

а) $Ax_n \to \Pi(A)y$, $\|Ax_n - y\| \to J(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$;

б) приближения (2) *сходятся тогда и только тогда, когда уравнение* $Ax = \Pi(A)y$ *разрешимо. В последнем случае* $x_n \to P(A)x_0 + x^*$, *где* x^* *– минимальное решение.*

Доказательство.

Применим оператор A к (2), уменьшив в формуле (2) индекс на единицу. Получим $Ax_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2\left(y - Ax_n\right)$, отсюда $A\left(E + \alpha A^2\right)x_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2 y$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Т. к. $AP(A)y = 0$, то имеем $\left(E + \alpha A^2\right)\left(Ax_n - \Pi(A)y\right) =$

$= Ax_{n-1} - \Pi(A)y$. Обозначим $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$, $v_n \in M(A)$, тогда $\left(E + \alpha A^2\right)v_n = v_{n-1}$.

Отсюда $v_n = \left(E + \alpha A^2\right)^{-1} v_{n-1}$, следовательно, $v_n = \left(E + \alpha A^2\right)^{-n} v_0$. Имеем $A \geq 0$ и A – положительно определен в $M(A)$, т. е. $(Ax, x) > 0$ для $\forall x \in M(A)$. Т. к. $\alpha \in (0, +\infty)$, то $\left\|\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\right\| \leq 1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|v_n\| = \left\|\left(E + \alpha A^2\right)^{-n} v_0\right\| = \left\|\int_0^{\|A\|} \frac{dE_\lambda v_0}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n}\right\| \leq \left\|\int_0^{\tau} \frac{dE_\lambda v_0}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n}\right\| + \left\|\int_\tau^{\|A\|} \frac{dE_\lambda v_0}{\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^n}\right\| \leq \left\|\int_0^{\tau} dE_\lambda v_0\right\| +$$

$$+ q^n(\tau)\left\|\int_\tau^{\|A\|} dE_\lambda v_0\right\| \leq \|E_\tau v_0\| + q^n(\tau)\|v_0\| \to 0$$

при $n \to \infty$, $\tau \to 0$ (E_τ сильно стремится к 0 в силу свойств спектральной функции [1]). Здесь $\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^{-1} \leq q(\tau) < 1$ при $\lambda \in \left[\tau, \|A\|\right]$. Следовательно, $v_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$. Отсюда справедливо записать $\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = J(A, y)$ [2; 3]. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем б). Пусть приближения (2) сходятся. Покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует, что $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, поэтому $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = Ax^*$, где x^* – минимальное решение уравнения (1) (оно единственно в $M(A)$). Тогда метод (2) примет вид:

$$x_n = x_{n-1} + \alpha A(y - Ax_n),\ \left(E + \alpha A^2\right)x_n = x_{n-1} + \alpha Ay,$$

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_n = x_{n-1} + \alpha A\Pi(A)y = x_{n-1} + \alpha A^2 x^* = \left(E + \alpha A^2\right)x_{n-1} -$$

$$-\alpha A^2 x_{n-1} + \alpha A^2 x^* = \left(E + \alpha A^2\right)x_{n-1} + \alpha A^2\left(x^* - x_{n-1}\right).$$

Отсюда $x_n = x_{n-1} + \alpha A^2\left(E + \alpha A^2\right)^{-1}\left(x^* - x_{n-1}\right)$.

Последнее равенство разобьем на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha\left(E + \alpha A^2\right)^{-1} A^2 P(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0.$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} + \alpha\left(E + \alpha A^2\right)^{-1} A^2 \Pi(A)\left(x^* - x_{n-1}\right) = \Pi(A)x_{n-1} +$$

$$+\alpha\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}A^2\left[\Pi(A)x^*-\Pi(A)x_{n-1}\right]=\Pi(A)x_{n-1}+\alpha\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}A^2\left[x^*-\Pi(A)x_{n-1}\right],$$

т. к. $x^*\in M(A)$.

Обозначим $w_n=\Pi(A)x_n-x^*$, тогда из равенства

$$\Pi(A)x_n-x^*=\Pi(A)x_{n-1}-x^*+\alpha\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}A^2\left[x^*-\Pi(A)x_{n-1}\right]$$

получим

$$\Pi(A)x_n-x^*=w_n=w_{n-1}-\alpha\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}A^2w_{n-1}=\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}w_{n-1}=\left(E+\alpha A^2\right)^{-n}w_0$$

и, аналогично v_n, покажем, что $w_n\to 0, n\to\infty$.

