*Известия вузов. Математика*
*2017, № 2, с. 3–13*
*http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
*e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*С.М. АГЕЕВ, И.А. ЖИГУЛИЧ, З.Н. СИЛАЕВА*

# ИНЪЕКТИВНЫЕ ОБЪЕКТЫ КАТЕГОРИИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

*Аннотация.* Исследуется категория стратифицированных пространств. Установлено существование абсолютных экстензоров категории стратифицированных пространств, изучена их взаимосвязь с экстензорами профильтрованной категории, для чего введены и изучены абсолютные экстензоры, включающие в себя свойства профильтрованной и стратифицированной категорий. Установлены свойства стягиваемости и локальной стягиваемости стратифицированных абсолютных экстензоров. Показано, что семейство стратов стратифицированного абсолютного окрестностного экстензора является равностепенно локально продолжимым.

*Ключевые слова*: профильтрованные пространства и отображения, стратифицированные отображения, абсолютные экстензоры и универсальные пространства категории стратифицированных пространств.

*УДК*: 515.124

**Введение.** Пространства со счетной фильтрацией, состоящей из замкнутых подмножеств, представляют большой интерес в современной топологии. Один из плодотворных подходов к их исследованию состоит в изучении экстензорных свойств категории профильтрованных пространств (или $\mathcal{N}$-категории), объектами которой являются профильтрованные метрические пространства, а морфизмами — профильтрованные отображения (т. е. отображения, сохраняющие фильтрацию). Возникающая на этом пути теория абсолютных экстензоров и ретрактов профильтрованной категории развивает и удачно дополняет классические результаты Милнора о клеточных комплексах и правильно профильтрованных пространствах ([1], с. 255; [2], с. 405). Основы этой теории изложены в работе [3].

Однако в рамках профильтрованной категории принципиально невозможно отслеживать топологические и гомотопические свойства стратов профильтрованных пространств (что во многих ситуациях весьма желательно). Это связано с тем, что профильтрованные отображения, сохраняя инвариантными элементы фильтрации, вообще говоря, не сохраняют страты. Отсюда следует, например, что любой инъективный объект $\mathcal{N}$-категории ($\mathcal{N}$-АЕ-пространство) гомотопически эквивалентен точке, но при этом существуют $\mathcal{N}$-АЕ-пространства с гомотопически нетривиальными стратами. Поэтому возникает потребность в более тонкой теории, которая бы улавливала информацию о стратах и адекватно описывала ситуацию.

Выйти из создавшегося положения можно, если ввести новую категорию ($\mathcal{S}$-категорию), объектами которой по-прежнему являются профильтрованные метрические пространства, а морфизмами — отображения, сохраняющие страты (стратифицированные отображения). Теперь уже ограничение гомотопической эквивалентности этой категории на любой страт

Поступила 27.07.2015

является гомотопической эквивалентностью, а любой страт инъективного объекта $\mathcal{S}$-категории — абсолютным ретрактом. Однако априори неясен ответ на вопрос, насколько обширен запас таких инъективных объектов, а также не ясно, насколько хороши свойства этих объектов.

Главный результат статьи состоит в предъявлении достаточного запаса инъективных объектов $\mathcal{S}$-категории. На самом деле установлен более сильный результат (теорема 2) о том, что не только стратифицированное, но и любое профильтрованное отображение, принимающее значения в $\mathcal{S}$-AE-пространстве, допускает стратифицированное продолжение. В качестве непосредственного следствия этой теоремы получены основные свойства стратифицированных абсолютных экстензоров. В частности, установлена взаимосвязь между $\mathcal{N}$-AE- и $\mathcal{S}$-AE-пространствами (теорема 4), а также изучены другие связностные свойства $\mathcal{S}$-AE-пространств.

Сформулируем в виде гипотезы обобщение на категорию пространств со счетной фильтрацией известной теоремы Торунчика о характеризации гильбертова куба $Q = [-1;1]^\omega$ [4], утверждающей, что *любое компактное метрическое AE-пространство, являющееся универсальным относительно класса метрических компактов, гомеоморфно* $Q$. Для этого введем аналог гильбертова куба в категории профильтрованных пространств. Так как $Q$ гомеоморфно своей счетной степени $Q^\omega$, то на $Q$ можно ввести фильтрацию, положив $\deg \overline{q} = \max\{i \mid q_i \neq \overline{0}\}$, где $\overline{q} = (q_1, q_2, \dots) \in Q^\omega$, а $\overline{0} = (0, 0, \dots) \in Q = [-1;1]^\omega$. Полагаем также $\deg \overline{0} = 1$. Из теоремы 2 следует $Q \in \mathcal{S}$-AE. Кроме того, можно показать, что $Q$ является $\overline{\mathcal{N}}$-универсальным пространством в следующем смысле: для любого $\overline{\mathcal{N}}$-отображения $f : Z \to Q$ из компактного метрического $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $Z$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\mathcal{S}$-вложение $\widetilde{f} : Z \to Q$, что $\operatorname{dist}(f, \widetilde{f}) < \varepsilon$, причем $\operatorname{dist}(f, g)$ — это расстояние между функциями $f$ и $g$. Наша гипотеза (весьма правдоподобная, но сложная и требующая глубокого исследования геометрии счетной фильтрации на $Q$) состоит в том, что *любое компактное метрическое $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $X \in \mathcal{S}$-AE, являющееся $\overline{\mathcal{N}}$-универсальным пространством, $\overline{\mathcal{N}}$-гомеоморфно* $Q$. Отметим, что в случае конечной фильтрации эта гипотеза верна.

