УДК 517.927.21

С.А. Марзан
канд. физ.-мат. наук, доц., первый проректор
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail:marzanserg2@gmail.com

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Исследована задача типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения с производными Римана – Лиувилля комплексных порядков в весовом пространстве непрерывных функций. С использованием свойств дробных интегралов и производных Римана – Лиувилля в весовом пространстве непрерывных функций доказана равносильность рассматриваемой задачи интегральному уравнению Вольтерра второго рода, а также получены условия существования и единственности решения задачи.

Пусть $I_{a+}^{\alpha}g$ и $D_{a+}^{\alpha}y$ – дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси:

$$(I_{a+}^{\alpha}g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \tag{1}$$

$$(D_{a+}^{\alpha}y)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\mathrm{Re}(\alpha)]+1, \tag{2}$$

($[\mathrm{Re}(\alpha)]$ – целая часть $\mathrm{Re}(\alpha)$) [1, § 2.2, 2.4].

Краевые задачи для так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция входит под знаком дробной производной, изучались многими авторами (см. исторические сведения и обзор методов и результатов в [1, §§ 42–43] и обзорной статье [2]). Интерес к таким проблемам вызван их приложениями в задачах физики, механики и других прикладных наук [3; 4]. С точки зрения приложений одной из наиболее актуальных задач теории дифференциальных уравнений дробного порядка является построение теории их разрешимости в различных функциональных пространствах.

Обозначим через $C_{\gamma}[a,b]$ $(\gamma \in C)$ класс функций $g(x)$, заданных на $[a,b]$ и таких, что $(x-a)^{\gamma}g(x) \in C[a,b]$:

$$C_{\gamma}[a,b] = \left\{ g(x) : \|g\|_{C_{\gamma}} = \left\|(x-a)^{\gamma}g(x)\right\|_{C} < \infty \right\},\ C_0[a,b] = C[a,b]. \tag{3}$$

Для $\gamma \in C$ и $n \in N$ обозначим через $C_{\gamma}^{n}[a,b]$ банахово пространство функций $g(x)$, непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ до порядка $n-1$ и имеющих производную порядка n такую, что $g^{(n)}(x) \in C_{\gamma}[a,b]$:

$$C_{\gamma}^{n}[a,b] = \left\{ g : \|g\|_{C_{\gamma}^{n}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left\|g^{(k)}\right\|_{C} + \left\|g^{(n)}\right\|_{C_{\gamma}} \right\},\ C_{\gamma}^{0}[a,b] = C_{\gamma}[a,b].$$

Из этого определения вытекает следующее описание пространства $C_\gamma^n[a,b]$.

Лемма 1. *Пространству* $C_\gamma^n[a,b]$ *принадлежат те и только те функции* $g(x)$*, которые представимы в виде*

$$g(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt+\sum_{k=0}^{n-1}c_k(x-a)^k\ , \tag{4}$$

где $\varphi(t)\in C_\gamma[a,b]$*, а* c_k *– произвольные постоянные. При этом*

$$\varphi(x)=g^{(n)}(x),\ c_k=\frac{g^{(k)}(a)}{k!}\ \ (k=0,1,\ldots,n-1).$$

В частности, при $\gamma=0$ $g(x)\in C^n[a,b]$ *тогда и только тогда, когда* $g(x)$ *представляется в виде* (4)*, где* $\varphi(x)\in C[a,b]$.

Непосредственные оценки с учетом (3) и [1, (2.44)] дают условия ограниченности оператора I_{a+}^α в пространстве $C_\gamma[a,b]$.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha\in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha)>0)$ *и* $\gamma\in C$ $(0\le \mathrm{Re}(\gamma)<1)$.

Если $\mathrm{Re}(\gamma)>\mathrm{Re}(\alpha)$, *то оператор* I_{a+}^α *ограниченно действует из* $C_\gamma[a,b]$ *в* $C_{\gamma-\alpha}[a,b]$:

$$\left\|I_{a+}^\alpha f\right\|_{C_{\gamma-\alpha}}\le\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(\alpha))\Gamma(1-\mathrm{Re}(\gamma))}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma(1+\mathrm{Re}(\alpha-\gamma))}\|f\|_{C_\gamma}\ .$$

