УДК 513.82

А.А. Юдов[1], Е.А. Сирисько[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

[2]магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОРОДНЫХ РЕДУКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ШЕСТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА R_6

Целью исследования является нахождение инвариантных подпространств, прямых и плоскостей для подгрупп Ли группы Ли H вращений шестимерного евклидова пространства R_6, классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли G движений пространства R_6 и исследование свойств подгрупп Ли группы Ли G.

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П.К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности, с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений шестимерного евклидова пространства R_6.

Инвариантные подпространства подгрупп Ли

Рассмотрим пространство R_6 – шестимерное евклидово пространство R_6.

Выберем в пространстве R_6 репер $\varepsilon = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$, причем $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = e_6^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$.

Произвольную точку M пространства R_6, в репере ε зададим координатами $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, которые будем записывать в виде $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \equiv (X)_\varepsilon$.

На множестве реперов пространства R_6 действует группа Ли G движений, которая при заданном репере ε изоморфна группе матриц вида:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & & & & & & \\ t_2 & & & & & & \\ t_3 & & & & & & \\ t_4 & & & A & & & \\ t_5 & & & & & & \\ t_6 & & & & & & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix} \quad (1)$$

Причем $A^T E_6 A = E_6$, где знак ^{T} означает транспонирование, а матрица E_6 является единичной матрицей.

При движении, заданном матрицей (1), репер ε переходит в репер $\varepsilon' = (0, e_1', e_2', e_3', e_4', e_5', e_6') = (0', e')$, где $e' = eA$, $0'(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (T)_\varepsilon$, а точка M переходит в точку M', имеющую в репере ε' такие же координаты, какие точка M имеет в репере ε.

Пусть $M'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (X)_{\varepsilon'}$, $M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = (X')_\varepsilon$. Тогда получим: $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) + eA(X) = e((T) + A(X))$. С другой стороны, $\overline{OM'} = e(X')$. Отсюда $(X') = (T) + A(X)$, т.е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = \overline{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T.$$

Таким образом, в пространстве R_6 действует слева группа Ли G, которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства R_6 по формуле (2). Алгебру Ли $\overline{G}$ этой группы можно отожествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & & & & & & \\ \tau_2 & & & & & & \\ \tau_3 & & & & & & \\ \tau_4 & & & B & & & \\ \tau_5 & & & & & & \\ \tau_6 & & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix} \right\},$$

где B удовлетворяет условию: $B^T E_6 + E_6 B = 0$.

Группа Ли H стационарности точки О и алгебра Ли $\overline{H}$ этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & A & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & B & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\}.$$

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки и абелевой группы T_6 параллельных переносов: $G = H \otimes T_6$.

Алгебра Ли $\overline{G}$ является полупрямой суммой алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H и коммутативной алгебры Ли τ_6 группы Ли T_6 : $\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_6$.

Рассмотрим группу Ли G пространства R_6 и ее алгебру Ли $\overline{G}$. Базис алгебры Ли G выбирается следующим образом:

$$\begin{aligned} &i_7 = E_{12} - E_{21}, i_8 = E_{13} - E_{31}, i_9 = E_{14} - E_{41}, i_{10} = E_{15} - E_{51}, i_{11} = E_{16} - E_{61}, \\ &i_{12} = E_{23} - E_{32}, i_{13} = E_{24} - E_{42}, i_{14} = E_{25} - E_{52}, i_{15} = E_{26} - E_{62}, i_{16} = E_{34} - E_{43}, \\ &i_{17} = E_{35} - E_{53}, i_{18} = E_{36} - E_{63}, i_{19} = E_{45} - E_{54}, i_{20} = E_{46} - E_{64}, i_{21} = E_{56} - E_{65}. \end{aligned} \tag{2}$$

где $E_{\alpha\beta}$ – матрица размера (6×6), у которой в $\alpha-$ой строке, $\beta-$м столбце стоит единица, а остальные элементы – нули, причем $i_7 \ldots i_{21}$ образуют базис алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H, векторы $i_1 \ldots i_6$ образуют базис алгебры τ_6, а операция коммутирования в алгебре Ли $\overline{G}$ задается в виде:

$$[A, B] = AB - BA, A, B \in \overline{G}$$

Проводя непосредственные вычисления, получаем следующие формулы для коммутаторов базисных векторов: $i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}$ алгебры Ли группы Ли вращений пространства R_6.