**1. Основные понятия и результаты.** *Обобщенным профильтрованным пространством* (или *$\overline{\mathcal{N}}$-пространством*) называется метрическое пространство $X$, в котором выделена последовательность замкнутых подмножеств $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_\infty = X$, называемая *фильтрацией.* При этом объединение $\cup\{X_i \mid i < \infty\}$ является $F_\sigma$-множеством в $X$ и, вообще говоря, не совпадает с $X$. Подмножество $X_i \subset X$ будем называть *$i$-м элементом фильтрации* $\{X_i\}$ пространства $X$, подмножество $X^i \rightleftharpoons X_i \setminus X_{i-1} \subset X$, $i < \infty$, — *$i$-стратом*, а подмножество $X^\infty = X \setminus \bigcup\limits_{i<\infty} X_i$ назовем *$\infty$-стратом* фильтрации $\{X_i\}$.

Для задания фильтрации пространства $X$ достаточно каждой точке $x \in X$ сопоставить ее *степень* $\deg x \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы для любого $i < \infty$ множество $X_i \rightleftharpoons \{x \in X \mid \deg x \leqslant i\}$ — $i$-элемент такой фильтрации — было замкнуто в $X$.

*Степень* произвольного *множества* $M \subset X$ определяется как $\min\{i \mid M \cap X^i \neq \emptyset\}$ и обозначается через $\deg M$. *Степень* $\deg X$ *$\overline{\mathcal{N}}$-пространства* $X$ определяется как $\min\{i \mid X_i \neq \emptyset\}$, при этом $\deg X = \infty$ тогда и только тогда, когда $X = X_\infty$. Поскольку пространства бесконечной степени интереса не вызывают, будем всегда считать, что $\deg X < \infty$.

Фильтрация пространства $X$ называется *тривиальной*, если степень любой его точки совпадает со степенью $X$. Метрическое подпространство $A \subset X$ с индуцированной фильтрацией (т. е. образованной множествами $A_i = A \cap X_i$, $i \in \mathbb{N}$) называется *$\overline{\mathcal{N}}$-подпространством* $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $X$.

Линейное топологическое пространство $L$ с выделенной фильтрацией $\{L_i\}$ будем называть *линейным топологическим* $\overline{\mathcal{N}}$*-пространством*, если каждое $L_i$ является линейным подпространством в $L$.

Непрерывное отображение $f : X \to Y$ $\overline{\mathcal{N}}$-пространств называется

- *профильтрованным* (или $\overline{\mathcal{N}}$*-отображением*), если $f(X_n) \subset Y_n$ для всех $n \geqslant 1$, т. е. если $\deg f(x) \leqslant \deg x$ для всех $x \in X$;
- *стратифицированным* (или $\mathcal{S}$*-отображением*), если $f(X^n) \subset Y^n$ для всех $n \geqslant 1$, т. е. если $\deg f(x) = \deg x$ для любого $x \in X$.

Из определения следует, что точка $x \in X$, имеющая бесконечную степень, при $\overline{\mathcal{N}}$-отображении $f$ может отображаться в любую точку пространства $Y$, а при $\mathcal{S}$-отображении $f$ — только в точку с бесконечной степенью.

*Профильтрованным пространством* (или $\mathcal{N}$*-пространством*) называется метрическое пространство $X$ с такой фильтрацией $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i = X$ (т. е. $X^\infty = \emptyset$).

Очевидно, категория $\mathcal{N}$ является *полной подкатегорией* категории $\overline{\mathcal{N}}$. Построим функтор $F : \overline{\mathcal{N}} \to \mathcal{N}$, правый обратный к вложению $\mathcal{N} \hookrightarrow \overline{\mathcal{N}}$. Для этого $\overline{\mathcal{N}}$-пространству $X$ с фильтрацией $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_\infty$ поставим в соответствие $\mathcal{N}$-подпространство $F(X) \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i<\infty} X_i$ с фильтрацией $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$. Для $\overline{\mathcal{N}}$-отображения $f : X \to Y$ $\overline{\mathcal{N}}$-пространств полагаем отображение $F(f)$ равным ограничению $f$ на $F(X)$.

Рассмотрим понятия, связанные с продолжением морфизмов в категории $\overline{\mathcal{N}}$-пространств. Если для $\overline{\mathcal{N}}$-отображения ($\mathcal{S}$-отображения) $f : A \to Y$, заданного на замкнутом $\overline{\mathcal{N}}$-подпространстве $A$ $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $X$ (и называемого *частичным* $\overline{\mathcal{N}}$*-отображением*), существует такое $\overline{\mathcal{N}}$-отображение ($\mathcal{S}$-отображение) $\widehat{f} : X \to Y$, что $\widehat{f}\restriction_A = f$, то говорят, что $\widehat{f}$ является $\overline{\mathcal{N}}$*-продолжением* ($\mathcal{S}$*-продолжением*) $f$.

Обобщенное профильтрованное пространство $Y$ называется *абсолютным* $\overline{\mathcal{N}}$*-экстензором*, кратко $Y \in \overline{\mathcal{N}}$-AE (*абсолютным окрестностным* $\overline{\mathcal{N}}$*-экстензором*, кратко $Y \in \overline{\mathcal{N}}$-ANE), если для любого метрического $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $X$ и любого его замкнутого $\overline{\mathcal{N}}$-подпространства $A$ любое частичное $\overline{\mathcal{N}}$-отображение $f : A \to Y$ допускает $\overline{\mathcal{N}}$-продолжение $\widehat{f} : X \to Y$ (допускает окрестностное $\overline{\mathcal{N}}$-продолжение $\widehat{f} : U \to Y$). Аналогично вводится понятие $\mathcal{S}$-A[N]E-*пространства* в категории $\mathcal{S}$-пространств. Несложно видеть, что из условия $X \in \mathcal{S}$-A[N]E следует, что в любой окрестности каждой точки $x \in X$ есть точки конечной степени.

