УДК 517.548.5 + 519.652

***С.С. Мазурик*[1]*, Е.И. Кульгун*[2]*, А.П. Худяков*[3]**

[1]соискатель каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

[2]магистр физ.-мат. наук, преподаватель-стажер каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

[3]канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: hudand1985@mail.ru

МАТРИЧНОЕ ОБОБЩЕННОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ЭРМИТА – БИРКГОФА С ОДНИМ СПЕЦИАЛЬНЫМ УЗЛОМ ПО ОБЩЕЙ ЧЕБЫШЕВСКОЙ СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ

Для функций матричного аргумента построены обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа с одним специальным узлом по общей чебышевской системе матричных функций. В структуру многочленов входят определители матриц с матричными элементами, при вычислении которых используются процедуры некоммутативного анализа. Получены формулы, которые в общем случае не являются интерполяционными, но они точны для матричных многочленов специальной структуры. Рассмотрены частные случаи интерполирования для небольшого числа узлов и для конкретных чебышевских систем матричных функций.

Введение

При построении обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа требуется совпадение в отдельных узлах значений дифференциальных, интегральных и другого вида операторных интерполяционных многочленов и интерполируемого оператора. Для функций скалярного аргумента такого вида формулы по системам тригонометрических, рациональных и экспоненциальных функций построены и исследованы в [1; 2]. В случае общей чебышевской системы функций такая задача исследована в [3]. В [4–7] получены матричные аналоги интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа по отдельным чебышевским системам матричных функций.

В данной работе исследована задача построения матричных обобщенных интерполяционного вида многочленов Эрмита – Биркгофа по общей чебышевской системе матричных функций. При построении интерполяционных формул использовались процедуры некоммутативного анализа. Получены матричные формулы, в общем случае не являющиеся интерполяционными, но они точны для матричных многочленов специальной структуры. Отдельно рассмотрены частные случаи для конкретных чебышевских систем функций.

1. Явные формулы интерполяционных многочленов

Пусть $C^{n+1}(T)$ – пространство непрерывно дифференцируемых $n+1$ раз на отрезке $T \subseteq \mathbb{R}$ функций. В работе [3] по чебышевской системе $\varphi_k(x) \in C^{n+1}(T)$ $(k = 0,1,\ldots,n+1)$, $x \in T$, для функции одного скалярного аргумента получен и исследован обобщенный интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа вида

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = L_n(x) + \frac{\Omega_{n+1}(x) D_{n+1}(f; x_j)}{D_{n+1}(\varphi_{n+1}; x_j)}, \tag{1}$$

где в выражениях

$$L_n(x)=\frac{(-1)^n}{\tilde g_n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k g_n(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n;\,x_0,x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n,x)f(x_k),$$

$$\tilde g_n=g_n(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n;\,x_0,x_1,\dots,x_n),$$

$$\Omega_{n+1}(x)=\frac{1}{\tilde g_n}g_{n+1}(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{n+1};\,x_0,x_1,\dots,x_n,x),$$

функции $g_n(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n;\,x_0,x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n,x)$ $(k=0,1,\dots,n)$, $g_n(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n;\,x_0,x_1,\dots,x_n)$, $g_{n+1}(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{n+1};\,x_0,x_1,\dots,x_n,x)$ задаются посредством определителей

$$g_n(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n;\,x_0,x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n,x)=$$

$$=\begin{vmatrix}\varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \cdots & \varphi_0(x_{k-1}) & \varphi_0(x_{k+1}) & \cdots & \varphi_0(x_n) & \varphi_0(x)\\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_{k-1}) & \varphi_1(x_{k+1}) & \cdots & \varphi_1(x_n) & \varphi_1(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_{k-1}) & \varphi_n(x_{k+1}) & \cdots & \varphi_n(x_n) & \varphi_n(x)\end{vmatrix},$$

$$g_n(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n;\,x_0,x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}\varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_0(x_n)\\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_1(x_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \dots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix},$$

$$g_{n+1}(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_{n+1};\,x_0,x_1,\dots,x_n,x)=\begin{vmatrix}\varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \cdots & \varphi_0(x_{n+1}) & \varphi_0(x)\\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_1(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \varphi_{n+1}(x_0) & \varphi_{n+1}(x_1) & \cdots & \varphi_{n+1}(x_{n+1}) & \varphi_{n+1}(x)\end{vmatrix}.$$

Для многочлена (1) выполняются интерполяционные условия

$$\tilde L_{n+1}(x_i)=f(x_i)\ \ (i=0,1,\dots,n);\quad D_{n+1}(\tilde L_{n+1};x_j)=D_{n+1}(f;x_j);$$

$D_{n+1}(f;x)\equiv D_{n+1}f(x)$ – дифференциальный оператор вида

$$D_{n+1}f(x)=W_n^{-1}(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n;\,x)W_{n+1}(\varphi_0,\varphi_1,\dots,\varphi_n,f;\,x),$$

где $W_n(\cdot;x)$ и $W_{n+1}(\cdot;x)$ – вронскианы относительно систем функций, указанных в качестве аргументов; $D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_j)\neq 0$.