Если $\mathrm{Re}(\gamma)\le\mathrm{Re}(\alpha)$, *то оператор* I_{a+}^α *ограниченно действует из* $C_\gamma[a,b]$ *в* $C[a,b]$:

$$\left\|I_{a+}^\alpha f\right\|_{C}\le(b-a)^{\mathrm{Re}(\alpha-\gamma)}\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(\alpha))\Gamma(1-\mathrm{Re}(\gamma))}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma(1+\mathrm{Re}(\alpha-\gamma))}\|f\|_{C_\gamma}\ .$$

В частности, оператор I_{a+}^α *ограничен в* $C_\gamma[a,b]$:

$$\left\|I_{a+}^\alpha f\right\|_{C_\gamma}\le(b-a)^{\mathrm{Re}(\alpha)}\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(\alpha))\Gamma(1-\mathrm{Re}(\gamma))}{|\Gamma(\alpha)|\Gamma(1+\mathrm{Re}(\alpha-\gamma))}\|f\|_{C_\gamma}\ .$$

Следующие три утверждения для функций $g(x)\in C_\gamma[a,b]$ доказываются аналогично известным результатам для $g(x)\in L(a,b)$ [1, §§ 2.3, 2.5, теорема 2.4] с учетом леммы 1.

Лемма 3. *Если* $\gamma\in C$ $(0\le\mathrm{Re}(\gamma)<1)$, *то для функций* $g(x)\in C_\gamma[a,b]$ *выполняется полугрупповое свойство*

$$\left(I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta g\right)(x)=\left(I_{a+}^{\alpha+\beta}g\right)(x)\ (\alpha\in C,\mathrm{Re}(\alpha)>0;\ \beta\in C,\mathrm{Re}(\beta)>0).$$

Лемма 4. *Если* $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ *и* $\gamma \in C$ $(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$, *то для функций* $g(x) \in C_\gamma[a,b]$ справедлива формула

$$\left(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = g(x).$$

Если дополнительно $\beta \in C$ *и* $\mathrm{Re}(\alpha) > \mathrm{Re}(\beta) > 0$, *то для* $g(x) \in C_\gamma[a,b]$

$$\left(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = \left(I_{a+}^{\alpha-\beta} g\right)(x).$$

Лемма 5. *Пусть* $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ $n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]$, $\left(I_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x)$ *– дробный интеграл Римана – Лиувилля порядка* $n-\alpha$, *и* $\gamma \in C$ $(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$.

Если $g(x) \in C_\gamma[a,b]$ *и* $\left(I_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x) \in C_\gamma^n[a,b]$, *то имеет место формула*

$$\left(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} g\right)(x) = g(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{g_{n-\alpha}^{(n-j)}(a)}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j}, \; g_{n-\alpha}(x) = \left(I_{a+}^{n-\alpha} g\right)(x). \tag{5}$$

Исследуем проблему существования и единственности решения задачи типа Коши для более общего, чем в [5], нелинейного дифференциального уравнения

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f\left[x, y(x), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(x), \ldots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right)(x)\right], \; n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)], \tag{6}$$

где $\alpha, \alpha_i \in C$ $(i = 1, \ldots, n)$,

$$0 = \alpha_0 < \mathrm{Re}(\alpha_1) < \ldots < \mathrm{Re}(\alpha_{n-1}) < \mathrm{Re}(\alpha), \tag{7}$$

с начальными условиями

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k, \; b_k \in C \;\; (k = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

в пространстве $C_{n-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b]$:

$$C_{n-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b] = \left\{ y \in C_{n-\alpha}[a,b] : D_{a+}^{\alpha} y \in C_\gamma[a,b] \right\}, \; C_\gamma^{\alpha}[a,b] \equiv C_{0,\gamma}^{\alpha}[a,b].$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$, $\gamma \in C$ $(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ $(n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]))$ *удовлетворяют условию* (7), *а функция* $f[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] : [a,b] \times R^n \to R$ *такова, что при любых* $y_i \in R$ $(i = 1, \ldots, n)$ $f[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] \in C_\gamma[a,b]$ *и*

$$\max_{(x, y_1, \ldots, y_n) \in [a,b] \times \overline{R}^n} \left| (x-a)^\gamma f[x, y_1, y_2, \ldots, y_n] \right| = M_\gamma < \infty. \tag{9}$$

Для того чтобы функция $y(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$ являлась решением задачи типа Коши (6), (8), необходимо и достаточно, чтобы она была решением интегрального уравнения

$$y(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f\left[t,y(t),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(t),\ldots,\left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}}y\right)(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt. \qquad (10)$$

