УДК 519.6 + 517.983.54

О. В. Матысик

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: matysikoleg@mail.ru

ОСТАНОВ ПО МАЛОСТИ НЕВЯЗКИ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений первого рода с положительным ограниченным и самосопряженным оператором предлагается неявный итерационный процесс. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получена оценка погрешности метода и оценка для момента останова.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Для решения уравнения (1) предлагается неявный итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n + \alpha A\left(y - Ax_{n+1}\right), \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части y_δ, $\|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A\left(y_\delta - Ax_{n+1,\delta}\right), \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т. е. $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_n \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

Для метода (3) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т. е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешности [1]. Эта оценка погрешности оптимизирована и найден априорный момент останова. В случае когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, т. к. тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [2–5].

2. Правило останова по невязке. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\left\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\right\|>\varepsilon,\ (n<m),\ \left\|Ax_{m,\delta}-y_\delta\right\|\le\varepsilon,\ \varepsilon=b\delta,\ b>1. \tag{4}$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\left\|Ax_{0,\delta}-y_\delta\right\|>\varepsilon.$ Ниже метод итерации (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to0}\left(\inf\limits_m\left\|x-x_{m,\delta}\right\|\right)=0$. Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda)=\lambda^{-1}\left[1-\dfrac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}\right]\ge0$.

Используя результаты [1], нетрудно показать, что при $\alpha>0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right|\le2\sqrt{n\alpha},\ n>0, \tag{5}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le1,\ n>0, \tag{6}$$

$$1-\lambda g_n(\lambda)\to0,\ \ n\to\infty,\ \ \forall\lambda\in(0,M], \tag{7}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le\left(\frac{s}{4n\alpha}\right)^{s/2},\ n>0,\ \ 0\le s<\infty. \tag{8}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $A=A^*\ge0,$ $\left\|A\right\|\le M$. *Тогда для любого* $\omega\in H$ $\left(E-Ag_n(A)\right)\omega\to0, n\to\infty$.

Доказательство

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A=\int\limits_0^M\lambda dE_\lambda$, где $M=\left\|A\right\|$ и E_λ – спектральная функция оператора *A*, получим

$$\left(E-Ag_n(A)\right)\omega=\int_0^M\left(1-\lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega=\int_0^{\varepsilon_0}\left(1-\lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega+\int_{\varepsilon_0}^M\left(1-\lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega.$$

Т. к. $1-\lambda g_n(\lambda)=\dfrac{1}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}$ и при $\alpha>0$ $\dfrac{1}{1+\alpha\lambda^2}\le q(\varepsilon_0)<1$ для всех $\lambda\in\left(0,M\right]$,

то

$$\left\|\int_{\varepsilon_0}^M\left(1-\lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega\right\|\le q^n\left(\varepsilon_0\right)\left\|\int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda\omega\right\|\le q^n\left(\varepsilon_0\right)\left\|\omega\right\|\to0,\ n\to\infty.$$

Из (6) имеем $\left\|\int_0^{\varepsilon_0}\left(1-\lambda g_n(\lambda)\right)dE_\lambda\omega\right\|\le\left\|\int_0^{\varepsilon_0}dE_\lambda\omega\right\|=\left\|E_{\varepsilon_0}\omega\right\|\to 0,\varepsilon_0\to 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $\left(E-Ag_n(A)\right)\omega\to 0, n\to\infty$. Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Тогда для* $\forall\upsilon\in\overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{s/2}\left\|A^s\left(E-Ag_n(A)\right)\upsilon\right\|\to 0$ *при* $n\to\infty,\ 0\le s<\infty$.

Доказательство

Т. к. верно (8), то $n^{s/2}\left\|A^s\left(E-Ag_n(A)\right)\right\|\le n^{s/2}\sup\limits_{0\le\lambda\le M}\lambda^s\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right|\le n^{s/2}\gamma_s n^{-s/2}=\gamma_s$, где $\gamma_s=\left(\dfrac{s}{4\alpha}\right)^{s/2}$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [5, с. 151], по которой сходимость $B_n u\to Bu$ при $n\to\infty$ для всех $u\in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n=1,2,\ldots,$ ограничены независящей от n постоянной.