Построим матричный аналог интерполяционной формулы (1). Пусть X – множество квадратных матриц фиксированного размера, $F(x)$ – целая функция, $x\in\mathbb{R}$. Пусть также в узлах $A_0,A_1,\dots,A_n$ из множества X известны значения функции $F(A)$, $A\in X$, и в одном из заданных или в новом узле A_j – значение $D_{n+1}(F;A_j)$ матрично-дифференциального оператора вида

$$D_{n+1}F(A)=\big(D-b_n(x)\big)\cdots\big(D-b_0(x)\big)F(x)\Big|_{x=A},\quad D=\frac{d}{dx}, \tag{2}$$

где функции $b_0(x)=\dfrac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}$, $b_k(x)=\dfrac{\big(D_k\varphi_k(x)\big)'}{D_k\varphi_k(x)}$ $(k=1,2,\dots,n)$ аналитические в интервале (a,b), $\varphi_0(x), D_1\varphi_1(x), \dots, D_n\varphi_n(x)$, не обращаются в нуль, а функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, $x\in\mathbb{R}$ образуют чебышевскую систему.

Далее будут использованы процедуры некоммутативного анализа [8] при вычислении определителей матриц с матричными элементами. Определители вычисляются по тем же правилам, как и в случае скалярных элементов, но при этом следует учитывать порядок расположения матриц в матричных произведениях, определенный фейнмановскими номерами, указанными в виде индексов над соответствующими матрицами. Например, для матриц $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ из множества X определители матриц второго порядка в соответствии с фейнмановскими номерами вычисляются по правилу

$$\begin{vmatrix}\overset{1}{A}_{11} & \overset{1}{A}_{12}\\ \overset{0}{A}_{21} & \overset{0}{A}_{22}\end{vmatrix}=A_{11}A_{22}-A_{12}A_{21},\quad \begin{vmatrix}\overset{1}{A}_{11} & \overset{0}{A}_{12}\\ \overset{1}{A}_{21} & \overset{0}{A}_{22}\end{vmatrix}=A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12},$$

т.е. матрицы с большими фейнмановскими номерами должны располагаться в матричных произведениях левее матриц с меньшими фейнмановскими номерами. Очевидно, что при вычислении по таким правилам определителей матриц, элементы которых также являются матрицами, сохраняются следующие свойства:

1. Если две строки (столбца) матрицы равны между собой, а также совпадают соответствующие наборы фейнмановских номеров, то определитель этой матрицы равен нулю.

2. Если в определителе переставить местами любые две строки или два столбца с одинаковыми наборами фейнмановских номеров, то определитель изменит знак на противоположный.

Пусть $G_n=\begin{vmatrix}\varphi_0(\overset{n}{A_0}) & \cdots & \varphi_0(\overset{n}{A_n})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_n(\overset{0}{A_0}) & \cdots & \varphi_n(\overset{0}{A_n})\end{vmatrix}.$

Теорема 1. *Если матрицы G_n и $D_{n+1}(\varphi_{n+1};A_j)$ обратимы, то для матричного многочлена*

$$\tilde{L}_{n+1,0}(A)=L_{n,0}(A)+\Omega_{n+1}(A)\Big[D_{n+1}(\varphi_{n+1};A_j)\Big]^{-1}D_{n+1}(F;A_j), \tag{3}$$

где

$$L_{n,0}(A)=-G_n^{-1}\cdot\begin{vmatrix}\varphi_0(\overset{n+1}{A_0}) & \cdots & \varphi_0(\overset{n+1}{A_n}) & \varphi_0(\overset{n+1}{A})\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \varphi_n(\overset{1}{A_0}) & \cdots & \varphi_n(\overset{1}{A_n}) & \varphi_n(\overset{1}{A})\\ F(\overset{0}{A_0}) & \cdots & F(\overset{0}{A_n}) & 0\end{vmatrix},$$

$$\Omega_{n+1}(A) = G_n^{-1}\cdot\begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0}(A_0) & \cdots & \overset{n+1}{\varphi_0}(A_n) & \overset{n+1}{\varphi_0}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{1}{\varphi_n}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\varphi_n}(A_n) & \overset{1}{\varphi_n}(A) \\ \overset{0}{\varphi_{n+1}}(A_0) & \cdots & \overset{0}{\varphi_{n+1}}(A_n) & \overset{0}{\varphi_{n+1}}(A) \end{vmatrix},$$

выполняются интерполяционные условия

$$\tilde{L}_{n+1,0}(A_k) = F(A_k)\ \ (k = 0,1,\ldots,n);\quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1,0}; A_j) = D_{n+1}(F; A_j). \tag{4}$$

Если матрицы $A, A_0, A_1, \ldots, A_n$ *попарно перестановочны, то формула* (3) *точна для матричных многочленов вида*

$$P_{n+1,0}(A) = \varphi_0(A)B_0 + \varphi_1(A)B_1 + \ldots + \varphi_{n+1}(A)B_{n+1}, \tag{5}$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_{n+1}$ *– произвольные фиксированные матрицы из X.*

Доказательство.