Наряду с задачами продолжения $\overline{\mathcal{N}}$-отображений и $\mathcal{S}$-отображений целесообразно ввести задачу о комбинированном продолжении таких отображений. Назовем $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $X$ *стратифицированным абсолютным* $\overline{\mathcal{N}}$*-экстензором* (*стратифицированным абсолютным окрестностным* $\overline{\mathcal{N}}$*-экстензором*), если для любого частичного $\overline{\mathcal{N}}$-отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} X$ существует $\overline{\mathcal{N}}$-продолжение $\psi : Z \to X$ на все пространство $Z$, являющееся стратифицированным на $Z \setminus A$ (существует окрестностное $\overline{\mathcal{N}}$-продолжение $\widehat{f} : U \to X$ на некоторую окрестность $U$ множества $A$ в $Z$, являющееся стратифицированным на $U \setminus A$). Очевидно, любое стратифицированное $\overline{\mathcal{N}}$-A[N]E-пространство $X$ является одновременно $\mathcal{S}$-A[N]E-пространством и $\overline{\mathcal{N}}$-A[N]E-пространством.

Имеет место обобщение теоремы Куратовского–Войдыславского для $\overline{\mathcal{N}}$-пространств, которое утверждает, что *для любого* $\overline{\mathcal{N}}$*-пространства* $X$ *существует линейное нормированное* $\overline{\mathcal{N}}$*-пространство* $Z \in \overline{\mathcal{N}}$*-AE и* $\overline{\mathcal{N}}$*-гомеоморфизм* $h : X \to Y$ *пространства* $X$ *на некоторое замкнутое профильтрованное подмножество* $Y$ *в* $Z$. Доказательство в основном следует рассуждениям из ([3], с. 45), где теорема Куратовского–Войдыславского доказана для $\mathcal{N}$-категории.

Введем понятия произведения и суммы в категории $\overline{\mathcal{N}}$-пространств. Пусть для каждого $k \in \mathbb{N}$ $X_k$ есть $\overline{\mathcal{N}}$-пространство с фильтрацией $(X_k)_1 \subset (X_k)_2 \subset \cdots \subset (X_k)_\infty$ и метрикой $d_k$. Рассмотрим произведение $\Pi = \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$ топологических пространств $X_k$ и введем фильтрацию на $\Pi$ следующим образом. Будем считать степенью точки $x = \{x_k\} \in \Pi$ число $\deg x = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\{\deg x_k\} \in \overline{\mathbb{N}}$. Поскольку пространство $\Pi$ метризуемо, а также множество $\Pi_i \rightleftharpoons \{x \in \Pi \mid \deg x \leqslant i\}$ замкнуто в $\Pi$, то $\Pi$ является $\overline{\mathcal{N}}$-пространством, которое назовем *топологическим произведением $\overline{\mathcal{N}}$-пространств.* Легко показывается, что класс $\overline{\mathcal{N}}$-AE-пространств замкнут относительно счетного произведения $\overline{\mathcal{N}}$-пространств.

В случае, когда $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $X_k$ являются $\mathcal{N}$-пространствами (т. е. $(X_k)^\infty = \emptyset$, $k \in \mathbb{N}$), будем рассматривать $\mathcal{N}$-пространство $F(\Pi) = \{x \in \Pi \mid \deg x < \infty\}$ и называть его *топологическим произведением $\mathcal{N}$-пространств* $X_k$. Несложно видеть, что класс $\mathcal{N}$-AE-пространств замкнут относительно счетного произведения $\mathcal{N}$-пространств.

Пусть дано семейство $\overline{\mathcal{N}}$-отображений $\{f_k : X \to Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Рассмотрим диагональное произведение $f : X \to \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} Y_k$, т. е. $f(x) = \{f_k(x)\}$, $x \in X$. Несложно видеть, что $f$ является $\overline{\mathcal{N}}$-отображением в $\overline{\mathcal{N}}$-произведение $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} Y_k$. Из определения степени точек произведения $\overline{\mathcal{N}}$-пространств вытекают два следствия.

**Следствие 1.** Если хотя бы одно из отображений $f_k$ является стратифицированным, то и диагональное произведение $f$ будет стратифицированным.

**Следствие 2.** Произведение $X = X_1 \times X_2$, в котором $X_1$ является $\overline{\mathcal{N}}$-A[N]E-пространством, а $X_2$ — стратифицированным $\overline{\mathcal{N}}$-A[N]E-пространством, есть стратифицированное $\overline{\mathcal{N}}$-A[N]E-пространство.

Рассмотрим сумму $S$ топологических пространств $X_k$, каждое из которых является $\overline{\mathcal{N}}$-пространством. Полагаем степень точки $x \in S$, где $x \in X_k$, равной степени точки $x$ в $\overline{\mathcal{N}}$-пространстве $X_k$. Поскольку $S$ является метризуемым пространством и $i$-й элемент фильтрации $S_i \rightleftharpoons \{x \in S \mid \deg x \leqslant i\} = \coprod\limits_{k\in\mathbb{N}} (X_k)_i$ замкнут в $S$, то возникает понятие *топологической суммы $\overline{\mathcal{N}}$-пространств.*

Несложное доказательство имеет

**Предложение 1.** *Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ — $\overline{\mathcal{N}}$-пространства, а $d \in \overline{\mathbb{N}}$ — нижний предел $\underline{\lim} \deg X_k$ последовательности $\{\deg X_k\}$. Тогда топологическую сумму $\coprod\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$ можно дополнить одной точкой, скажем $s$, до $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $Z$ таким образом, что $X_k$ содержится в $2^{-k}$-окрестности точки $s$ (которую будем обозначать $N(s; 2^{-k})$) и $\deg s \leqslant d$.*

Полученное таким образом $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $Z = \{s\} \sqcup X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots$ назовем *одноточечным дополнением* топологической суммы $\overline{\mathcal{N}}$-пространств.