Согласно формуле для коммутаторов получим $[i_7, i_8] = i_7 i_8 - i_8 i_7 = -i_{12}$.

Аналогично, проводя вычисления, получим:

$[i_7, i_8] = -i_{12}$,	$[i_8, i_{16}] = i_9$,	$[i_{10}, i_{14}] = -i_7$,	$[i_{12}, i_{16}] = i_{13}$,	$[i_{15}, i_{16}] = 0$,
$[i_7, i_9] = -i_{13}$,	$[i_8, i_{17}] = i_{10}$,	$[i_{10}, i_{15}] = 0$,	$[i_{12}, i_{17}] = i_{14}$,	$[i_{15}, i_{17}] = 0$,
$[i_7, i_{10}] = -i_{14}$,	$[i_8, i_{18}] = i_{11}$,	$[i_{10}, i_{16}] = 0$,	$[i_{12}, i_{18}] = i_{15}$,	$[i_{15}, i_{18}] = -i_{12}$,
$[i_7, i_{11}] = -i_{15}$,	$[i_8, i_{19}] = 0$,	$[i_{10}, i_{17}] = -i_8$,	$[i_{12}, i_{19}] = 0$,	$[i_{15}, i_{19}] = 0$,
$[i_7, i_{12}] = i_8$,	$[i_8, i_{20}] = 0$,	$[i_{10}, i_{18}] = 0$,	$[i_{12}, i_{20}] = 0$,	$[i_{15}, i_{20}] = -i_{13}$,
$[i_7, i_{13}] = i_9$,	$[i_8, i_{21}] = 0$,	$[i_{10}, i_{19}] = -i_9$,	$[i_{12}, i_{21}] = 0$,	$[i_{15}, i_{21}] = -i_{14}$,
$[i_7, i_{14}] = i_{10}$,	$[i_9, i_{10}] = -i_{19}$,	$[i_{10}, i_{20}] = 0$,	$[i_{13}, i_{14}] = -i_{19}$,	$[i_{16}, i_{17}] = -i_{19}$,
$[i_7, i_{15}] = i_{11}$,	$[i_9, i_{11}] = -i_{20}$,	$[i_{10}, i_{21}] = i_{11}$,	$[i_{13}, i_{15}] = -i_{20}$,	$[i_{16}, i_{18}] = -i_{20}$,
$[i_7, i_{16}] = 0$.	$[i_9, i_{12}] = 0$,	$[i_{11}, i_{12}] = 0$,	$[i_{13}, i_{16}] = -i_{12}$,	$[i_{16}, i_{19}] = i_{17}$,
$[i_7, i_{17}] = 0$,	$[i_9, i_{13}] = -i_7$,	$[i_{11}, i_{13}] = 0$,	$[i_{13}, i_{17}] = 0$,	$[i_{16}, i_{20}] = i_{18}$,
$[i_7, i_{18}] = 0$,	$[i_9, i_{14}] = 0$,	$[i_{11}, i_{14}] = 0$,	$[i_{13}, i_{18}] = 0$,	$[i_{16}, i_{21}] = 0$,
$[i_7, i_{19}] = 0$,	$[i_9, i_{15}] = 0$,	$[i_{11}, i_{15}] = -i_7$,	$[i_{13}, i_{19}] = i_{14}$,	$[i_{17}, i_{18}] = -i_{21}$,
$[i_7, i_{20}] = 0$,	$[i_9, i_{16}] = -i_8$,	$[i_{11}, i_{16}] = 0$,	$[i_{13}, i_{20}] = i_{15}$,	$[i_{17}, i_{19}] = -i_{16}$,
$[i_7, i_{21}] = 0$,	$[i_9, i_{17}] = 0$,	$[i_{11}, i_{17}] = 0$,	$[i_{13}, i_{21}] = 0$,	$[i_{17}, i_{20}] = 0$,
$[i_8, i_9] = -i_{16}$,	$[i_9, i_{18}] = 0$,	$[i_{11}, i_{18}] = -i_8$,	$[i_{14}, i_{15}] = -i_{21}$,	$[i_{17}, i_{21}] = i_{18}$,
$[i_8, i_{10}] = -i_{17}$,	$[i_9, i_{19}] = i_{10}$,	$[i_{11}, i_{19}] = 0$,	$[i_{14}, i_{16}] = 0$,	$[i_{18}, i_{19}] = 0$,