Проверим выполнение первой группы интерполяционных условий (4). Раскладывая определитель в выражении для $L_{n,0}(A)$ по матричным элементам последней строки, при $A = A_k$, будем иметь

$$L_{n,0}(A_k) = -G_n^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+3+i}\begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0}(A_0) & \cdots & \overset{n+1}{\varphi_0}(A_{i-1}) & \overset{n+1}{\varphi_0}(A_{i+1}) & \cdots & \overset{n+1}{\varphi_0}(A_n) & \overset{n+1}{\varphi_0}(A_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{1}{\varphi_n}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\varphi_n}(A_{i-1}) & \overset{1}{\varphi_n}(A_{i+1}) & \cdots & \overset{1}{\varphi_n}(A_n) & \overset{1}{\varphi_n}(A_k) \end{vmatrix} F(A_i) =$$

$$= -G_n^{-1}(-1)^{n+3+k}(-1)^{n-k}G_nF(A_k) = F(A_k). \tag{6}$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $i \neq k$ в определителях (6) есть два одинаковых столбца с матричными элементами, поэтому по свойству 1 такие определители равны нулю. При $i = k$ соответствующий определитель с точностью до знака равен матрице G_n. Поэтому после $n-k$ перестановок соседних столбцов, используя свойство 2, в силу произвольности выбора узла A_k, получим выполнение интерполяционных условий $L_{n,0}(A_k) = F(A_k)$ $(k = 0,1,\ldots,n)$. Аналогично, $\Omega_{n+1}(A_k) = 0$ при $k = 0,1,\ldots,n.$ Таким образом, первая группа интерполяционных условий (4) выполняется.

Проверим выполнение последнего интерполяционного условия в (4). Многочлен $L_{n,0}(A)$ можно представить в виде $L_{n,0}(A) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{m_k} B_{k,\nu}\varphi_k(A)C_{k,\nu}$, где $B_{k,\nu}$ и $C_{k,\nu}$ – соответствующие фиксированные матрицы из *X*, а m_k – целые числа. При $k = 0,1,\ldots,n$ выполняются тождества $D_{n+1}\varphi_k(A) \equiv 0.$ Это следует из структуры оператора (2) и аналогичных тождеств в скалярном случае [3; 9]. В силу линейности оператора (2), $D_{n+1}L_{n,0}(A) \equiv 0.$

Многочлен $\Omega_{n+1}(A)$ представим в виде $\Omega_{n+1}(A)=\varphi_{n+1}(A)+\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n_k}\tilde{B}_{k,\nu}\varphi_k(A)\tilde{C}_{k,\nu}$,

где $\tilde{B}_{k,\nu}$ и $\tilde{C}_{k,\nu}$ – фиксированные матрицы из X, а n_k – целые числа.

Соответственно, $D_{n+1}\Omega_{n+1}(A)=D_{n+1}\varphi_{n+1}(A)$, в том числе и при $A=A_j$. Учитывая структуру многочлена (3), получим, что последнее условие в (4) также имеет место.

Покажем, что формула (3) точна для матричных многочленов вида (5). Пусть $F(A)=\varphi_k(A),\ 0\le k\le n$.

При условии попарной перестановочности матриц $A, A_0, A_1, \ldots, A_n$ многочлен $L_{n,0}(A)$ представим в виде

$$L_{n,0}(A)=-G_n^{-1}\cdot\begin{vmatrix}\overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)}\\ \overset{n+1}{\varphi_k(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_k(A_n)} & 0\end{vmatrix}. \tag{7}$$

Раскладывая (7) по элементам последнего столбца, получим

$$L_{n,0}(A)=-G_n^{-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+i-1}\begin{vmatrix}\overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overset{n+1}{\varphi_{i-1}(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_{i-1}(A_n)}\\ \overset{n+1}{\varphi_{i+1}(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_{i+1}(A_n)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)}\\ \overset{n+1}{\varphi_k(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_k(A_n)}\end{vmatrix}\varphi_k(A). \tag{8}$$

При $i\ne k$ определители в (8) равны нулю, так как в них содержатся две равных строки с одинаковыми наборами фейнмановских номеров.

При $i=k$ после $n-k$ перестановок соответствующих строк, по свойству 2 определителей с матричными элементами, будем иметь

$$L_{n,0}(A)=-G_n^{-1}(-1)^{n+k-1}(-1)^{n-k}G_n\varphi_k(A)=\varphi_k(A).$$

Очевидно, что если $F(A)=\varphi_k(A)B_k$, то при тех же условиях коммутативности матриц будет выполняться тождество $L_{n,0}(A)\equiv F(A)$.