Доказательство. Если $y(x)\in C_{n-\alpha}[a,b]$ и выполняется условие (9), то из (6) и (3) следует, что дробная производная $\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)\in C_{\gamma}[a,b]$. В соответствии с (2)

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(I_{a+}^{n-\alpha}y\right)(x),\ n=[\mathrm{Re}(\alpha)]+1,$$

и тогда согласно лемме 1 $\left(I_{a+}^{n-\alpha}y\right)(x)\in C_{\gamma}^{n}[a,b]$. Это дает возможность воспользоваться леммой 5 с $\gamma=n-\alpha$. Применяя оператор I_{a+}^{α} к обеим частям (6), используя (5) и (8), с учетом (9) и леммы 2, согласно которой

$$\left(I_{a+}^{\alpha}f\right)\left[x,y(x),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(x),\ldots,\left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}}y\right)(x)\right]\in C_{n-\alpha}[a,b],$$

мы приходим к интегральному уравнению (10).

Пусть теперь $y(x)\in C_{n-\alpha}[a,b]$ – решение интегрального уравнения (10). Применяя оператор D_{a+}^{α} к обеим частям (10), учитывая равенства

$$\left(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x)=0,\ \beta=\alpha,\alpha-1,\ldots,\alpha-[\mathrm{Re}(\alpha)]$$

и лемму 4, получим уравнение (6).

Покажем, что $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (8). Пусть $k\in N$, $1\le k\le n-1$. Применяя оператор $D_{a+}^{\alpha-k}$ к обеим частям уравнения (10) и используя равенство

$$\left(D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1},\ \alpha,\beta\in C,\ \mathrm{Re}(\beta)>\mathrm{Re}(\alpha)>0$$

и лемму 4, получим:

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k}y\right)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(k-j+1)}(x-a)^{k-j}+$$

$$+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x f\left[t,y(t),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(t),\ldots,\left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}}y\right)(t)\right](x-t)^{k-1}dt. \qquad (11)$$

Если же $k=n$, то

$$\left(D_{a+}^{\alpha-n}y\right)(x)\equiv\left(I_{a+}^{n-\alpha}y\right)(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{(n-j)!}(x-a)^{n-j}+$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f\left[t, y(t), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(t), \ldots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right)(t)\right](x-t)^{n-1} dt. \tag{12}$$

Переходя в (11) и (12) к пределу при $x \to a+0$, приходим к равенствам (8). Это завершает доказательство теоремы.

Для установления условий существования и единственности решения задачи типа Коши (6), (8) к условиям теоремы 1 добавим дополнительное условие липшицевости функции f относительно n переменных:

$$\left|f[x, y_1, \ldots, y_n] - f[x, y_1', \ldots, y_n']\right| \le L\sum_{i=1}^{n}|y_i - y_i'| \tag{13}$$

для любых $x \in [a,b]$ и $(y_1, \ldots, y_n)$, $(y_1', \ldots, y_n') \in R^n$, где постоянная $L > 0$ не зависит от x.

Теорема 2. Пусть $\alpha \in C$, $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$, $\gamma \in C$ $(0 \le \mathrm{Re}(\gamma) < 1)$, $n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]$. Пусть функция $f[x, y_1, y_2, \ldots, y_n]: [a,b] \times R^n \to R$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и выполняется условие (13). Тогда существует единственное решение задачи типа Коши (6), (8) в пространстве $C_{n-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b]$.

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно доказать существование единственного решения интегрального уравнения (10), которое имеет смысл на любом отрезке $[a, x_1] \subset [a,b]$. Выберем x_1 так, чтобы выполнялось неравенство

$$L\sum_{i=1}^{n} A_i < 1, \tag{14}$$

где $L > 0$ определяется условием (13), а

$$A_k = (x_1 - a)^{\mathrm{Re}(\alpha - \alpha_k - 1)} \frac{\Gamma[\mathrm{Re}(\alpha - \alpha_{k-1})]\Gamma[\mathrm{Re}(\alpha) - n + 1]}{|\Gamma(\alpha - \alpha_{k-1})|\Gamma[1 - \mathrm{Re}(2\alpha - \alpha_{k-1}) - n]},\ k = 1, \ldots, n,$$

и докажем существование единственного решения интегрального уравнения (10) на отрезке $[a, x_1]$.