Возьмем в качестве плотного в $\overline{R(A)}=H$ множество $R(A)$. Положим $s_1=s+1$. Тогда для каждого $\nu=A\omega\in R(A)$ имеем

$$n^{s/2}\left\|A^s(E-Ag_n(A))\nu\right\|=n^{s/2}\left\|A^{s+1}(E-Ag_n(A))\omega\right\|\le n^{s/2}\left(\frac{s+1}{4\alpha}\right)^{\frac{s+1}{2}}n^{-\frac{s+1}{2}}\|\omega\|=\gamma_{s_1}n^{-\frac{1}{2}}\|\omega\|\to 0,$$

при $n\to\infty$, т. к. $s_1<\infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. *Пусть* $A=A^*\ge 0,\ \|A\|\le M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p<\bar{n}=const$ *и* $\upsilon_0\in\overline{R(A)}$ *при* $p\to\infty$ *имеем* $\omega_p=A\left(E-Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0\to 0$, *то* $\upsilon_p=\left(E-Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0\to 0.$

Доказательство

В силу (6) последовательность υ_p ограничена $\left\|\upsilon_p\right\|\le\gamma_0\left\|\upsilon_0\right\|, \gamma_0=1, p\in N$.

Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\upsilon_p-\to\upsilon,\ (p\in N'\subseteq N)$, тогда $A\upsilon_\rho-\to A\upsilon,$ $(p\in N')$. Но по условию $\omega_p=A\upsilon_p\to 0,\ \ p\to\infty,$ следовательно, $A\upsilon=0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $\upsilon=0$. Тогда

$$\left\|\upsilon_p\right\|^2=\left(\upsilon_p,(E-Ag_{n_p}(A))\upsilon_0\right)=(\upsilon_p,\upsilon_0)-(\upsilon_p,Ag_{n_p}(A)\upsilon_0)=$$
$$=(\upsilon_p,\upsilon_0)-\left(A\upsilon_p,g_{n_p}(A)\upsilon_0\right)=(\upsilon_p,\upsilon_0)-\left(\omega_p,g_n(A)\upsilon_0\right)\to(\upsilon\ ,\upsilon_0),$$

т. к. $\omega_p\to 0,\ \ p\to\infty,\ \ \upsilon=0$ и по условию (5) $\left\|g_{n_p}(A)\right\|\le 2\left(n_p\alpha\right)^{1/2}\le 2\left(\bar{n}\alpha\right)^{1/2}$. Следовательно, $\left\|\upsilon_p\right\|\to 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности υ_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $\upsilon_p \to 0,\ p \to \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \geq 0,\ \|A\| \leq M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство

По индукции легко доказать, что $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E + \alpha A^2\right)^{-n}\right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - \left(E - Ag_n(A)\right)x. \tag{9}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A\left[E - Ag_n(A)\right]x - \left[E - Ag_n(A)\right](y_\delta - y). \tag{10}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\left\|\left(E - Ag_n(A)\right)x\right\| \to 0,\ n \to \infty, \tag{11}$$

$$\sigma_n = n^{1/2}\left\|A\left(E - Ag_n(A)\right)x\right\| \to 0,\ n \to \infty. \tag{12}$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\left\|g_n(A)(y_\delta - y)\right\| \leq 2(n\alpha)^{1/2}\delta, \tag{13}$$

$$\left\|E - Ag_n(A)\right\| \leq 1. \tag{14}$$

Применим правило останова (4). Тогда $\left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \leq b\delta,\ b > 1$ и из (10) и (14) получим

$$\left\|A\left(E - Ag_m(A)\right)x\right\| \leq \left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| + \left\|\left(E - Ag_m(A)\right)(y_\delta - y)\right\| \leq (b+1)\delta. \tag{15}$$

Для любого $n < m$ $\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon,$ поэтому

$$\left\|A(E - Ag_n(A))x\right\| \geq \left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| - \left\|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\right\| \geq (b-1)\delta.$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\left\|A(E - Ag_n(A))x\right\| \geq (b-1)\delta. \tag{16}$$