Определим понятие гомотопии в $\overline{\mathcal{N}}$-категории. Для этого на отрезке $[0; 1]$ будем рассматривать только тривиальную фильтрацию со степенью любой точки 1. Тогда в произведении $X \times [0; 1]$ $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $X$ с фильтрацией $\{X_i\}$ на отрезок элементом фильтрации является множество $X_i \times [0; 1]$.

Профильтрованные отображения ($\mathcal{S}$-отображения) $f, g : X \to Y$ называются *$\overline{\mathcal{N}}$-гомотопными* (*$\mathcal{S}$-гомотопными*), если существует *$\overline{\mathcal{N}}$-гомотопия* (*$\mathcal{S}$-гомотопия*), связывающая отображение $f$ с $g$, т. е. такое $\overline{\mathcal{N}}$-отображение ($\mathcal{S}$-отображение) $F : X \times [0; 1] \to Y$, что $F_0 = f$ и $F_1 = g$.

Рассмотрим свойства связности в $\mathcal{S}$-категории. Будем говорить, что $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $X$ является *$\mathcal{S}$-стягиваемым*, если существует $\overline{\mathcal{N}}$-гомотопия $H : X \times [0;1] \to X$ такая, что

1) $H_t : X \to X$ есть $\mathcal{S}$-отображение для всех $t < 1$;
2) $H_0 = \mathrm{Id}_X$, $H_1$ переводит $X$ в некоторую точку $x \in X$ (понятно, что $x$ должна лежать в $X_{\deg X}$).

Назовем $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $X$ *локально $\mathcal{S}$-стягиваемым в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $\overline{\mathcal{N}}$-гомотопия $H : U \times [0;1] \to X$ некоторой окрестности $U$ точки $x_0$, что

1) $H_t : U \to X$ есть $\mathcal{S}$-отображение для всех $t < 1$;
2) $H_0 = \mathrm{Id}_U$, $H_1$ переводит $U$ в некоторую точку $x_1 \in X$, $\deg x_1 < \infty$ (понятно, что $x$ должна лежать в $X_{\deg U}$);
3) $\operatorname{diam} H(x_0, [0;1]) \leqslant \varepsilon$.

Обобщенное профильтрованное пространство $X$ называется *локально $\mathcal{S}$-стягиваемым* ($X \in \mathcal{S}$-LC), если оно локально $\mathcal{S}$-стягиваемо в любой своей точке.

**2. Существование стратифицированных абсолютных экстензоров.**

**Определение.** Обобщенное профильтрованное пространство $W$ назовем *$\mathcal{S}$-терминальным*, если для любого $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $X$ существует стратифицированное отображение

$$f : X \to W.$$

**Теорема 1.** *Существует $\mathcal{S}$-терминальное пространство.*

*Доказательство.* Рассмотрим счетное множество $\{A_{ij} \mid i,\, j \in \mathbb{N}\}$, состоящее из различающихся точек, т. е. любые две точки $A_{ij}$, $A_{i'j'}$ этого множества совпадают тогда и только тогда, когда $(i,j) = (i',j')$. Для каждых $i,j \in \mathbb{N}$ рассмотрим $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $\mathrm{Con}_{ij}$, гомеоморфное конусу над точкой $A_{ij}$ с вершиной в точке 0. Тем самым имеем $\mathrm{Con}_{ij} = \{t{\cdot}A_{ij} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0{\cdot}A_{ij} = 0\}$. Будем считать, что для любых точек $A_{ij}$, $A_{i'j'}$ условие $t{\cdot}A_{ij} = t{\cdot}A_{i'j'}$ выполняется тогда и только тогда, когда либо $t = 0$, либо $t \neq 0$ и $(i,j) = (i',j')$. Таким образом, два различных конуса пересекаются только в вершине. Положим

$$\deg(t{\cdot}A_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = 0; \\ j, & \text{если } t > 0. \end{cases}$$

Покажем, что $\overline{\mathcal{N}}$-произведение $W \rightleftharpoons \prod\limits_{i=1}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{\infty} \mathrm{Con}_{ij}$ является искомым $\mathcal{S}$-терминальным пространством. Рассмотрим произвольное метрическое пространство $X$ с ограниченной метрикой $\mathrm{d}$ (без ограничения общности можно считать $\operatorname{diam} X \leqslant 1$).

1) Изучим случай, когда $X$ не имеет изолированных точек.

Из теоремы Стоуна ([5], с. 416) следует, что $X$ имеет $\sigma$-дискретную базу $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$, т. е. состоящую из счетного объединения дискретных семейств $\sigma_i$. Для каждого семейства $\sigma_i$ и для каждого $j$ обозначим через $\sigma_{ij}$ семейство $\{S_\alpha \in \sigma_i \mid \deg S_\alpha = j\}$. Ясно, что $\sigma_i = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \sigma_{ij}$. Через $\cup\sigma_{ij}$ обозначим тело $\cup\{S_\alpha \in \sigma_{ij}\}$ семейства $\sigma_{ij}$.