Для доказательства применим метод последовательных приближений. Пусть

$$y_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)}(x-a)^{\alpha - j}, \tag{15}$$

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f\left[t, y_{m-1}(t), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y_{m-1}\right)(t), \ldots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_{m-1}\right)(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \tag{16}$$

где $m = 1, 2, \ldots$

Из (15) следует, что $y_0(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$. Согласно условиям теоремы и лемме 2, второй член в правой части (16) также принадлежит $C_{n-\alpha}[a,b]$. Действительно, если $\mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\alpha)$, то в силу леммы 2

$$I_{a+}^{\alpha} f \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y(t), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y\right)(t), \ldots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right)(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \in C_{\gamma-\alpha}[a,b],$$

Следовательно, $y_m(x) \in C_{n-\alpha}[a,b] \cap C_{\gamma-\alpha}[a,b] = C_{n-\alpha}[a,b]$. Если же $\mathrm{Re}(\gamma) \le \mathrm{Re}(\alpha)$, то согласно лемме 2 $I_{a+}^{\alpha} f \in C[a,b]$, а значит, $y_m(x) \in C_{n-\alpha}[a,b]$.

Оценим теперь разность $\left\| D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_{m-1} \right\|_{C_{n-\alpha}}$ при $m \in N$ и $k = 1, \ldots, n$. Для этого заметим, что в силу (16), леммы 4, леммы 2 и (9) справедливы соотношения:

$$\left\| D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_0 \right\|_{C_{n-\alpha}} =$$

$$= \left\| D_{a+}^{\alpha_{k-1}} \left(I_{a+}^{\alpha} f\right)\left[x, y_{m-1}(x), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y_{m-1}\right)(x), \ldots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_{m-1}\right)(x)\right] \right\|_{C_{n-\alpha}} =$$

$$= \left\| \left(I_{a+}^{\alpha-\alpha_{k-1}} f\right)\left[x, y_{m-1}(x), \left(D_{a+}^{\alpha_1} y_{m-1}\right)(x), \ldots, \left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_{m-1}\right)(x)\right] \right\|_{C_{n-\alpha}} \le$$

$$\le M_{n-\alpha} (x_1 - a)^{\mathrm{Re}(\alpha - \alpha_{k-1})} \frac{\Gamma\left[\mathrm{Re}(\alpha - \alpha_{k-1})\right] \Gamma\left[\mathrm{Re}(\alpha) - n + 1\right]}{\left|\Gamma(\alpha - \alpha_{k-1})\right| \Gamma\left[1 - \mathrm{Re}(2\alpha - \alpha_{k-1}) - n\right]} = M_{n-\alpha} A_k,$$

где $k = 1, \ldots, n$. Отсюда при $m = 1$ получаем оценку

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_1 - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_0 \right\|_{C_{n-\alpha}} \le M_{n-\alpha} \sum_{i=1}^{n} A_i . \qquad (16)$$

Используя лемму 2, (13) и принимая во внимание (16), имеем:

$$\left\| D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_1 - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_0 \right\|_{C_{n-\alpha}} =$$

$$= \left\| I_{a+}^{\alpha-\alpha_{k-1}} \left(f\left[x, y_1, D_{a+}^{\alpha_1} y_1, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_1\right] - f\left[x, y_0, D_{a+}^{\alpha_1} y_0, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_0\right] \right) \right\|_{C_{n-\alpha}} \le$$

$$\le A_k \left\| f\left[x, y_1, D_{a+}^{\alpha_1} y_1, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_1\right] - f\left[x, y_0, D_{a+}^{\alpha_1} y_0, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_0\right] \right\|_{C_{n-\alpha}} \le$$

$$\le A_k L \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_1 - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_0 \right\|_{C_{n-\alpha}} \right) \le A_k L M_{n-\alpha} \sum_{i=1}^{n} A_i, \; k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_2 - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_1 \right\|_{C_{n-\alpha}} \le M_{n-\alpha} L \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \right)^2 .$$

Повторяя *m* раз такие же оценки, приходим к соотношению

$$\left\| D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_{m-1} \right\|_{C_{n-\alpha}} \le A_k L^{m-1} M_{n-\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \right)^{m-1}, \; k = 1, \ldots, n.$$

В частности, при $k=1$:

$$\left\| y_m - y_{m-1} \right\|_{C_{n-\alpha}} \le A_1 L^{m-1} M_{n-\alpha} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i \right)^{m-1}.$$