$[i_8, i_{11}] = -i_{18}$, $[i_9, i_{20}] = i_{11}$, $[i_{11}, i_{20}] = -i_9$, $[i_{14}, i_{17}] = -i_{12}$, $[i_{18}, i_{20}] = -i_{12}$,
$[i_8, i_{12}] = -i_7$, $[i_9, i_{21}] = 0$, $[i_{11}, i_{21}] = -i_{10}$, $[i_{14}, i_{18}] = 0$, $[i_{18}, i_{21}] = -i_{17}$,
$[i_8, i_{13}] = 0$, $[i_{10}, i_{11}] = -i_{21}$, $[i_{12}, i_{13}] = -i_{16}$, $[i_{14}, i_{19}] = -i_{13}$, $[i_{19}, i_{20}] = -i_{21}$,
$[i_8, i_{14}] = 0$, $[i_{10}, i_{12}] = 0$, $[i_{12}, i_{14}] = -i_{17}$, $[i_{14}, i_{20}] = 0$, $[i_{19}, i_{21}] = i_{20}$,
$[i_8, i_{15}] = 0$, $[i_{10}, i_{13}] = 0$, $[i_{12}, i_{15}] = -i_{18}$, $[i_{14}, i_{21}] = i_{15}$, $[i_{20}, i_{21}] = -i_{19}$,

Всего получено 20 подгрупп Ли $G_1 \ldots G_{20}$ группы Ли вращений, которые в базисе (1) задаются своими алгебрами Ли $\overline{G_1} \ldots \overline{G_{20}}$ в виде:

$$\overline{G_1} = \{i_7\},$$
$$\overline{G_2} = \{i_{16} + \mu i_7\},$$
$$\overline{G_3} = \{i_{16} + \mu i_7 + \nu i_{21}\}$$
$$\overline{G_4} = \{\mathrm{i}_7, i_{16}\},$$
$$\overline{G_5} = \{i_{16} + \mu i_7, \mathrm{i}_{21}\},$$
$$\overline{G_6} = \{i_7, i_8, i_{12}\},$$
$$\overline{G_7} = \{i_7 + i_{16}, i_8 - i_{13}, i_9 + i_{12}\},$$
$$\overline{G_8} = \{i_7 + 2i_{16}, \sqrt{3}i_{14} + i_8 + i_{13}, \sqrt{3}i_{10} - i_9 + i_{12}\},$$
$$\overline{G_9} = \{i_7, i_{16}, \mathrm{i}_{21}\},$$
$$\overline{G_{10}} = \{i_7, i_8, i_{21}, i_{19}\},$$
$$\overline{G_{11}} = \{i_7 + i_{16}, i_8 - i_{13}, i_9 + i_{12}, i_{21}\},$$
$$\overline{G_{12}} = \{i_7, i_{16}, i_8 - i_{13}, i_9 + i_{12}, i_{21}\},$$
$$\overline{G_{13}} = \{i_7, i_8, i_{12}, i_9 + i_{10}, i_{13} + i_{14}, i_{16} + i_{17}\},$$
$$\overline{G_{14}} = \{i_7, i_{16}, i_8, i_{13}, \mathrm{i}_9, i_{12}\},$$
$$\overline{G_{15}} = \{i_7, i_8, i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\},$$
$$\overline{G_{16}} = \{i_7, i_8, i_{12}, i_{11}, i_{15}, i_{18}\},$$
$$\overline{G_{17}} = \{i_7, i_{16}, i_8, i_{13}, \mathrm{i}_9, i_{12}, i_{21}\},$$
$$\overline{G_{18}} = \{i_7, i_8, \mathrm{i}_{12}, i_9 + i_{10}, i_{13} + i_{14}, i_{16} + i_{17}, i_{19}\},$$
$$\overline{G_{19}} = \{i_7, i_8, i_{12}, \mathrm{i}_9, \mathrm{i}_{10}, i_{13}, \mathrm{i}_{14}, \mathrm{i}_{16}, i_{17}, i_{19}\},$$
$$\overline{G_{20}} = \{i_7, i_8, \mathrm{i}_9, i_{12}, i_{13}, \mathrm{i}_{16}, \mathrm{i}_{10} + \mathrm{i}_{11}, \mathrm{i}_{14} + \mathrm{i}_{15}, i_{17} + i_{18}, i_{10} + i_{20}\}.$$