Так как каждое $\sigma_{ij}$ является открытым дискретным семейством, то для каждых $i,j = 1,2,\ldots$ можно определить непрерывные отображения $g_{ij} : X \to \mathrm{Con}_{ij}$ следующим образом:

$$g_{ij}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \cup\sigma_{ij}; \\ \mathrm{d}(x, X \setminus S_\alpha) \cdot A_{ij}, & \text{если } x \in S_\alpha \in \sigma_{ij}, \end{cases}$$

где $\mathrm{d}(x, A)$ — расстояние от точки $x$ до множества $A$. Заметим, что из определения фильтрации пространства $\mathrm{Con}_{ij}$ вытекает

$$\deg g_{ij}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \notin \cup\sigma_{ij}; \\ j, & \text{если } x \in S_\alpha \in \sigma_{ij}. \end{cases}$$

Покажем, что $g_{ij}$ есть $\overline{\mathcal{N}}$-отображение, т. е. $\deg x \geqslant \deg g_{ij}(x)$ для любого $x \in X$. Действительно, если $x \in S_\alpha \in \sigma_{ij}$, то $\mathrm{d}(x, X \setminus S_\alpha) > 0$ и, следовательно, $\deg g_{ij}(x) = j$. При этом $\deg x \geqslant \deg S_\alpha$ и, кроме того, $\deg S_\alpha = j$, откуда получаем $\deg x \geqslant \deg g_{ij}(x)$. Если же $x \notin \cup\sigma_{ij}$, то $\deg g_{ij}(x) = 1$, а $\deg x \geqslant 1$.

Проверим, что диагональное произведение $\varphi : X \to W$, $\varphi(x) = \{g_{ij}(x) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$, $x \in X$, которое является $\overline{\mathcal{N}}$-отображением, будет искомым $\mathcal{S}$-отображением. Для произвольной точки $x \in X$ с конечной степенью $\deg x = j$ существует такая окрестность $U$, являющаяся элементом базы $\{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $\deg U = j$. Пусть $U \in \sigma_{ij}$, тогда при отображении $g_{ij} : X \to \mathrm{Con}_{ij}$ имеем $\deg g_{ij}(x) = \deg U = \deg x$. Отсюда и из того, что $g_{ij}(x) \neq 0$ и $\deg g_{ij}(x) = j$ для всех $x \in \sigma_{ij}$ вытекает, что $\deg \varphi(x) = \sup\{\deg g_{ij}(x)\}$ совпадает с $j = \deg x$.

Так как точка $x_0 \in X$ с бесконечной степенью — не изолированная точка, то существует такая база окрестностей $U_1 \in \sigma_{i_1 j_1}, U_2 \in \sigma_{i_2 j_2}, \ldots$ в $x_0$, что $\{j_k\} \to \infty$. Тогда $\deg \varphi(x_0) = \sup\{\deg g_{ij}(x_0)\} = \lim\limits_{k\to\infty} \deg g_{i_k j_k}(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} j_k = \infty$, т. е. $\deg \varphi(x_0) = \deg x_0$.

2) В случае, когда $X$ имеет изолированные точки, рассмотрим произведение $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $X$ на отрезок $[0; 1]$. Поскольку $X \times [0; 1]$ не имеет изолированных точек, то существует $\mathcal{S}$-отображение $f : X \times [0; 1] \to W$. Тогда ограничение $f\restriction_{X\times\{0\}} : X \to W$ является искомым $\mathcal{S}$-отображением. □

В работе ([3], с. 50) показано, что пространство $F\Big(\prod\limits_{i,j=1}^{\infty} \mathrm{Con}_{ij}\Big)$ является *универсальным* для $\mathcal{N}$-пространств, т. е. для любого $\mathcal{N}$-пространства $X$ существует $\mathcal{N}$-подпространство $A \subset F\Big(\prod\limits_{i,j=1}^{\infty} \mathrm{Con}_{ij}\Big)$, $\mathcal{N}$-гомеоморфное $X$. Точно так же можно показать, что и пространство $\prod\limits_{i,j=1}^{\infty} \mathrm{Con}_{ij}$ является универсальным, но для $\overline{\mathcal{N}}$-пространств. Оказывается, пространство $\prod\limits_{i,j=1}^{\infty} \mathrm{Con}_{ij}$ тесно связано со стратифицированными экстензорами.

**Теорема 2.** *Пусть $\overline{\mathcal{N}}$-*AE*-пространство $X_i$ является $\mathcal{S}$-терминальным для всех $i \geqslant 1$. Тогда $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $X \rightleftharpoons \prod\limits_{i\geqslant 1} X_i$ является стратифицированным $\overline{\mathcal{N}}$-*AE*-пространством.*

Следствием теоремы 2 является то, что $X \rightleftharpoons \prod\limits_{i\geqslant 1} X_i$ есть $\mathcal{S}$-AE-пространство.

Очевидно, $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $W = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{\infty} \mathrm{Con}_{ij}$ из теоремы 1 $\overline{\mathcal{N}}$-гомеоморфно своей счетной степени $W^\omega$. Поскольку $W$ является также $\mathcal{S}$-терминальным и $\overline{\mathcal{N}}$-AE-пространством (как счетное произведение $\overline{\mathcal{N}}$-AE-пространств), то из теоремы 2 вытекает

**Теорема 3.** *Пространство $W$ является стратифицированным $\overline{\mathcal{N}}$-*AE*-пространством и, следовательно, $\mathcal{S}$-*AE*-пространством.*

*Доказательство теоремы* 2. Без потери общности можно считать, что $\operatorname{diam} X_i \leqslant 1/i$, а метрика $\mathrm{d}$ на $X$ определяется формулой $\mathrm{d}(x, y) = \sup\{\mathrm{d}_i(x_i, y_i)\}$, где $\mathrm{d}_i$ — метрика в $X_i$.