Т. к. $\alpha\in(0,+\infty)$, $(Ax,x)>0$ для $\forall x\in M(A)$, то $\left\|\left(E+\alpha A^2\right)^{-1}\right\|\le 1$, и поэтому

$$\|w_n\|=\left\|\left(E+\alpha A^2\right)^{-n}w_0\right\|=\left\|\int_0^{\|A\|}\frac{dE_\lambda w_0}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}\right\|\le\left\|\int_0^{\xi}\frac{dE_\lambda w_0}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}\right\|+\left\|\int_\xi^{\|A\|}\frac{dE_\lambda w_0}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}\right\|\le\left\|\int_0^{\xi}dE_\lambda w_0\right\|+$$

$$+q^n(\xi)\left\|\int_\xi^{\|A\|}dE_\lambda w_0\right\|\le\left\|E_\xi w_0\right\|+q^n(\xi)\|w_0\|\to 0$$

при $n\to\infty,\ \xi\to 0$. Здесь $\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{-1}\le q(\xi)<1$ при $\lambda\in\left[\xi,\|A\|\right]$. Таким образом, $\Pi(A)x_n\to x^*$. Отсюда получим $x_n=P(A)x_n+\Pi(A)x_n\to P(A)x_0+x^*$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. *Т. к. у нас* $x_0=0$, *то* $x_n\to x^*$, *т. е. итерационный процесс* (2) *сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.*

3. Сходимость метода в энергетической норме

Ниже предполагается, что нуль не является собственным значением оператора *A*, следовательно, уравнение (1) имеет единственное решение. Однако нуль принадлежит спектру оператора *A*, поэтому задача (1) неустойчива и, значит, некорректна. Для отыскания решения используется метод (2).

Правую часть уравнения (1), как это обычно бывает на практике, считаем известной приближенно, т. е. вместо *y* известно $\delta-$ приближение $y_\delta,\|y-y_\delta\|\le\delta$. Тогда итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}+\alpha A\left(y_\delta-Ax_{n+1,\delta}\right),\quad x_{0,\delta}=0. \qquad (3)$$

Сходимость методов (2) и (3) в исходной норме пространства *H* была изучена в [4]. Там показано, что метод (3) сходится при условии $\alpha\in(0,+\infty)$, если число итераций n выбирать в зависимости от уровня погрешности δ так, чтобы $\sqrt{n}\delta \to 0$ при $n \to \infty, \delta \to 0$. В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z,\ s > 0$, в работе [4] получена оценка погрешности метода итераций (3): $\|x - x_{n,\delta}\| \le s^{s/2}(4n\alpha)^{-s/2}\|z\| + 2\sqrt{n\alpha}\delta, n \ge 1$. Минимизация по n полученной оценки дает оптимальную оценку погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s)\cdot s^{-s/(2(s+1))}\delta^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)},$$

которая получается при $n_{\text{опт}} = 2^{-2}s^{(s+2)/(s+1)}\alpha^{-1}\|z\|^{2/(s+1)}\delta^{-2/(s+1)}$.

Оптимальная оценка погрешности имеет порядок $O\left(\delta^{s/(s+1)}\right)$, и, как следует из монографии [5], он является оптимальным в классе задач с истокопредставимыми решениями $x = A^s z, s > 0$. Сравнение метода (3) с широко известным явным методом итераций Ландвебера $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha\left(y_\delta - Ax_{n,\delta}\right)$, $x_{0,\delta} = 0$ [2; 3; 5–14] показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы.

Достоинство явных методов в том, что они не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом случае явный метод предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод (3) обладает следующим важным достоинством. В указанном явном методе на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \le \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести к необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) ограничений сверху на $\alpha \in (0, +\infty)$ нет. Это позволяет считать $\alpha \in (0, +\infty)$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$). в связи с чем оптимальную оценку погрешности для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И, тем не менее, метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, где $x \in H$ [3, 8]. Покажем сходимость метода (3) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме.

Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = \left(x - x_n\right) + \left(x_n - x_{n,\delta}\right). \tag{4}$$

Запишем первое слагаемое в виде $x - x_n = A^{-1}\left(E + \alpha A^2\right)^{-n} y = \left(E + \alpha A^2\right)^{-n} x$.

Как было показано в [4], $x - x_n$ мало в исходной норме гильбертова пространства H при $n \to \infty$, но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки делалось дополнительное предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это предположение не понадобится.