В силу свойств оператора (2) для функции $F(A)$ выполняется равенство $D_{n+1}(F;A_j)=0$. Поэтому $\tilde{L}_{n+1,0}(A)\equiv F(A)$.

Пусть далее $F(A)=\varphi_{n+1}(A)$,

тогда

$$\tilde{L}_{n+1,0}(A)=-G_n^{-1}\begin{vmatrix}\overset{n+1}{\varphi_0}(A_0) & \cdots & \overset{n+1}{\varphi_0}(A_n) & \overset{n+1}{\varphi_0}(A)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \overset{1}{\varphi_n}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\varphi_n}(A_n) & \overset{1}{\varphi_n}(A)\\ \overset{0}{\varphi_{n+1}}(A_0) & \cdots & \overset{0}{\varphi_{n+1}}(A_n) & 0\end{vmatrix}+G_n^{-1}\begin{vmatrix}\overset{n+1}{\varphi_0}(A_0) & \cdots & \overset{n+1}{\varphi_0}(A_n) & \overset{n+1}{\varphi_0}(A)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \overset{1}{\varphi_n}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\varphi_n}(A_n) & \overset{1}{\varphi_n}(A)\\ \overset{0}{\varphi_{n+1}}(A_0) & \cdots & \overset{0}{\varphi_{n+1}}(A_n) & \overset{0}{\varphi_{n+1}}(A)\end{vmatrix}\times$$

$$\times\left[D_{n+1}(\varphi_{n+1};A_j)\right]^{-1}D_{n+1}(F;A_j).$$

Раскладывая определители по элементам последней строки и учитывая, что $D_{n+1}(F;A_j)=D_{n+1}(\varphi_{n+1};A_j)$, будем иметь $\tilde{L}_{n+1,0}(A)=\varphi_{n+1}(A)$.

Аналогично, $\tilde{L}_{n+1,0}(A)=F(A)$ при $F(A)=\varphi_{n+1}(A)B_{n+1}$. Таким образом, формула (3) точна для многочленов вида (5). Теорема 1 доказана.

Имеет место аналогичная (3) интерполяционная формула, точная для матричных многочленов вида

$$P_{0,n+1}(A)=B_0\varphi_0(A)+B_1\varphi_1(A)+\ldots+B_{n+1}\varphi_{n+1}(A). \tag{9}$$

В частном случае при $n=1$ формула (3) примет вид

$$\tilde{L}_{2,0}(A)=L_{1,0}(A)+\Omega_2(A)\left[D_2(\varphi_2;A_j)\right]^{-1}D_2(F;A_j), \tag{10}$$

где

$$L_{1,0}(A)=-\begin{vmatrix}\overset{1}{\varphi_0}(A_0) & \overset{1}{\varphi_0}(A_1)\\ \overset{0}{\varphi_1}(A_0) & \overset{0}{\varphi_1}(A_1)\end{vmatrix}^{-1}\cdot\begin{vmatrix}\overset{2}{\varphi_0}(A_0) & \overset{2}{\varphi_0}(A_1) & \overset{2}{\varphi_0}(A)\\ \overset{1}{\varphi_1}(A_0) & \overset{1}{\varphi_1}(A_1) & \overset{1}{\varphi_1}(A)\\ \overset{0}{F}(A_0) & \overset{0}{F}(A_1) & 0\end{vmatrix}=\left[\varphi_0(A_1)\varphi_1(A_0)-\varphi_0(A_0)\varphi_1(A_1)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\left(\varphi_0(A_1)\varphi_1(A)-\varphi_0(A)\varphi_1(A_1)\right)F(A_0)+\left(\varphi_0(A)\varphi_1(A_0)-\varphi_0(A_0)\varphi_1(A)\right)F(A_1)\right],$$

$$\Omega_2(A)=\begin{vmatrix}\overset{1}{\varphi_0}(A_0) & \overset{1}{\varphi_0}(A_1)\\ \overset{0}{\varphi_1}(A_0) & \overset{0}{\varphi_1}(A_1)\end{vmatrix}^{-1}\cdot\begin{vmatrix}\overset{2}{\varphi_0}(A_0) & \overset{2}{\varphi_0}(A_1) & \overset{2}{\varphi_0}(A)\\ \overset{1}{\varphi_1}(A_0) & \overset{1}{\varphi_1}(A_1) & \overset{1}{\varphi_1}(A)\\ \overset{0}{\varphi_2}(A_0) & \overset{0}{\varphi_2}(A_1) & \overset{0}{\varphi_2}(A)\end{vmatrix}=\left[\varphi_0(A_0)\varphi_1(A_1)-\varphi_0(A_1)\varphi_1(A_0)\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\varphi_0(A_0)\varphi_1(A_1)\varphi_2(A)+\varphi_0(A)\varphi_1(A_0)\varphi_2(A_1)+\varphi_0(A_1)\varphi_1(A)\varphi_2(A_0)-\right.$$

$$\left.-\varphi_0(A)\varphi_1(A_1)\varphi_2(A_0)-\varphi_0(A_1)\varphi_1(A_0)\varphi_2(A)-\varphi_0(A_0)\varphi_1(A)\varphi_2(A_1)\right],$$

$$D_2(\varphi_2;A_j)=\left(D-b_1(x)\right)\left(D-b_0(x)\right)\varphi_2(x)\Big|_{x=A_j},$$

$$D_2(F;A_j)=\left(D-b_1(x)\right)\left(D-b_0(x)\right)F(x)\Big|_{x=A_j},\quad D=\frac{d}{dx},$$