Так как класс $\overline{\mathcal{N}}$-AE-пространств замкнут относительно счетного произведения, то $X \in \overline{\mathcal{N}}$-AE и, следовательно, существует $\overline{\mathcal{N}}$-продолжение $\widehat{\varphi} : Z \to X$ отображения $\varphi$. Для доказательства теоремы достаточно найти такое $\overline{\mathcal{N}}$-отображение $\psi : Z \to X$, что $\psi\!\restriction_A = \widehat{\varphi}\!\restriction_A$ и $\psi\!\restriction_{Z\setminus A}$ есть $\mathcal{S}$-отображение. Так как $A$ замкнуто в $Z$, то возможно выбрать такие последовательности окрестностей $Z = U_0 \Supset U_1 \Supset \cdots$, что $\bigcap\limits_{i\geqslant 0} U_i = A$ ($A \Subset B$ означает, что вложение A$\subset B$ *строгое*, если $\operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Int} B$). Выберем для каждого $i \geqslant 1$ непрерывную функцию $\chi_i : Z \to [0;1]$ такую, что $\chi_i^{-1}(0) \supset Z \setminus U_i$, $\chi_i^{-1}(1) \supset U_{i+1}$. Ясно, что $\chi_i$ есть $\overline{\mathcal{N}}$-отображение.

Представим отображение $\widehat{\varphi} : Z \to X$ в виде диагонального произведения $\prod \widehat{\varphi}_i$, где $\widehat{\varphi}_i : Z \to X_i$ — $\overline{\mathcal{N}}$-отображение. Так как каждое $X_i$ является $\mathcal{S}$-терминальным, то можно выбрать $\mathcal{S}$-отображение $e_i : Z \to X_i$. Далее рассмотрим для каждого $i \geqslant 1$ такое $\overline{\mathcal{N}}$-отображение $h_i : Z\times\{0\}\cup Z\times\{1\} \to X_i$, заданное на замкнутом подмножестве $Z\times[0;1]$, что $h_i\!\restriction_{Z\times\{0\}} = e_i$ и $h_i\!\restriction_{Z\times\{1\}} = \widehat{\varphi}_i$. Так как $X_i \in \overline{\mathcal{N}}$-AE, то существует $\overline{\mathcal{N}}$-продолжение $H_i : Z \times [0;1] \to X_i$ отображения $h_i$, которое является $\overline{\mathcal{N}}$-гомотопией, связывающей $\mathcal{S}$-отображение $e_i : Z \to X_i$ и $\overline{\mathcal{N}}$-отображение $\widehat{\varphi}_i : Z \to X_i$.

Для каждого $n \geqslant 1$ формулой

$$\xi_n = e_1 \times e_2 \times \cdots \times e_{n-1} \times H_n(z, \chi_{n-1}(z)) \times \widehat{\varphi}_{n+1} \times \widehat{\varphi}_{n+2} \times \cdots$$

определим отображение $\xi_n : Z \to X$, которое является стратифицированным в силу следствия 1. Положим

$$\psi_n(z) = \begin{cases} \xi_n(z), & \text{если } z \in U_{i-1} \setminus U_i,\ i \leqslant n; \\ \widehat{\varphi}(z), & \text{если } z \in U_n. \end{cases}$$

Тогда каждое отображение $\psi_n : Z \to X$ непрерывно и является стратифицированным на $Z \setminus U_n$.

Поскольку для любых $m > n$ $\psi_n(z)$ и $\psi_m(z)$ могут отличаться, начиная с $n$-й координаты, то $\mathrm{d}(\psi_n(z), \psi_m(z)) < 1/n$ для всех $z \in Z$. Тем самым последовательность $\{\psi_n\}$ сходится равномерно при $n \to \infty$ к некоторому непрерывному отображению $\psi : Z \to X$, причем $\psi\!\restriction_A = \widehat{\varphi}\!\restriction_A = \varphi\!\restriction_A$. Поскольку вне $U_n$ почти все отображения $\psi_i$ совпадают с $\psi_{n+1}$, то отображение $\psi$ является стратифицированным на дополнении к $A$. $\square$

**3. Некоторые свойства стратифицированных абсолютных экстензоров.** Покажем, что любое $\mathcal{S}$-A[N]E-пространство является $\overline{\mathcal{N}}$-A[N]E-пространством, для чего сначала установим следующий предварительный факт.

**Предложение 2.** *Любое $\overline{\mathcal{N}}$-пространство допускает замкнутое $\mathcal{S}$-вложение в некоторое $\mathcal{S}$-AE-пространство.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $X$. В силу теоремы Куратовского–Войдыславского существует замкнутое топологическое вложение $i : X \to L$ пространства $X$ в некоторое линейное нормированное $\overline{\mathcal{N}}$-AE-пространство $L$, которое будем рассматривать с тривиальной фильтрацией. Тем самым вложение $i : X \to L$ является $\overline{\mathcal{N}}$-отображением. Кроме того, согласно теореме 1 существует $\mathcal{S}$-отображение $f : X \to W$ в $\mathcal{S}$-терминальное пространство $W$, а из теоремы 3 имеем $W \in \mathcal{S}$-AE. Так как $i$ есть замкнутое топологическое вложение и фильтрация пространства $L$ тривиальна, то отображение $i \times f : X \to L \times W$ есть замкнутое топологическое $\mathcal{S}$-вложение в $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $L \times W$. Легко видеть, что пространство $L \times W \in \mathcal{S}$-AE. $\square$

**Замечание.** В силу теоремы 3 пространство $W$ является стратифицированным $\overline{\mathcal{N}}$-AE-пространством. Так как $L \in \overline{\mathcal{N}}$-AE, то из следствия 2 вытекает, что произведение $L \times W$ является стратифицированным $\overline{\mathcal{N}}$-AE-пространством.