Из условия (14) следует, что последовательность $y_m(x)$ сходится к некоторой предельной функции $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, x_1]$:

$$\lim_{m\to\infty} \left\| y_m(t) - y(t) \right\|_{C_{n-\alpha}} = 0, \tag{17}$$

и более того,

$$\lim_{m\to\infty} \left\| D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y \right\|_{C_{n-\alpha}} = 0 \ \ (k = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Согласно лемме 2 и условию (13)

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m\right] - f\left[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m\right]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\|_{C_{n-\alpha}} \le$$

$$\le A_1 L \sum_{i=1}^{n} \left\| D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y_m - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y \right\|_{C_{n-\alpha}},$$

и, следовательно, в силу (18)

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f\left[t, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m\right] - f\left[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m\right]}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right\|_{C_{n-\alpha}} = 0.$$

Отсюда вытекает, что $y(t)$ есть решение уравнения (10) на отрезке $[a, x_1]$.

Покажем, что это решение единственно. Предположим, что существуют два решения $y(t)$ и $Y(t)$ интегрального уравнения (10). В силу леммы 2 эти решения удовлетворяют уравнениям

$$D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y = D_{a+}^{\alpha_{k-1}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha - j} \right) + \left(I_{a+}^{\alpha - \alpha_{k-1}} f \right)\left[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right], \tag{19}$$

где $k = 1, \ldots, n$. Подставляя $y(t)$ и $Y(t)$ в (19), вычитая одно из другого и применяя лемму 4 и условие (13), получим:

$$\left\| D_{a+}^{\alpha_{k-1}} y - D_{a+}^{\alpha_{k-1}} Y \right\|_{C_{n-\alpha}} =$$

$$\left\| I_{a+}^{\alpha - \alpha_{k-1}} \left(f\left[t, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right] - \left[t, Y, D_{a+}^{\alpha_1} Y, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} Y\right] \right) \right\|_{C_{n-\alpha}} \le$$

$$\le A_k L \sum_{i=1}^{n} \left\| D_{a+}^{\alpha_{i-1}} y - D_{a+}^{\alpha_{i-1}} Y \right\|_{C_{n-\alpha}}, \ k = 1, \ldots, n.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n}\left\|D_{a+}^{\alpha_{k-1}}y-D_{a+}^{\alpha_{k-1}}Y\right\|_{C_{n-\alpha}}\le L\sum_{k=1}^{n}A_k\sum_{i=1}^{n}\left\|D_{a+}^{\alpha_{i-1}}y-D_{a+}^{\alpha_{i-1}}Y\right\|_{C_{n-\alpha}}.$$

Следовательно, $L\sum_{k=1}^{n}A_k\ge 1$, что противоречит условию (14).

Таким образом, существует единственное решение $y(x)$ уравнения (10) на отрезке $[a,x_1]$.

Рассмотрим далее отрезок $[x_1,x_2]$, где $x_2=x_1+h$, $h>0$, $x_2\le b$. Уравнение (10) перепишем в виде

$$y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x}\frac{f\left[t,y,D_{a+}^{\alpha_1}y,\ldots,D_{a+}^{\alpha_{n-1}}y\right]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x_1}\frac{f\left[t,y(t),\left(D_{a+}^{\alpha_1}y\right)(t),\ldots,\left(D_{a+}^{\alpha_{n-1}}y\right)(t)\right]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \quad (20)$$

$x\in[x_1,x_2]$.

Так как на отрезке $[a,x_1]$ функция $y(x)$ однозначно определена, последний интеграл можно считать известной функцией и уравнение (20) равносильно уравнению

$$y(x)=y_1(x)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x_1}^{x}\frac{f\left[t,y,D_{a+}^{\alpha_1}y,\ldots,D_{a+}^{\alpha_{n-1}}y\right]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt,$$

где

$$y_1(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}(x-a)^{\alpha-j}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x_1}\frac{f\left[t,y(t),D_{a+}^{\alpha_1}y,\ldots,D_{a+}^{\alpha_{n-1}}y\right]}{(x-t)^{1-\alpha}}dt$$

есть известная функция. Повторяем те же рассуждения на отрезке $[x_1,x_2]$ и получаем единственное решение на этом отрезке. Затем берем следующий отрезок и т.д., пока не получим единственное решение на всем отрезке $[a,b]$.