Действительно, с помощью интегрального представления оператора $A=\int_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M=\|A\|$ и E_λ – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x-x_n\|_A^2=\left(A\left(E+\alpha A^2\right)^{-n}x,\left(E+\alpha A^2\right)^{-n}x\right)=\int_0^M \lambda\frac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{2n}}d\left(E_\lambda x,x\right).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подынтегральной функции $f(\lambda)=\frac{\lambda}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{2n}}$ при $\lambda\in[0,M]$. Функция $f(\lambda)$ – частный случай при $s=1$ функций, оцененных в работе [4]. Там показано, что при условии $\alpha\in(0,+\infty)$ $\max\limits_{\lambda\in[0,M]}|f(\lambda)|\le(8n\alpha)^{-1/2}$.

Следовательно, справедлива следующая оценка $\|x-x_n\|_A^2\le(8n\alpha)^{-1/2}\|x\|^2$. Отсюда $\|x-x_n\|_A\le(8n\alpha)^{-1/4}\|x\|$. Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка $s=1/2$ для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4). Как показано в [4], справедливо равенство $x_n-x_{n,\delta}=A^{-1}\left[E-\left(E+\alpha A^2\right)^{-n}\right](y-y_\delta)$. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, получим

$$\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2=\int_0^M \lambda^{-1}\left[1-\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{-n}\right]^2 d\left(E_\lambda(y-y_\delta),y-y_\delta\right).$$

Обозначим через $g(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{-n}\right]^2$ подынтегральную функцию, а через $g_1(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{-n}\right]$, тогда $g(\lambda)=g_1(\lambda)\left[1-\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{-n}\right]$. Функция $g_1(\lambda)$ была оценена в [4], где показано, что при условии $\alpha\in(0,+\infty)$ $g_1(\lambda)\le2\sqrt{n\alpha}$. При $\alpha\in(0,+\infty)$ имеем $\frac{1}{1+\alpha\lambda^2}\le1,\ \forall\lambda\in[0,M]$, поэтому $1-\left(1+\alpha\lambda^2\right)^{-n}\le1$.

Отсюда $g(\lambda)\le2\sqrt{n\alpha}$. Таким образом, $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A^2\le2\sqrt{n\alpha}\delta^2$, следовательно, $\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\le\sqrt[4]{4n\alpha}\delta,\ n\ge1$.

Поскольку $\|x-x_n\|_A\to0,\ n\to\infty$ и

$$\|x-x_{n,\delta}\|_A\le\|x-x_n\|_A+\|x_n-x_{n,\delta}\|_A\le\|x-x_n\|_A+\sqrt[4]{4n\alpha}\delta,$$

то для сходимости $\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \to 0, n \to \infty$ достаточно, чтобы $\sqrt[4]{n}\delta \to 0, n \to \infty, \delta \to 0$.

Итак, доказана

Теорема 2. *При условии* $\alpha \in (0, +\infty)$ *итерационный метод* (3) *сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций n выбирать из условия* $\sqrt[4]{n}\delta \to 0$ *при* $n \to \infty, \delta \to 0$.

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода итераций (3) в энергетической норме

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A \le \sqrt[4]{(8n\alpha)^{-1}}\left\|x\right\| + \sqrt[4]{4n\alpha}\delta, n \ge 1. \tag{5}$$

Оптимизируем оценку (5) по *n*. Для этого при заданном δ найдем такое значение числа итераций *n*, при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по *n* от правой части неравенства (5), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-5/2}\alpha^{-1}\left(\delta^{-1}\left\|x\right\|\right)^2. \tag{6}$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в оценку (5), найдем ее оптимальное значение

$$\left\|x - x_{n,\delta}\right\|_A^{\text{опт}} \le 2^{7/8}\sqrt{\delta\left\|x\right\|}. \tag{7}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Оптимальная оценка погрешности для метода* (3) *при условии* $\alpha \in (0, +\infty)$ *в энергетической норме имеет вид* (7) *и получается при* $n_{опт}$ *из* (6).

Замечание 2. *Из неравенства* (7) *вытекает, что оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра* α. *Но* $n_{опт}$ *зависит от* α *и, поскольку на* α *нет ограничений сверху* $(\alpha \in (0, +\infty))$, *то за счет выбора* α *можно получить* $n_{опт} = 1$, *т. е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять* $\alpha_{опт} = 2^{-5/2}\left(\delta^{-1}\left\|x\right\|\right)^2$.