**Теорема 4.** *Любое $\mathcal{S}$-A[N]E-пространство $X$ является стратифицированным $\overline{\mathcal{N}}$-A[N]E-пространством (а значит, и $\overline{\mathcal{N}}$-A[N]E-пространством).*

*Доказательство.* Пусть $X \in \mathcal{S}$-AE. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для произвольного частичного $\overline{\mathcal{N}}$-отображения $Y \hookleftarrow A \xrightarrow{f} X$ можно построить $\overline{\mathcal{N}}$-продолжение $\widehat{f} : Y \to X$ на все пространство $Y$, являющееся стратифицированным на $Y \setminus A$. Ввиду предложения 2 существует замкнутое $\mathcal{S}$-вложение $j : X \to L \times W$ в $\mathcal{S}$-AE-пространство $L \times W$, где $W$ — это $\mathcal{S}$-терминальное пространство из теоремы 1, $L$ — линейное нормированное $\overline{\mathcal{N}}$-AE-пространство с тривиальной фильтрацией. Согласно замечанию произведение $L \times W$ является стратифицированным $\overline{\mathcal{N}}$-AE-пространством. Следовательно, $\overline{\mathcal{N}}$-отображение $\varphi = j \circ f : A \to L \times W$ можно непрерывно продолжить до $\overline{\mathcal{N}}$-отображения $\widehat{\varphi} : Y \to L \times W$, являющегося стратифицированным на $Y \setminus A$. Так как пространство $X \in \mathcal{S}$-AE, то существует $\mathcal{S}$-ретракция $r : L \times W \to X$, т. е. $r\restriction_X = \mathrm{Id}$. Тогда $\overline{\mathcal{N}}$-отображение $\widehat{f} = r \circ \widehat{\varphi} : Y \to X$ есть искомое $\overline{\mathcal{N}}$-продолжение $f$, являющееся стратифицированным на $Y \setminus A$.

Случай $\mathcal{S}$-ANE-пространства разбирается аналогично. □

Рассмотрим теперь произвольное $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $X \in \mathcal{S}$-AE и такое частичное $\overline{\mathcal{N}}$-отображение $h : X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \to X$, что $h\restriction_{X\times\{0\}} = \mathrm{Id}$ и $h\restriction_{X\times\{1\}} = x_0$, где $x_0 \in X_{\deg X}$. Из теоремы 4 следует, что существует $\overline{\mathcal{N}}$-продолжение $H : X \times [0;1] \to X$ отображения $h$, являющееся стратифицированным на $X \times (0;1)$. Очевидно, $H$ есть $\overline{\mathcal{N}}$-гомотопия, удовлетворяющая всем условиям $\mathcal{S}$-стягиваемости $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $X$. Таким образом, доказана

**Теорема 5.** *Любое $\mathcal{S}$-AE-пространство является $\mathcal{S}$-стягиваемым.*

Установим локальный вариант этой теоремы.

**Теорема 6.** *Любое $\mathcal{S}$-ANE пространство $X$ является $\mathcal{S}$-LC-пространством.*

*Доказательство.* Предположим противное: $X$ не является локально $\mathcal{S}$-стягиваемым в точке $x_0 \in X$. Поскольку $X \in \mathcal{S}$-ANE, то в любой окрестности точки $x_0$ есть точки конечной степени, т. е. $x_0$ есть предел некоторой последовательности $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in X$, $\deg x_k < \infty$. Можно считать, что $\deg x_1 \leqslant \deg x_2 \leqslant \deg x_3 \leqslant \cdots$.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим окрестность $U_k$ точки $x_0$ с индуцированной фильтрацией, $\operatorname{diam} U_k < 2^{-k}$, и положим $U'_k = U_k \cap X_{\deg x_0}$, если $\deg x_0 < \infty$, и $U'_k = U_k$, если $\deg x_0 = \infty$. Можно считать, что $x_k \in U'_k$. Кроме того, для каждого $k \in \mathbb{N}$ введем $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $Z'_k \rightleftharpoons U'_k \times [2^{-2k+1}; 2^{-2k+2}]$ и его замкнутое $\overline{\mathcal{N}}$-подпространство $A'_k \rightleftharpoons U'_k \times \{2^{-2k+1}; 2^{-2k+2}\}$.

Поскольку $X \notin \mathcal{S}$-LC в точке $x_0$, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любой окрестности $U$ точки $x_0$ не существует $\overline{\mathcal{N}}$-гомотопии $H : U \times [0;1] \to X$, удовлетворяющей условиям 1)–3) из определения локально $\mathcal{S}$-стягиваемого пространства. Так как $\operatorname{diam} U'_k < 2^{-k} < \varepsilon_0$ почти для всех $k$, то частичное $\overline{\mathcal{N}}$-отображение $Z'_k \hookleftarrow A'_k \xrightarrow{\varphi_k} X$, заданное формулами $\varphi_k\restriction_{U'_k\times\{2^{-2k+1}\}} = \mathrm{Id}$, $\varphi_k\restriction_{U'_k\times\{2^{-2k+2}\}} = x_k$, не имеет $\overline{\mathcal{N}}$-продолжения $\overline{\varphi}_k : Z'_k \to X$, являющегося стратифицированным на $Z'_k \setminus A'_k$ и удовлетворяющего условию $\operatorname{diam} \overline{\varphi}_k(Z'_k) < \varepsilon_0$. Заметим, что $\deg x_0 = \varliminf \deg Z'_k$. Действительно, если $\deg x_0 < \infty$, то $\varliminf \deg Z'_k = \varliminf \deg U'_k = \deg x_0$, если же $\deg x_0 = \infty$, то $\varliminf \deg Z'_k = \varliminf \deg U'_k = \varliminf \deg x_k = \deg x_0 = \infty$.