где функции $b_0(x)=\dfrac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}$, $b_1(x)=\dfrac{\left(D_1\varphi_1(x)\right)'}{D_1\varphi_1(x)}$, а узел A_j может совпадать с одной из матриц A_0, A_1. Формула (10) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{2,0}(A_k)=F(A_k)\ \ (k=0,1).$$

Многочлен (10) можно представить в виде

$$\tilde{L}_{2,0}(A)=C_0\varphi_0(A)E_0+C_1\varphi_1(A)E_1+C_2\varphi_1(A)E_2+\varphi_2(A)\left[D_2(\varphi_2;A_j)\right]^{-1}D_2(F;A_j),$$

где C_0, C_1, C_2, E_0, E_1, E_2 – соответствующие фиксированные матрицы. Так как

$$D_2(\varphi_0;A_j)=\left(D-b_1(x)\right)\left(D-b_0(x)\right)\varphi_0(x)\Big|_{x=A_j}=\left(D-b_1(x)\right)\left(\varphi_0'(x)-\frac{\varphi_0'(x)}{\varphi_0(x)}\varphi_0(x)\right)\Bigg|_{x=A_j}\equiv 0,$$

$$D_2(\varphi_1;A_j)=\left(D-b_1(x)\right)D_1\varphi_1(x)\Big|_{x=A_j}=\left(D_1\varphi_1(x)\right)'-b_1(x)D_1\varphi_1(x)\Big|_{x=A_j}\equiv 0,$$

то $D_2(\tilde{L}_{2,0};A_j)=D_2(F;A_j)$.

В случае попарной перестановочности матриц A, A_0, A_1 формула (10) является точной для матричных обобщенных многочленов вида

$$P_{2,0}(A)=\varphi_0(A)B_0+\varphi_1(A)B_1+\varphi_2(A)B_2,$$

где B_0, B_1, B_2 – произвольные фиксированные матрицы из *X*. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой.

Теорема 2. *Если существуют матрицы* G_n^{-1} *и* $\left[D_{n+1}(\varphi_{n+1};A_j)\right]^{-1}$, *то интерполяционный матричный многочлен*

$$\tilde{L}_{0,n+1}(A)=L_{0,n}(A)+D_{n+1}(F;A_j)\left[D_{n+1}(\varphi_{n+1};A_j)\right]^{-1}\Omega_{n+1}(A), \tag{11}$$

где

$$L_{0,n}(A)=-\begin{vmatrix} 0 & \overset{n+1}{F}(A_0) & \cdots & \overset{n+1}{F}(A_n) \\ \overset{n}{\varphi_0}(A) & \overset{n}{\varphi_0}(A_0) & \cdots & \overset{n}{\varphi_0}(A_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{0}{\varphi_n}(A) & \overset{0}{\varphi_n}(A_0) & \cdots & \overset{0}{\varphi_n}(A_n) \end{vmatrix} G_n^{-1},$$

а $\Omega_{n+1}(A)$ *определяется так же, как и в теореме* 1, *удовлетворяет условиям*

$$\tilde{L}_{0,n+1}(A_k)=F(A_k)\ \ (k=0,1,\ldots,n);\quad D_{n+1}(\tilde{L}_{0,n+1};A_j)=D_{n+1}(F;A_j).$$

Если матрицы $A, A_0, A_1, \ldots, A_n$ *образуют множество взаимно перестановочных матриц, то формула* (11) *инвариантна относительно матричных многочленов вида* (9).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Построим далее аналогичную (3) интерполяционную формулу, в которой дифференциальный оператор $D_{n+1}F(A)$ задается посредством дифференциалов Гато. Пусть, как и ранее, X – множество квадратных матриц, в узлах $A_0, A_1, \dots, A_n$ из X известны значения функции $F(A)$, для которой в одном из заданных узлов или в новом узле A_j существует и известно значение $\tilde{D}_{n+1}(F;A_j)$ дифференциального оператора вида

$$\tilde{D}_{n+1}F(A) = \tilde{D}_{n+1}F(A;H_{n+1}H_n \cdots H_1) = \left(D_{H_{n+1}} - b_n(A)\right)\cdots\left(D_{H_1} - b_0(A)\right)F(A), \qquad (12)$$