Рассматривается однопараметрическая подгруппа Ли G группы Ли вращений шестимерного евклидова пространства R_6 , соответствующая алгебре Ли с оператором

$$i_{16}+\mu i_7=\begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ставится задача найти все инвариантные относительно G одномерные, двумерные, трехмерные, четырехмерные и пятимерные векторные подпространства пространства R_6 , а так же инвариантные прямые и K-плоскости.

Рассмотрим оператор $i_{16}+\mu i_7$.

Найдем одномерные подпространства пространства R_6 , инвариантные относительно этого оператора. Условие инвариантности подпространства с направляющим вектором $\alpha(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6.)$ имеет вид:

$$\alpha i_7=\lambda\alpha\,, \quad (4)$$

или в координатном виде:

$$-\alpha_2=\lambda\alpha_1,\alpha_1=\lambda\alpha_2,0=\lambda\alpha_3,0=\lambda\alpha_4,0=\lambda\alpha_5,0=\lambda\alpha_6 \quad (5)$$

Из системы (5) получим: $-\alpha_2=\lambda^2\alpha_2$. Отсюда $\alpha_2=0,\alpha_1=0$. При $\lambda\neq 0$ ненулевых решений нет. При $\lambda=0$ получим инвариантные подпространства в виде:

$$\{\alpha_3e_3+\alpha_4e_4+\alpha_5e_5+\alpha_6\,\mathrm{e}_6\},\forall\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6.$$

Найдем двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора. Условие инвариантности подпространства с базисом $\{\alpha,b\},\alpha(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6.)$, $(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,\mathrm{b}_6.)$ имеет вид:

$$\alpha i_7=\lambda\alpha+\mu b, bi_7=\nu\alpha+\delta b\,, \quad (6)$$

или в координатном виде:

$$\begin{aligned} -\alpha_2&=\lambda\alpha_1+\mu b_1 & -b_2&=\nu\alpha_1+\delta b_1,\\ -\alpha_1&=\lambda\alpha_2+\mu b_2 & -b_1&=\nu\alpha_2+\delta b_2,\\ 0&=\lambda\alpha_3+\mu b_3 & 0&=\nu\alpha_3+\delta b_3,\\ 0&=\lambda\alpha_4+\mu b_4 & 0&=\nu\alpha_4+\delta b_4,\\ 0&=\lambda\alpha_5+\mu b_5 & 0&=\nu\alpha_5+\delta b_5.\\ 0&=\lambda\alpha_6+\mu b_6 & 0&=\nu\alpha_6+\delta b_6. \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью замены базиса получаем, что решение системы можно свести к рассмотрению 15 частных случаев $1^\circ-15^\circ$:

$1^\circ.\alpha(1,0,a_3,a_4,a_5,a_6),b(0,1,b_3,b_4,b_5,b_6).$

В этом случае система (7) имеет вид:

$$\begin{cases} 0=\lambda, 1=\mu, 0=\lambda a_3+\mu b_3, 0=\lambda a_4+\mu b_4, 0=\lambda a_5+\mu b_5, 0=\lambda a_6+\mu b_6, \\ -1=\nu, 0=\sigma, 0=\nu a_3+\delta b_3, 0=\nu a_4+\delta b_4, 0=\nu a_5+\delta b_5, 0=\nu a_6+\delta b_6. \end{cases} \tag{8}$$

Отсюда следует: $a_3=0, a_4=0, a_5=0, a_6=0, b_3=0, b_4=0, b_5=0, b_6=0.$ Получаем инвариантное подпространство в виде: $\forall\mu=\{e_1,e_2\}$. $\{e_1+a_3e_3+a_4e_4, e_2+\mathrm{b}_3\mathrm{e}_3+\mathrm{b}_4\mathrm{e}_4\}$.

