МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

Д. В. Грицук[1], А. А. Трофимук[2]
[1]*канд. физ.-мат. наук, зав. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*
[2]*канд. физ.-мат. наук, докторант каф. алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины*
e-mail: [1]dmitry.gritsuk@gmail.com; [2]alexander.trofimuk@gmail.com

СТРОЕНИЕ π-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ, У КОТОРОЙ ИНДЕКСЫ НОРМАЛЬНЫХ ЗАМЫКАНИЙ ИЛИ КОФАКТОРЫ ПОДГРУПП ИЗ ФАКТОРОВ ОГРАНИЧЕНЫ*

Установлено, что если порядки кофакторов субнормальных подгрупп либо их индексы в нормальных замыканиях свободны от квадратов, то производная π-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2, если $2 \notin \pi$ и производная π-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4, если $2 \in \pi$.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения соответствуют [1; 2].

Хорошо известно, что свойство нормальности подгруппы в группе не является транзитивным. В 1957 году Гашюц [3] установил строение разрешимых групп, у которых нормальность обладает транзитивным свойством (t-группы). Такие группы можно представить в виде полупрямого произведения нормальной абелевой холловой подгруппы нечетного порядка и дедекиндовой подгруппы.

Группы, близкие к t-группам, можно определять при помощи дефекта субнормальной подгруппы H, т. е. длины наименьшего субнормального ряда от подгруппы H до группы G. Очевидно, что каждая собственная нормальная подгруппа имеет дефект 1, поэтому в t-группах все субнормальные подгруппы имеют дефект 1. Группы с субнормальными подгруппами дефекта 2 исследовались в [4].

В теории групп всякую подгруппу H группы G можно окружить двумя нормальными в G подгруппами – нормальным замыканием H^G и ядром H_G, где H^G является наименьшей нормальной в G подгруппой, содержащей H, а H_G – наибольшей нормальной в G подгруппой, содержащейся в H. Понятно, что в t-группах

$$|H^G\colon H| = |H\colon H_G| = 1$$

для каждой субнормальной подгруппы H. Если G не является t-группой, то

$$|H^G\colon H| > 1, |H\colon H_G| > 1$$

для каждой субнормальной ненормальной подгруппы H.

В работе [5] Го Вэньбинь, Ху Бинь и В. С. Монахов изучили инварианты разрешимой группы G в зависимости от значений числовой функции t(G), определенной следующим образом:

$$t_p\ (G) = \max\{n | p^n T |H^G\colon H|, H\ sn\ G\}, p \in \pi(G).$$
$$t(G) = max_{p\in\pi(G)}(t_p(\mathrm{G})).$$

**Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф17М-063).*

Следуя Хупперту, будем использовать запись $p^m T|H^G\colon H|$ для обозначения того, что p^m делит $|H^G\colon H|$, а p^{m+1} не делит $|H^G\colon H|$. Запись $H\, sn\, G$ обозначает, что подгруппа H субнормальна в группе G.

Если $t(G) = 0$, то $H^G = H$ для всех субнормальных подгрупп H группы G и группа G становится t-группой. В [5] в зависимости от значений $t(G)$ найдены верхние границы нильпотентной, производной и p-длины разрешимой группы G.

Напомним, что кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа H/H_G.

В работе [6] решена двойственная задача: исследованы инварианты разрешимой группы G в зависимости от канонических разложений порядков кофакторов субнормальных подгрупп.

В. С. Монаховым в 2006 г. [7] было предложено понятие производной π-длины π-разрешимой группы G как наименьшее число абелевых π-факторов среди всех субнормальных (π', π)-рядов группы G, где π – некоторое подмножество множества простых чисел P, а π' – дополнение к π во множестве P.

В дальнейшем производную π-длину π-разрешимой группы G будем обозначать через $l_\pi^a(G)$. Если $\pi(G) = \pi$, то значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением производной длины группы G.

В работе [8] изучены свойства производной π-длины π-разрешимой группы, в работе [9] исследованы π-разрешимые группы, у которых силовские p-подгруппы циклические для всех $p \in \pi$. В частности, показано, что производная π-длина таких π-разрешимых групп не превышает 2.

Вполне естественно развить рассмотренные выше результаты работ [5] и [6] на случай π-разрешимых групп. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Пусть G – π-разрешимая группа. Тогда $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \le 2$, если $2 \notin \pi$, и $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \le 4$, если $2 \in \pi$ в каждом из следующих случаев:*

1) порядок кофактора H/H_G свободен от квадратов, где H – произвольная субнормальная подгруппа G;

2) индекс $|H^G\colon H|$ свободен от квадратов, где H – произвольная субнормальная подгруппа G.