где $b_0(A) = \delta\varphi_0[A;H_1]\varphi_0^{-1}(A)$, $b_k(A) = \delta\tilde{D}_k\varphi_k[A;H_{k+1}]\left(\tilde{D}_k\varphi_k(A)\right)^{-1}$, $(k = 1,2,\dots,n)$. Здесь $D_{H_k}F(A) = \delta F[A;H_k]$, где $\delta F[A;H_k]$ – дифференциал Гато первого порядка функции $F(A)$ в точке A по направлению H_k. Так как $\tilde{D}_{m+1}F(A) = \left(D_{H_{m+1}} - b_m(A)\right)\tilde{D}_mF(A)$ при $m = 1,2,\dots,n$, то нетрудно показать, что $\tilde{D}_{n+1}\varphi_k(A) \equiv 0$ $(k = 0,1,\dots,n)$. Справедлива

Теорема 3. *Если матрицы G_n и $\tilde{D}_{n+1}(\varphi_{n+1};A_j)$ имеют обратные, то для матричного интерполяционного многочлена*

$$\tilde{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \Omega_{n+1}(A)\left[\tilde{D}_{n+1}(\varphi_{n+1};A_j)\right]^{-1}\tilde{D}_{n+1}(F;A_j), \qquad (13)$$

где $L_n(A) = L_{n,0}(A)$, а многочлен $\Omega_{n+1}(A)$ определяется так же, как и в теореме 1, *выполняются условия*

$$\tilde{L}_{n+1}(A_k) = F(A_k) \ (k = 0,1,\dots,n); \quad \tilde{D}_{n+1}(\tilde{L}_{n+1};A_j) = \tilde{D}_{n+1}(F;A_j). \qquad (14)$$

Если матрицы $A, A_0, A_1, \dots, A_n$ взаимно перестановочны, то полином (13) *точен для матричных многочленов вида* (5).

Доказательство

Так как $L_n(A) = L_{n,0}(A)$, то из доказательства теоремы 1 следует, что $L_n(A_k) = F(A_k)$ и $\Omega_{n+1}(A_k) = 0$ при $k = 0,1,\dots,n$. Таким образом, первая группа условий в (14) выполняется. В силу соответствующих представлений многочленов $L_n(A)$ и $\Omega_{n+1}(A)$, а также свойств оператора (12) будем иметь $\tilde{D}_{n+1}L_n(A) \equiv 0$ и $\tilde{D}_{n+1}\Omega_{n+1}(A) = \tilde{D}_{n+1}\varphi_{n+1}(A)$. Тогда и последнее условие в (14) имеет место.

Пусть $F(A) = \varphi_k(A)B_k$, $0 \le k \le n$. Из доказательства теоремы 1 получаем, что при условии попарной перестановочности матриц $A, A_0, A_1, \dots, A_n$ выполняются соотношения $L_n(A) \equiv F(A)$ и $\tilde{D}_{n+1}(F;A_j) = 0$. Следовательно, $\tilde{L}_{n+1}(A) \equiv F(A)$. Далее, так как $\tilde{D}_{n+1}(F;A_j) = \tilde{D}_{n+1}(\varphi_{n+1};A_j)B_{n+1}$ при $F(A) = \varphi_{n+1}(A)B_{n+1}$, то, также используя доказательство теоремы 1, можно показать, что $\tilde{L}_{n+1}(A) \equiv \varphi_{n+1}(A)B_{n+1}$. Таким образом, формула (13) точна для многочленов вида (5). Теорема 3 доказана.

2. Формула, точная для матричных многочленов

Приведем далее формулу, которая в общем случае не является интерполяционной, но она точна для многочленов вида (5). При этом не требуется взаимная перестановочность матричных узлов и аргумента A. Введем матрицу

$$\tilde{G}_n = \begin{vmatrix} \overset{n}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{0}{\varphi_0(A_n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{n}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{0}{\varphi_n(A_n)} \end{vmatrix},$$

которая отличается от G_n только расположением фейнмановских номеров. Как и ранее, будем предполагать, что матрицы $\tilde{G}_n$ и $D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)$ обратимы. Здесь выражением $D_{n+1}F(A)$ может определяться как оператор (2), так и (12).

Теорема 4. *Если матрицы* $B_0, B_1, \ldots, B_{n+1}$ *попарно коммутируют с матрицами* $A_1, \ldots, A_n, A,$ *то формула*

$$\widehat{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \tilde{\Omega}_{n+1}(A)\Big[D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)\Big]^{-1} D_{n+1}(F; A_j), \tag{15}$$

где

$$L_n(A) = -\tilde{G}_n^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)} \\ \overset{n+1}{F(A_0)} & \cdots & \overset{1}{F(A_n)} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\Omega}_{n+1}(A) = \tilde{G}_n^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)} \\ \overset{n+1}{\varphi_{n+1}(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_{n+1}(A_n)} & \overset{0}{\varphi_{n+1}(A)} \end{vmatrix},$$

точна для матричных многочленов вида (5).