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства *H*. Эти условия дает

Теорема 4. *Если выполнены условия* 1) $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$, 2) $E_\varepsilon x = 0$, *где* $E_\varepsilon = \int_0^\varepsilon dE_\lambda$, ε – *фиксированное положительное число* $(0 < \varepsilon < \left\|A\right\|)$, *то из сходимости* $x_{n,\delta}$ *к x в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства.*

Доказательство

Т. к. по условию теоремы $E_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ и $E_\varepsilon x = 0$, то имеем $E_\varepsilon(x_{n,\delta} - x) = 0$ и $\left(E_\varepsilon(x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x\right) = 0$, т. е. $\int_0^\varepsilon d(E_\lambda(x_{n,\delta} - x), x_{n,\delta} - x) = 0$. Следовательно, $\int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda}\, d(E_\lambda(x_{n,\delta} - x),\, A(x_{n,\delta} - x)) = 0$. Тогда получим, что

$$\left\|x_{n,\delta}-x\right\|^2 = \int_0^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x)) =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x)) + \int_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x)) =$$

$$= \int_\varepsilon^M \frac{1}{\lambda} d(E_\lambda(x_{n,\delta}-x), A(x_{n,\delta}-x)) \le \frac{1}{\varepsilon}\left\|x_{n,\delta}-x\right\|_A^2 .$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 3. *Т. к.* $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E-\left(E+\alpha A^2\right)^{-n}\right]y_\delta$, *то для того, чтобы* $x_{n,\delta}$ *удовлетворяло условию* $E_\varepsilon x_{n,\delta}=0$, *достаточно потребовать, чтобы* $E_\varepsilon y_\delta = 0$. *Таким образом, если* $E_\varepsilon x = 0$ *и* $E_\varepsilon y_\delta = 0$, *то из сходимости метода итераций* (3) *в энергетической норме следует его сходимость в обычной норме пространства H, следовательно, для оценки погрешности не потребуется предположения истокообразной представимости точного решения.*

Для решения уравнений с несамосопряженным или неположительным, но ограниченным оператором A следует перейти к уравнению $A^*Ax = A^*y$. Тогда при приближенном элементе y_δ метод (3) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A^*A\left(A^*y_\delta - A^*Ax_{n+1,\delta}\right), \quad x_{0,\delta}=0.$$

Предложенный метод может быть применен для решения прикладных некорректных задач, которые встречаются в томографии, математической экономике, акустике, сейсмике, спектроскопии, диагностике плазмы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Физматгиз, 1959. – 680 с.
2. Bialy, H. Iterative Behandlung linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, № 2. – P. 166–176.
3. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.
4. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в неявном итерационном методе решения линейных некорректных уравнений / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2019. – № 1. – С. 72–78.
5. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
6. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
7. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
8. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.

9. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.

10. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных уравнений первого рода / О.В. Матысик // Тр. Нижегород. гос. техн. ун-та им. Р. Е. Алексеева. – 2015. – № 4 (111). – С. 52–61.

11. Matysik, O. V. Regularization of ill-posed problems in Hilbert space by means of the implicit iteration process / O. V. Matysik // J. Comp. Appl. Math. – 2015. – № 2 (119). – P. 33–41.

12. Матысик, О. В. Метод итераций неявного типа решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Тр. Нижегород. гос. техн. ун-та им. Р. Е. Алексеева. – 2016. – № 2 (113). – С. 47–54.

13. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в методе простых итераций с попеременно чередующимся шагом решения линейных некорректных уравнений / О. В. Матысик // Изв. Смолен. гос. ун-та. – 2015. – № 5 (33). – С. 58–66.

14. Matysik, O. V. M. A. Krasnosel'skii theorem and iterative methods for solving ill-posed linear problems with a self-adjoint operator / O. V. Matysik, P. P. Zabreiko // Comput. Methods Appl. Math. (De Gruyter). – 2015. – Vol. 15, № 3. – P. 373–389.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 11.04.2019

Matysik O. V. **The Iterative Regularization of Linear Incorrect Equations of the First Kind by the Method of Implicit Type**

In the Hilbert space for solving linear operator equations the first kind with affirmative limited and self-conjugate operator the implicit iteration method is proposed. The case of non-uniqueness of solving operator equation is investigated. It is shown, that in this case the iteration method converges to the decision with the minimal norm. In energy norm of Hilbert space for the proposed method convergence is proved and a priori estimations of this method error have been received. Use of energy norm allows to make a method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution of the equation. The comparison of the error estimations of the given iteration method and the evident method of Landweber has been done.