$2^\circ.\alpha(1,a_2,0,a_4,a_5,a_6), b(0,0,1,b_4,b_5,b_6).$

$3^\circ.\alpha(1,a_2,a_3,0,a_5,a_6), b(0,0,0,1,b_5,b_6).$

$4^\circ.\alpha(1,a_2,a_3,a_4,0,a_6), b(0,0,0,0,1,b_6).$

$5^\circ.\alpha(1,a_2,a_3,a_4,a_5,0), b(0,0,0,0,0,1).$

$6^\circ.\alpha(0,1,0,a_4,a_5,a_6), b(0,0,1,b_4,b_5,b_6).$

$7^\circ.\alpha(0,1,a_3,0,a_5,a_6), b(0,0,0,1,b_5,b_6).$

$8^\circ.\alpha(0,1,a_3,a_4,0,a_6), b(0,0,0,0,1,b_6).$

$9^\circ.\alpha(0,1,a_3,a_4,a_5,0), b(0,0,0,0,0,1).$

В случае $2^0-9^0, 11^0-15^0$ из системы (7) получим: 0 = −1. Отсюда следует противоречие: $1=-a_2^2$. Система инвариантности противоречива.

$10^\circ.\alpha(0,0,1,0,a_5,a_6), b(0,0,0,1,b_5,b_6).$

Система инвариантности (7) не противоречива. Получаем инвариантное подпространство: $\{e_3,\mathrm{e}_4\}$.

Результаты исследования инвариантных подпространств относительно оператора $i_{16}+\mu i_7$ сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Относительно группы $\overline{G_1}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_6: $\{\mathrm{a}_3e_3+a_4e_4+a_5e_5+\mathrm{a}_6\mathrm{e}_6\}, \forall a_3,a_4,a_5,a_6$. и только следующие двумерные подпространства:

$$\{e_1,e_2\},\{e_3+a_5e_5+a_6e_6,\mathrm{e}_4+\mathrm{b}_5\mathrm{e}_5+\mathrm{b}_6\mathrm{e}_6\},\{e_3+a_4e_4+a_6e_6,\mathrm{e}_5+\mathrm{b}_6\mathrm{e}_6\},$$
$$\{e_3+a_4e_4+a_5e_5,e_6\},\{e_4+a_6e_6,\mathrm{e}_5+\mathrm{b}_6\mathrm{e}_6\},\{e_4+a_5e_5,e_6\},\{e_5,e_6\}$$

И следующие трехмерные пространства:

$$\{e_1,e_2,e_3+c_4e_4+c_5e_5+c_6e_6\},\{e_1,e_2,e_4+c_5e_5+c_6e_6\},\{e_1e_2e_3+c_6e_6\},\{e_1,e_2,e_6\}.$$

Рассматривая аналогично инвариантные подпространства для группы $i_6+\lambda i_{13}, \lambda\neq 0$, получаем теорему:

Теорема 2. Относительно группы $\overline{G_2}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_6 : $\{a_5e_5+a_6e_6\}$, двумерные подпространства:

$$\{e_1+a_5e_5+a_6e_6,e_2+b_5\,\mathrm{e}_5+b_6\,\mathrm{e}_6\},\{e_1+a_2e_2+a_6e_6,\mathrm{e}_5+b_6e_6\},\{e_1+a_2e_2+a_5e_5,\mathrm{e}_6\},$$
$$\{e_2+a_6e_6,e_4+b_5e_5+b_6e_6\},\{e_2+a_3e_3+a_4e_4+a_5e_5,e_6\},\{e_5,e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$\{e_1, e_2, e_3 + c_6\,\mathrm{e}_6\}, \{e_1 + a_3e_3 + a_4e_4, \mathrm{e}_2 \mp a_4e_3 \pm a_3e_4, e_5 + c_6e_6\}, \{e_1 + a_5e_5, e_2 + b_5e_5, e_6\},$
$\{e_1 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5, e_2 \mp a_4e_3 \pm a_3e_4 + b_5e_5, e_6\}, \{e_1 + a_2e_2 + a_5e_5 + a_6e_6, e_3, e_4\},$
$\{e_1 + a_2e_2, e_5, e_6\}, \{e_2 + a_5e_5 + a_6e_6, e_3, e_4\}, \{e_2, e_5, e_6\}, \{e_3, e_4, e_5 + c_6e_6\}, \{e_3, e_4, e_6\}.$