Доказательство

Пусть $F(A) = \varphi_k(A)B_k,\ 0 \le k \le n.$ В силу перестановочности матрицы B_k с матрицами $A_1, \ldots, A_n, A,$ имеет место представление

$$L_n(A) = -\tilde{G}_n^{-1} \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)} \\ \overset{n+1}{\varphi_k(A_0)B_k} & \cdots & \overset{1}{\varphi_k(A_n)B_k} & 0 \end{vmatrix} = -\tilde{G}_n^{-1} \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_0(A_n)} & \overset{0}{\varphi_0(A)B_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_n(A_n)} & \overset{0}{\varphi_n(A)B_k} \\ \overset{n+1}{\varphi_k(A_0)} & \cdots & \overset{1}{\varphi_k(A_n)} & 0 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Так же, как и в доказательстве теоремы 1, раскладывая определитель в (16) по элементам последнего столбца (равенства (7) и (8)), будем иметь $L_n(A) = \varphi_k(A)B_k$, и так как $D_{n+1}(F; A_j) = 0$ для данной функции $F(A)$, то $\widehat{L}_{n+1}(A) \equiv \varphi_k(A)B_k = F(A)$.

Пусть теперь $F(A) = \varphi_{n+1}(A)B_{n+1}$, тогда, аналогично равенству (16), учитывая, что $D_{n+1}(F; A_j) = D_{n+1}(\varphi_{n+1}; A_j)B_{n+1}$, получим

$$\widehat{L}_{n+1}(A) = -\tilde{G}_n^{-1}\begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\varphi_0}(A_n) & \overset{0}{\varphi_0}(A)B_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\varphi_n}(A_n) & \overset{0}{\varphi_n}(A)B_{n+1} \\ \overset{n+1}{\varphi_{n+1}}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\varphi_{n+1}}(A_n) & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\tilde{G}_n^{-1}\begin{vmatrix} \overset{n+1}{\varphi_0}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\varphi_0}(A_n) & \overset{0}{\varphi_0}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{n+1}{\varphi_n}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\varphi_n}(A_n) & \overset{0}{\varphi_n}(A) \\ \overset{n+1}{\varphi_{n+1}}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\varphi_{n+1}}(A_n) & \overset{0}{\varphi_{n+1}}(A) \end{vmatrix} B_{n+1}.$$

Раскладывая определители по элементам последнего столбца, будем иметь $\widehat{L}_{n+1}(A) \equiv \varphi_{n+1}(A)B_{n+1} = F(A)$.

Таким образом, формула (15) точна для многочленов вида (5). Теорема 4 доказана.

Нетрудно построить аналогичную (15) формулу, точную для многочленов вида (9). При этом необходимо требовать, чтобы матрицы $B_0, B_1, \ldots, B_{n+1}$ попарно коммутировали с матрицами $A_0, \ldots, A_{n-1}, A$.

3. Частные случаи интерполирования

Рассмотрим частные случаи формулы (3) для небольшого числа матричных узлов. При $n = 1$ формула (3) примет вид:

$$\tilde{L}_{2,0}(A) = L_{1,0}(A) + \Omega_2(A)\left[D_2(\varphi_2; A_j)\right]^{-1} D_2(F; A_j), \tag{17}$$

где

$$L_{1,0}(A) = G_1^{-1}\left[\left(\varphi_0(A)\varphi_1(A_1) - \varphi_0(A_1)\varphi_1(A)\right)F(A_0) + \left(\varphi_0(A_0)\varphi_1(A) - \varphi_0(A)\varphi_1(A_0)\right)F(A_1)\right],$$

$$\Omega_2(A) = G_1^{-1}\left[\varphi_0(A_0)\varphi_1(A_1)\varphi_2(A) + \varphi_0(A)\varphi_1(A_0)\varphi_2(A_1) + \varphi_0(A_1)\varphi_1(A)\varphi_2(A_0) - \right.$$
$$\left. -\varphi_0(A)\varphi_1(A_1)\varphi_2(A_0) - \varphi_0(A_1)\varphi_1(A_0)\varphi_2(A) - \varphi_0(A_0)\varphi_1(A)\varphi_2(A_1)\right],$$

а $G_1 = \varphi_0(A_0)\varphi_1(A_1) - \varphi_0(A_1)\varphi_1(A_0)$. Дифференциальный оператор $D_2F(A)$ определяется здесь по аналогии со скалярным случаем [3, с. 9], по формуле

$$D_2F(A) = F''(z) - \left(b_0(z) + b_1(z)\right)F'(z) + \left(b_0(z)b_1(z) - b_0'(z)\right)F(z)\Big|_{z=A},$$

где

$$b_0(z) + b_1(z) = \frac{\varphi_0(z)\varphi_1''(z) - \varphi_0''(z)\varphi_1(z)}{\varphi_0(z)\varphi_1'(z) - \varphi_0'(z)\varphi_1(z)},\ \ b_0(z)b_1(z) - b_0'(z) = \frac{\varphi_0'(z)\varphi_1''(z) - \varphi_0''(z)\varphi_1'(z)}{\varphi_0(z)\varphi_1'(z) - \varphi_0'(z)\varphi_1(z)}.$$

Нетрудно убедиться, что в узлах A_0 и A_1 интерполяционный многочлен (17) совпадает с функцией $F(A)$, и он также удовлетворяет условию $D_2(\tilde{L}_{2,0}; A_j) = D_2(F; A_j)$.