Таким образом, существует единственное решение $y(x)\in C_{n-\alpha}[a,b]$ уравнения (10), а значит, и задачи типа Коши (6), (8) такое, что равенства (17), (18) выполняются на всем отрезке $[a,b]$.

Теперь покажем, что это решение принадлежит пространству $C_{n-\alpha,\gamma}^{\alpha}[a,b]$. Для этого достаточно показать, что $D_{a+}^{\alpha}y\in C_\gamma[a,b]$.

Если $0\le \mathrm{Re}(\gamma)\le \mathrm{Re}(n-\alpha)$, то используя (6) и (13), имеем:

$$\left\|D_{a+}^{\alpha}y_m-D_{a+}^{\alpha}y\right\|_{C_\gamma}\le (b-a)^{\mathrm{Re}(n-\alpha-\gamma)}\left\|D_{a+}^{\alpha}y_m-D_{a+}^{\alpha}y\right\|_{C_{n-\alpha}}=(b-a)^{\mathrm{Re}(n-\alpha-\gamma)}\cdot$$

$$\cdot\left\|f\left[x,y_m,D_{a+}^{\alpha_1}y_m,\ldots,D_{a+}^{\alpha_{n-1}}y_m\right]-f\left[x,y,D_{a+}^{\alpha_1}y,\ldots,D_{a+}^{\alpha_{n-1}}y\right]\right\|_{C_{n-\alpha}}\le$$

$$(b-a)^{\mathrm{Re}(n-\alpha-\gamma)} L\sum_{i=0}^{n-1}\left\| D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\right\|_{C_{n-\alpha}} \quad \left(D_{a+}^{\alpha_0} y = y\right).$$

Если $\mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(n-\alpha)$, то учитывая (6) и (13), находим:

$$\left\| D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\right\|_{C_\gamma} =$$

$$= \left\| f\left[x, y_m, D_{a+}^{\alpha_1} y_m, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y_m\right] - f\left[x, y, D_{a+}^{\alpha_1} y, \ldots, D_{a+}^{\alpha_{n-1}} y\right]\right\|_{C_\gamma} \le$$

$$\le L\sum_{i=0}^{n-1}\left\| D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\right\|_{C_\gamma} \le L(b-a)^{\mathrm{Re}(\gamma-n+\alpha)}\sum_{i=0}^{n-1}\left\| D_{a+}^{\alpha_i} y_m - D_{a+}^{\alpha_i} y\right\|_{C_{n-\alpha}}.$$

Следовательно,

$$\left\| D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\right\|_{C_\gamma} \le L_1\sum_{i=0}^{n-1}\left\| D_{a+}^{\alpha_i} - D_{a+}^{\alpha_i} y\right\|_{C_{n-\alpha}},$$

где $L_1 > 0$ – некоторая постоянная, и тогда в силу (17) – (18)

$$\lim_{m\to\infty}\left\| D_{a+}^{\alpha} y_m - D_{a+}^{\alpha} y\right\|_{C_\gamma} = 0.$$

Это означает, что $D_{a+}^{\alpha} y \in C_\gamma[a,b]$, что завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.

2. Kilbas, A. A. Differential equations of fractional order: methods, results and problems / A. A. Kilbas, J. J. Trujillo // Applicable Analysis. – 2001. – Vol. 78, № 1. – P. 153–192.

3. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equation of fractional order. Fractals and Fractional calculus in continuum mechanics / R. Gorenflo, F. Mainardi. – Wien ; New Jork : Springer. – 1997. – P. 223–276.

4. Oldham, K. B. The fractional calculus / K. B. Oldham, J. Spanier. – London : Acad. Press, 1974. – 234 p.

5. Килбас, А. А. Дробные интегралы и производные, дифференциальные уравнения дробного порядка в весовых пространствах непрерывных функций / А. А. Килбас, Б. Бонилла, Х. Трухилло // Докл. НАН Беларуси. – 2000. – Т. 44, № 6. – С. 18–22.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.03.2019

***Marzan S.A.* The Existence and Uniqueness of the Cauchy-Type Problem Solution for a Differential Equation of Complex Order in the Weighted Spaces of N-Time Differentiable Functions**

The article examines the Cauchy-type problem for a nonlinear differentiable equation with Riemann – Liouville derivatives of complex orders in the weighted spaces of n-time functions. Using the properties of fractional integrals and Riemann – Liouville derivatives in the weighted spaces of continuous functions, the equivalence of the problem in question is proved by the second-kind Volterra integral equation, and the conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem are obtained.