Вспомогательные результаты

Через $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы G соответственно; Z_m – циклическая группа порядка m; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в G p- и p'-подгруппы соответственно, а $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G.

Для доказательства основного результата данной статьи понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть G – π-разрешимая группа и N – минимальная нормальная p-подгруппа группы G, $p \in \pi$. Тогда $|N| \le p^2$ в каждом из следующих случаев:*

1) порядок кофактора H/H_G свободен от квадратов, где H – произвольная субнормальная подгруппа G;

2) индекс $|H^G\colon H|$ свободен от квадратов, где H – произвольная субнормальная подгруппа G.

Доказательство.

1. Пусть M – максимальная подгруппа в N. Тогда $|N\colon M| = p$. Т. к. M_G – наибольшая нормальная подгруппа в G, содержащаяся в M, то $M_G = 1$ и $M \cong M/M_G$. Т. к. M субнормальна, то по условию M циклическая и $|M| \le p$, т. к. M – элементарная абелева подгруппа. Поэтому $|N| \le p^2$.

2. Пусть K – подгруппа простого порядка в N. Т. к. N нормальная примарная группа, то K субнормальна в G и p^2 не делит $|K^G : K|$. Поскольку N – минимальная нормальная подгруппа, то $N = K^G$ и $|K^G : K| = p$. Поэтому $|N| \leq p^2$. Лемма доказана.

Лемма 2 [10, леммы 1, 2].

1) Если H и K подгруппы группы G и $K \subseteq H$, то $K_G \leq K_H$.

2) Пусть N – нормальная подгруппа группы G, H – подгруппа из G и $N \subseteq H$. Тогда $N \leq H_G$ и $H_G/N = (H/N)_G$.

3) Если N – нормальная подгруппа группы G и H – подгруппа из G, то

$$H_G N \leq (HN)_G.$$

4) Пусть N – нормальная подгруппа группы G, H – подгруппа из G. Тогда

$$H^G N/N = (H/N)^G.$$

Обозначим, в зависимости от ситуации, через F класс всех групп, у которых порядки кофакторов H/H_G свободны от квадратов, где H – произвольные субнормальные подгруппы из G, либо класс всех групп, у которых индексы $|H^G : H|$ свободны от квадратов, где H – произвольные субнормальные подгруппы из G.

Лемма 3. *Класс F – гомоморф.*

Доказательство. Кофактор подгруппы H в группе G обозначим $\mathrm{Cof}_G(H)$.

Пусть $\overline{H} = H/N$ – произвольная субнормальная подгруппа группы $\overline{G} = G/N$. Тогда $N \leq H \leq G$ и по лемме 2 (2)

$$\mathrm{Cof}_{\overline{G}}(\overline{H}) \simeq (H/N)/(H_G/N) \simeq H/H_G \simeq \mathrm{Cof}_G(H).$$

По лемме 2 (4) получаем

$$|(H/N)^G : H/N| = |H^G/N : H/N| = |H^G : H|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4 [8, лемма 4]. *Пусть G – π-разрешимая группа и t – натуральное число. Предположим, что $l_\pi^a(G/N) \leq t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, но $l_\pi^a(G) > t$. Тогда:*

1) $O_{\pi'}(G) = 1$;

2) *в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа;*

3) $F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$ *для некоторого простого $p \in \pi$;*

4) $O_{p'}(G) = 1$ *и* $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.

Лемма 5 [11, теорема 3.1]. *Пусть G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой порядка p^n. Тогда*

1) если $p \notin \{2,3\}$, то $l_p^a(G) \leq \frac{n+1}{2}$;

2) если $p \in \{2,3\}$, то $l_p^a(G) \leq 1 + \frac{n}{2}$.

Лемма 6 [8, теорема 2]. *Пусть G – π-разрешимая группа, G_π – ее π-холлова подгруппа. Если G_π абелева, то $l_\pi^a(G) \leq 1$.*

Для p-разрешимой группы G Холл и Хигмен ([1, теорема VI.6.6]) доказали, что $l_p(G) \leq r_p(G)$, где $r_p(G)$ – главный p-ранг группы G. Этот результат уточняет

Лемма 7 [12, теорема 2]. *Пусть G – p-разрешимая группа. Если $l_p(G) = r_p(G)$, то либо $r_p(G) = 1$ либо $r_p(G) = 2$ и $p \in \{2,3\}$. В частности, если $r_p(G) \geq 3$, то $l_p(G) \leq r_p(G) - 1$.*

Лемма 8. *Пусть G – p-разрешимая группа и силовская p-подгруппа P имеет порядок p^3. Тогда $l_p(G) \leq 1$ при $p > 3$.*

Доказательство. Т. к. $|P| = p^3$, то $r_p(G) \le 3$. Если $r_p(G) = 3$, то силовская подгруппа P абелева и $l_p(G) \le 1$. Если $r_p(G) = 2$, то $l_p(G) \le r_p(G) = 2$. Если $l_p(G) = 2$, то по лемме 7 $p \in \{2,3\}$. Поэтому $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$.