Теорема 3. Относительно группы $\overline{G_3}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_6 :

$$\{a_5e_5 + a_6e_6\}, \{a_1e_1 + a_2e_2\}, \{a_1e_1 + a_2e_2 + a_5e_6 + a_6e_6\},$$

двумерные подпространства:

$$\left\{e_1 + \frac{1}{\mu}b_4e_3 \pm \frac{1}{\mu}b_6e_5 \mp \frac{1}{\mu}b_5e_6, e_2 + b_4e_4 + b_5e_5 + b_6e_6\right\}, \{e_1 - \frac{1}{\mu}b_3e_4, e_2 + b_3e_3\},$$
$$\{e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_6e_6, e_5 + b_6e_6\}, \{e_1 + \alpha_2e_2 + \alpha_5e_5, e_6\}, \{e_2 + \alpha_5e_5, e_6\}$$
$$\{e_3, e_4\}, \{e_3 + \alpha_5e_5 + \alpha_6e_6, e_4\}, \{e_5, e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$\{e_1 + e_6e_6, e_2 + b_6\,\mathrm{e}_6, e_5 + c_6e_6\}, \{e_1 + a_6e_6, \mathrm{e}_2 + b_6e_6, e_5\}, \{e_1, e_2, e_3 + c_6e_6\},$
$\{e_1 + a_5e_5, e_2 + b_5e_5, e_6\}, \{e_1, e_2, e_6,\}, \{e_1 + a_3e_3 + a_4e_4, e_2 \mp a_4e_3 \pm ae_4, e_6\}$
$\{e_1 + a_2e_2, e_3, e_4\}, \{e_1 + a_2e_2 + a_5e_5 + a_6e_6, e_3, e_4\}, \{e_1 + a_2e_2, e_5, e_6\}, \{e_1 + c_5e_5 + a_6e_6, e_3, e_4\},$
$\{e_1, e_3 + b_5e_5 + b_6e_6, e_4 \mp b_6e_5 \pm b_5e_6\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_2, e_5, e_6\}, \{e_3, e_4, e_5 + c_6e_6\}, \{e_3, e_4, e_6\}.$

Теорема 4. Относительно группы $\overline{G_4}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства $R_6 : \{a_5e_5 + a_6e_6\}$, двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}, \{e_5, e_6\}$ и следующие трехмерные подпространства: $\{e_1, e_2, e_5 + c_6e_6\}, \{e_1, e_2, e_6\}$.

Теорема 5. Относительно группы $\overline{G_5}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:

$$\{e_1, e_2\}, \{e_2, e_4\}, \{e_5, e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$$\{e_1 + a_2e_2, e_3, e_4\}, \{e_1 + a_2e_2, e_5, e_6\}, \{e_2, e_3, e_4\}, \{e_2, e_5, e_6\}.$$

Теорема 6. Относительно группы $\overline{G_6}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства:

$$\{e_4 + a_6e_6, e_5 + b_6e_6\}, \{e_4 + a_5e_5, e_6\}, \{e_5, e_6\}$$

и следующие трехмерные подпространства:

$$\{e_1, e_2, e_3\}.$$

Теорема 7. Относительно группы $\overline{G_7}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства $R_6 : \{a_5e_5 + a_6e_6\}$, двумерное подпространство: $\{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 8. Относительно группы $\overline{G_8}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства $R_6 : \{e_6\}$, двумерное, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 9. Относительно группы $\overline{G_9}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}, \{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 10. Относительно группы $\overline{G_{10}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_4, e_5\}$ и следующие трехмерное подпространство: $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Теорема 11. Относительно группы $\overline{G_{11}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 12. Относительно группы $\overline{G_{12}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 13. Относительно группы $\overline{G_{13}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_4 - e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 14. Относительно группы $\overline{G_{14}}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства $R_6 : \{a_5 e_5 + a_6 e_6\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 15. Относительно группы $\overline{G_{15}}$ нет инвариантных одномерных, двумерных подпространств, инвариантно только трехмерное пространство: $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Теорема 16. Относительно группы $\overline{G_{16}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_4, e_5\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 17. Относительно группы $\overline{G_{17}}$ нет инвариантных одномерных подпространств, инвариантны только следующие двумерные подпространства: $\{e_5, e_6\}$, и трехмерных подпространств нет.