Из (12) и (16) при $n = m-1$ получим $\dfrac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/2}} = \left\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\right\| \geq (b-1)\delta$ или $(m-1)^{1/2}\delta \leq \dfrac{\sigma_{m-1}}{(b-1)} \to 0,\ \delta \to 0$ (т. к. из (12) $\sigma_m \to 0, m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$ то, используя (9), получим

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \leq \left\|(E - Ag_m(A))x\right\| + \left\|g_m(A)(y_\delta - y)\right\| \leq$$
$$\leq \left\|(E - Ag_m(A))x\right\| + 2(m\alpha)^{1/2}\delta \to 0,\ m \to \infty,\ \delta \to 0,$$

т. к. из (11) $\left\|(E - Ag_m(A))x\right\| \to 0, m \to \infty$.

Если же для некоторых $\delta_n \to 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \delta_n \to 0$.

Действительно, из (15) имеем $\left\| A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \right\| \le (b+1)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0.$

Отсюда по лемме 3 получаем, что $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \to 0, \delta_n \to 0.$ Поэтому

$$\left\| x_{m(\delta_n),\delta_n} - x \right\| \le \left\| (E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \right\| + 2(m(\delta_n)\alpha)^{1/2}\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Оценка погрешности. Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x = A^s z$, $s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m \le 1 + \dfrac{s+1}{4\alpha}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{2/(s+1)}$,

$$\left\| x_{m,\delta} - x \right\| \le [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + 2\alpha^{1/2}\left\{1 + \frac{s+1}{4\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{2/(s+1)}\right\}^{1/2}\delta. \qquad (17)$$

Доказательство

Т. к. $x = A^s z$, $s > 0$, то

$$\left\| A(E - Ag_{m-1}(A))x \right\| = \left\| A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z \right\| =$$

$$= \left\| \int_0^M \lambda^{s+1}\left(1 + \alpha\lambda^2\right)^{-m+1} dE_\lambda z \right\| \le (s+1)^{(s+1)/2}[4\alpha(m-1)]^{-(s+1)/2}\|z\|.$$

Воспользовавшись (16), получим $(b-1)\delta \le (s+1)^{\frac{s+1}{2}}[4(m-1)\alpha]^{-\frac{s+1}{2}}\|z\|$, отсюда

$m \le 1 + \dfrac{s+1}{4\alpha}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\left\| (E - Ag_m(A))x \right\| \le \left\| A^{s+1}(E - Ag_m(A))z \right\|^{s/(s+1)} \left\| (E - Ag_m(A))z \right\|^{1/(s+1)} \le$$

$$\le \left\| A\left(E - Ag_m(A)\right)x \right\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \le \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \text{ (см. (15)).}$$

Т.к. соотношение (9) справедливо для любых n, то

$$\left\| x_{m,\delta} - x \right\| \le \left\| (E - Ag_m(A))x \right\| + \left\| g_m(A)(y_\delta - y) \right\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} +$$

$$+ 2\alpha^{1/2}\left\{1 + \frac{s+1}{4\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}\right\}^{1/2}\delta.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *Порядок оценки* (17) *есть* $O(\delta^{s/(s+1)})$ *и, как следует из* [3], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы 2 предположение порядка* $s > 0$ *истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, т. к. оно не содержится в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций т, обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже если истоко-представимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т. е. его регуляризующие свойства.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в неявном итерационном методе решения линейных некорректных уравнений / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2019. – № 1. – С. 72–78.
2. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
5. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 20.03.2020

Matysik O. V. **Stopping by the Smallness of the Mismissibility in the Method of Iterations of an Implicite Type for the Solution of Linear Operator Equations of the First Kind**

In the Hilbert space for solving linear operator equations the first kind with affirmative limited and self-conjugate operator the implicit iteration process is proposed. The application of a rule residual stop for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. In work the convergence of the iteration method is proved, the estimation of an error of the method and estimation the moment of stop are received.