В случае, если дифференциальный оператор определяется формулой (12), то $\tilde{D}_2F(A)$ примет вид:

$$\tilde{D}_2 F(A) = \delta^2 F[A; H_2 H_1] - b_0(A)\delta F[A; H_2] - b_1(A)\delta F[A; H_1] + \left(b_1(A) b_0(A) - \delta b_0[A; H_2]\right) F(A),$$

где

$$b_0(A) = \delta\varphi_0[A; H_1]\varphi_0^{-1}(A), \ \ b_1(A) = \delta\tilde{D}_1\varphi_1[A; H_2]\left(\tilde{D}_1\varphi_1(A)\right)^{-1},$$
$$\tilde{D}_1\varphi_1(A) = \delta\varphi_1[A; H_1] - b_0(A)\varphi_1(A).$$

В [7] рассмотрен частный случай формулы (3) при $\varphi_k(A) = e^{\lambda_k A}$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$, где $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n+1}$. Дифференциальный оператор (2) здесь имеет вид:

$$D_{n+1}F(A) = \left(D - \lambda_n\right)\cdots\left(D - \lambda_1\right) DF(z)\Big|_{z=A}, \quad D = \frac{d}{dz}.$$

Интерполяционный многочлен

$$\tilde{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \frac{\Omega_n(A) e^{-\lambda_{n+1}A_j} D_{n+1}(F; A_j)}{\lambda_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_1)\cdots(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}, \tag{18}$$

где

$$L_n(A) = \tilde{G}_n^{-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i G_n(A, A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n) F(A_i),$$
$$\Omega_n(A) = (-1)^n \tilde{G}_n^{-1} G_{n+1}(A, A_0, A_1, \ldots, A_n), \ \ \tilde{G}_n = G_n(A_0, A_1, \ldots, A_n),$$

удовлетворяет условиям: $\tilde{L}_{n+1}(A_k) = F(A_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$; $D_{n+1}\left(\tilde{L}_{n+1}; A_j\right) = D_{n+1}\left(F; A_j\right)$.

В [7] матричные функции

$$G_n(A, A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n) \text{ и } G_{n+1}(A, A_0, A_1, \ldots, A_n)$$

определяются рекуррентными формулами и удовлетворяют условиям

$$G_n(A_k, A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n) = (-1)^i \delta_{ki} \tilde{G}_n,$$

где δ_{ki} – символ Кронекера и $G_{n+1}(A_k, A_0, A_1, \ldots, A_n) = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Аналогичный (18) интерполяционный многочлен построен в [7] для случая, когда дифференциальный оператор задается посредством дифференциалов Гато формулой вида (12). Точность формулы (18) для многочленов по системе матричных экспонент доказана только для случаев двух и трех узлов. Обобщенные матричные интерполяционные многочлены по системам тригонометрических и рациональных функций построены также в [4–7].

Заключение

В данной работе получены следующие новые результаты: для функций матричного аргумента построены обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркзгофа по общей чебышевской системе матричных функций.

В структуру многочленов входят определители матриц с матричными элементами, при вычислении которых используются процедуры некоммутативного анализа.

Получены формулы, которые в общем случае не являются интерполяционными, но они точны для матричных многочленов специальной структуры. Рассмотрены частные случаи интерполирования для небольшого числа узлов и для конкретных чебышевских систем матричных функций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худяков, А. П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита – Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А. П. Худяков // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.

2. Худяков, А. П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А. П. Худяков // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.

3. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа для случая чебышевских систем функций / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 5–14.

4. Yanovich, L. A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.

5. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.

6. Янович, Л. А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л. А. Янович, А. П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.

7. Худяков, А. П. Некоторые задачи теории интерполирования / А. П. Худяков. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2014. – 132 с.

8. Назайкинский, В. Е. Методы некоммутативного анализа / В. Е. Назайкинский, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов. – М. : Техносфера, 2002. – 242 с.

9. Хаусхолдер, А. С. Основы численного анализа / А. С. Хаусхолдер ; под ред. Л. А. Люстерника. – М. : Изд-во иностр. лит., 1956. – 320 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 01.04.2019

Mazurik S.S., Kulgun E.I., Hudyakov A.P. **Matrix Generalized Interpolation of Hermite – Birkhoff Type with One Special Node on the General Chebyshev System of Functions**

The problem of construction of matrix generalized interpolation polynomials of Hermite – Birkhoff with one special node on the general Chebyshev system of matrix functions is researched. For the construction of the interpolation formulas the non-commutative analysis procedures are used. The matrix formulas, which in the general case are not interpolation, but which are accurate for matrix polynomials of the special structure are obtained. The special cases for specific Chebyshev systems of functions are considered separately.