Теорема 18. Относительно группы $\overline{G_{18}}$ нет инвариантных одномерных, двумерных, трехмерных подпространств.

Теорема 19. Относительно группы $\overline{G_{19}}$ нет инвариантных одномерных, двумерных, трехмерных подпространств.

Теорема 20. Относительно группы $\overline{G_{20}}$ нет инвариантных одномерных, двумерных, трехмерных подпространств.

Используя геометрические характеристики подгрупп Ли, мы получаем цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_6.

Цепочки:
$G_{20} \supset G_7$
$G_{20} \supset G_6 \supset G_1$
$G_{20} \supset G_4 \supset G_2$
$G_{20} \supset G_4 \supset G_1$
$G_{19} \supset G_{18} \supset G_{13} \supset G_6 \supset G_1$
$G_{19} \supset G_{14} \supset G_7$
$G_{19} \supset G_{14} \supset G_6 \supset G_1$
$G_{19} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_2$
$G_{19} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_1$
$G_{19} \supset G_{13} \supset G_6 \supset G_1$
$G_{19} \supset G_8$
$G_{19} \supset G_7$
$G_{18} \supset G_{13} \supset G_6 \supset G_1$
$G_{17} \supset G_{14} \supset G_7$
$G_{17} \supset G_{14} \supset G_6 \supset G_1$
$G_{17} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_2$
$G_{17} \supset G_{14} \supset G_4 \supset G_1$
$G_{17} \supset G_{12} \supset G_{11} \supset G_7$
$G_{17} \supset G_{12} \supset G_4 \supset G_2$
$G_{17} \supset G_{12} \supset G_4 \supset G_1$
$G_{17} \supset G_9 \supset G_4 \supset G_2$
$G_{17} \supset G_9 \supset G_4 \supset G_1$
$G_{17} \supset G_6 \supset G_1$
$G_{16} \supset G_6 \supset G_1$
$G_{15} \supset G_{10} \supset G_1$
$G_{15} \supset G_6 \supset G_1$
$G_{14} \supset G_7$
$G_{14} \supset G_4 \supset G_2$
$G_{14} \supset G_4 \supset G_1$
$G_{13} \supset G_6 \supset G_1$
$G_{12} \supset G_{11} \supset G_7$
$G_{12} \supset G_4 \supset G_2$
$G_{12} \supset G_4 \supset G_1$
$G_{11} \supset G_7$
$G_{10} \supset G_1$
$G_9 \supset G_4 \supset G_2$
$G_9 \supset G_4 \supset G_1$
$G_6 \supset G_1$
$G_5 \supset G_2$
$G_4 \supset G_2$
$G_4 \supset G_1$.

Пусть G группа Ли H_1, H_2 ее подгруппы Ли, причем $H_1 \subset H_2$.

Определение 1. Каноническим морфизмом однородного пространства G / H_1 в однородное пространство G / H_2 называется морфизм f вида:

$$\mathrm{f}: G / H_1 \to G / H_2 : aH_1 \to aH_2$$

для любого $a \in G$.

Таким образом, полученная выше классификация цепочек подгрупп Ли группы вращений пространства R_6 приводит к классификации всех канонических морфизмов однородных пространств со структурной группой *H* – группой всех вращений пространства R_6.

Определение 2. Однородное пространство H / G_1 называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}, \tag{9}$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, где $ad\overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G_i}$.