Если $r_p(G) = 1$, то $l_p(G) \le r_p(G) = 1$. Лемма доказана.

Лемма 9 [11] П*усть* G *–* π*-разрешимая группа и* $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$*. Тогда*

$$l_\pi^a(G) \le l_{\pi_1}^a(G) + l_{\pi_2}^a(G).$$

Доказательство теоремы

Пусть $2 \not\in \pi$. Предположим, что G – группа наименьшего порядка, удовлетворяющая условию, для которой оценки из заключения теоремы не выполняются. По лемме 3 каждая фактор-группа G/N наследует условия теоремы.

Предположим, что $\Phi(G) \ne 1$. Тогда, если $2 \not\in \pi$, то

$$l_\pi^a(G/\Phi(G)) = l_\pi^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G)) \le 2$$

и, если $2 \in \pi$, то

$$l_\pi^a(G/\Phi(G)) = l_\pi^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G)) \le 4.$$

Поэтому в дальнейшем считаем, что $\Phi(G) = 1$ и по лемме 4 в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа N,

$$N = F(G) = O_p(G) \text{ и } C_G(F(G)) = F(G).$$

Тогда по лемме 1 $|N| \le p^2$.

Если $|N| = p$, то фактор-группа G/N изоморфна подгруппе циклической группы порядка $p - 1$. Поэтому холлова π-подгруппа G_π/N группы G/N является циклической, где G_π – холлова π-подгруппа группы G. Тогда по лемме 6 $l_\pi^a(G/N) \le 1$. Т. к. подгруппа N абелева, то $l_\pi^a(G) \le 2$.

Если $|N| = p^2$, то фактор-группа G/N изоморфна подгруппе группы $GL(2,p)$, силовская p-подгруппа которой имеет порядок p. Поэтому силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p^3. Очевидно, что $l_p(G) > 1$. Из леммы 8 следует, что $p = 3$, т. к. $2 \not\in \pi$. Поэтому G/N изоморфна подгруппе группы $GL(2,3)$ и $|GL(2,3)| = 2^4 \cdot 3$. Значит, $\pi = \{3\}$, т. к. $2 \not\in \pi$, и силовская 3-подгруппа имеет порядок 3^3. По лемме 5 $l_\pi^a(G) = l_3^a(G) \le 2$.

Пусть $\pi_1 = \pi \setminus \{2\}$. По лемме 9 получим, что

$$l_\pi^a(G/\Phi(G)) \le l_{\pi_1}^a(G/\Phi(G)) + l_2^a(G/\Phi(G)) \le 2 + 2 = 4.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.

2. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Гомель : УО ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 322 с.

3. Gaschütz, W. Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist / W. Gaschütz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.

4. McCaughan, D. J. Finite soluble groups whose subnormal subgroups have defect at most two / D. J. McCaughan, S. E. Stonehewer // Arth. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 56–60.

5. Guo, W. On indices of subnormal subgroups of finite soluble groups / W. Guo, B. Hu, V. S. Monakhov // Commun. Algebra. – 2004. – Vol. 33, № 3. – P. 855–863.

6. Monakhov, V. S. On cofactors of subnormal subgroups / V. S. Monakhov, I. L. Sokhor // Journal of Algebra and Its Applications. – 2016. – Vol. 15, № 9. – P. 650169-1–1650169-9.

7. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – Р. 573–581.

8. Грицук, Д. В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.

9. Monakhov, V. S. On derived π-length of a finifte π-solvable group with supersolvable π-Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, 2. – P. 233–241.

10. Евтухова, С. М. Конечные группы с порядками кофакторов подгрупп, свободными от квадратов / С. М. Евтухова, В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 2. – С. 26–29.

11. Грицук, Д. В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.

12. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.03.2019

Gritsuk D. V., Trofimuk A. A. **The Structure of a π-Soluble Group in which the Indices of Normal Closure or Cofactors of Subgroups of the Factors are Limited**

The structure of π-soluble groups with limited the indices of normal closures or cofactors of subgroups of the factors was investigated. It is established that if the orders of cofactors of subnormal subgroups or their indices in normal closures are square-free, then the derived π-length of the factor group $G/\Phi(G)$ does not exceed 2, if $2 \notin \pi$ and the derivative π is the length of the factor group $G/\Phi(G)$ does not exceed 4 if $2 \in \pi$.