Рассмотрим однородное пространство H / G_6, $G_6 = \{i_7, i_8, i_{12}\}$, $a = \{i_7\}$, $\overline{H} = \{i_7 ... i_{21}\}$ и базис, соответствующий частному случаю 416^0:

$$416^0 \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & p & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= i_9 + \lambda i_{12} + \mu i_7, \\
x_2 &= i_{10} + \sigma i_{12} + s i_7, \\
x_3 &= i_{11} + p i_{12} + q i_7, \\
x_4 &= i_{13} + \varepsilon i_7, \\
x_5 &= i_{14} + b i_7, \\
x_6 &= i_{15} + e i_7, \\
x_7 &= i_{21}, \\
x_8 &= i_{20}, \\
x_9 &= i_{19}, \\
x_{10} &= i_{18}, \\
x_{11} &= i_{17}, \\
x_{12} &= i_{16}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned}
&[a, X_1] = -i_{13} + \lambda i_8,\\
&[a, X_2] = -i_{14} + \sigma i_8,\\
&[a, X_3] = -i_{15} + p i_8,\\
&[a, X_4] = i_9,\\
&[a, X_5] = i_{10},\\
&[a, X_6] = i_{11},\\
&[a, X_7] = 0,\\
&[a, X_8] = 0,\\
&[a, X_9] = 0,\\
&[a, X_{10}] = 0,\\
&[a, X_{11}] = 0,\\
&[a, X_{12}] = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Запишем линейную комбинацию векторов *X1,…,X12*:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(i_9 + \lambda i_{12} + \mu i_7) + \beta_1(i_{10} + \sigma i_{12} + s i_7) + \gamma_1(i_{11} + p i_{12} + q i_7) + \delta_1(i_{13} + \varepsilon i_7) + \omega_1(i_{14} + b i_7) +\\
&+\varepsilon_1(i_{15} + e i_7) + g_1 i_{21} + t_1 i_{20} + p_1 i_{19} + q_1 i_{18} + s_1 i_{17} + h_1 i_{16} =\\
&= i_7(\alpha_1\mu + \beta_1 s + \gamma_1 q + \delta_1\varepsilon + \omega_1 b + \varepsilon_1 e) + i_9\alpha_1 + i_{10}\beta_1 + i_{11}\gamma_1 + i_{12}(\alpha_1\lambda + \beta_1\sigma + \gamma_1 p) + i_{13}\delta_1 +\\
&+i_{14}\omega_1 + i_{15}\varepsilon_1 + i_{16}h_1 + i_{17}s_1 + i_{18}q_1 + i_{19}p_1 + i_{20}t_1 + i_{21}g_1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Приравнивая эту линейную комбинацию к правой части первой формулы (11) и затем аналогично соответствующие линейные комбинации к правым частям остальных формул (11) и проводя соответствующие вычисления, получим:

$$\begin{aligned}
&\delta_1 = -1,\ \lambda = 0,\ \varepsilon = 0,\\
&\omega_2 = -1,\ \sigma = 0,\ b = 0,\\
&\varepsilon_3 = -1,\ p = 0,\ e = 0\\
&\alpha_4 = 1,\ \mu = 0,\ \lambda = 0\\
&\beta_5 = 1,\ s = 0,\ \sigma = 0,\\
&\gamma_6 = 1,\ q = 0,\ p = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, относительно оператора i_7 инвариантны следующие двенадцатимерные подпространства: $\{i_9, i_{10}, i_{11}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$.

Всех случаев, которые необходимо рассмотреть для нахождения инвариантных двенадцатимерных подпространств для оператора i_7, будет 455, причем в случаях 1–415, 417–455 решения систем инвариантности не дают редуктивных дополнений. Это же подпространство $\{i_9, i_{10}, i_{11}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$, как показывают вычисления, будет инвариантно и относительно операторов i_8, i_{12}. Таким образом, получаем теорему.

Теорема 21. Однородное пространство H / G_6 является редуктивным, редуктивным дополнением для него является пространство:

$$m = \{i_9, i_{10}, i_{11}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.

2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.

3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 25.02.2019

Yudov A.A, Sirisko E.A. **Classification of Homogeneous Reductive Spaces with a Structural Group – the Lie Group of Motions of the Six-Dimensional Euclidean Space R_6**

The aim of the study is to find invariant subspaces, lines and planes for Lie subgroups of the Lie group H of rotations of six-dimensional Euclidean spaces, classify homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group G of space motions, and study the properties of Lie subgroups of the G.