В силу предложения 1 можно рассмотреть одноточечное дополнение $Z = \left(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} Z'_k\right) \sqcup \{x_0\}$ топологической суммы $\overline{\mathcal{N}}$-пространств $Z'_k$ со степенью точки $x_0$, совпадающей со степенью $x_0$ в $X$. Полученное пространство $Z$ является метрическим $\overline{\mathcal{N}}$-пространством, причем

$$Z'_k \subset N(x_0; 2^{-k}).$$

Определим отображение $\Phi : A \to X$, заданное на замкнутом $\overline{\mathcal{N}}$-подпространстве $A = \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A'_k\right) \sqcup \{x_0\}$ $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $Z$ следующим образом:

$$\Phi(a) = \begin{cases} \varphi_k(a), & \text{если } a \in A'_k,\ k = 1, 2, \dots ; \\ x_0, & \text{если } a = x_0. \end{cases}$$

Непрерывность отображения $\Phi$ в точке $x_0$ вытекает из условия

$$\operatorname{diam} \varphi_k(A'_k) \leqslant \operatorname{diam} U'_k < 2^{-k}.$$

Ясно, что $\Phi$ является частичным $\overline{\mathcal{N}}$-отображением, принимающим значения в $\mathcal{S}$-ANE-пространстве $X$. Из теоремы 4 следует, что существует окрестностное $\overline{\mathcal{N}}$-продолжение $\widehat{\Phi} : V \to X$ на некоторую окрестность $V$ множества $A$ в $Z$, причем $\widehat{\Phi}\restriction_{V \setminus A}$ есть $\mathcal{S}$-отображение и $\widehat{\Phi}(V) \subset N(x_0; \varepsilon_0)$.

Так как $Z'_k \subset N(x_0; 2^{-k})$, то для всех $k$, начиная с некоторого номера, множество $Z'_k \subset V$. Очевидно, ограничение $\overline{\varphi}_k = \widehat{\Phi}\restriction_{Z'_k} : Z'_k \to \widehat{\Phi}(V) \subset X$ будет $\overline{\mathcal{N}}$-продолжением отображения $\varphi_k$ на все пространство $Z'_k$, являющимся стратифицированным на $Z'_k \setminus A$ и удовлетворяющим условию $\operatorname{diam} \overline{\varphi}_k(Z'_k) < \varepsilon_0$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Назовем семейство $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ подмножеств метрического пространства $Y$ *равностепенно локально продолжимым* ($\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \text{equi-LAE}$), если $\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i = Y$ и для любой точки $y \in Y$ и ее окрестности $U$ существует такая окрестность $V \subset U$, $y \in V$, что для любого замкнутого подпространства $A$ метрического пространства $Z$ любое непрерывное отображение $f : A \to Y_m \cap V$ непрерывно продолжается до отображения $\widehat{f} : Z \to Y_m \cap U$.

**Теорема 7.** *Если семейство $\{X_n\}_{n \in \overline{\mathbb{N}}}$ образует фильтрацию $\mathcal{S}$-ANE-пространства $X$, то семейство стратов $\{X^n\}_{n \in \overline{\mathbb{N}}} \in \text{equi-LAE}$.*

*Доказательство.* Предположим противное: существуют точка $x_0 \in X$ и ее окрестность $U$ такая, что для любой окрестности $V_k$ точки $x_0$, $V_k \subset U$, $\operatorname{diam} V_k < 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$, существует непрерывное отображение $Z'_k \hookleftarrow A'_k \xrightarrow{\varphi_k} X^{m_k} \cap V_k$, определенное на замкнутом подпространстве $A'_k$ некоторого метрического пространства $Z'_k$ и не имеющее продолжения $\overline{\varphi}_k : Z'_k \to X^{m_k} \cap U$. Можно считать, что $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$.

Введем тривиальную фильтрацию на $Z'_k$, положив $\deg z = m_k$ для $z \in Z'_k$, и рассмотрим топологическую сумму $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} Z'_k$ $\overline{\mathcal{N}}$-пространств. Заметим, что $\deg x_0 \leqslant \varliminf_{k\to\infty} m_k = \infty$. В силу предложения 1 существует такая точка $s_0$ и такое $\overline{\mathcal{N}}$-пространство $Z = \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} Z'_k\right) \sqcup \{s_0\}$, что

$$Z'_k \subset N(s_0; 2^{-k}) \quad \text{и} \quad \deg s_0 = \deg x_0.$$

Определим отображение $\Phi : A \to U$, заданное на замкнутом $\overline{\mathcal{N}}$-подпространстве $A = \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A'_k\right) \sqcup \{s_0\}$ $\overline{\mathcal{N}}$-пространства $Z$ следующим образом:

$$\Phi(a) = \begin{cases} \varphi_k(a), & \text{если } a \in A'_k,\ k = 1, 2, \dots ; \\ x_0, & \text{если } a = s_0. \end{cases}$$

Непрерывность $\Phi$ в точке $s_0$ следует из условия $Z'_k \subset N(s_0; 2^{-k})$.

Для любой точки $a \in A$, где $a \in A'_k$, имеем $\deg a = m_k$ и $\Phi(a) = \varphi_k(a) \in X^{m_k}$. Кроме того, $\deg \Phi(s_0) = \deg x_0 = \deg s_0$. Следовательно, $\Phi$ является частичным $\mathcal{S}$-отображением, принимающим значения в $\mathcal{S}$-ANE-пространстве $X$, поэтому существует окрестностное

$\mathcal{S}$-продолжение $\widehat{\Phi} : W \to X$ на некоторую окрестность $W$ множества $A$ в $Z$. Так как $Z'_k \subset N(s_0; 2^{-k})$, то для всех $k$, начиная с некоторого номера, множество $Z'_k \subset W$. Так как отображение $\widehat{\Phi}$ является стратифицированным, то ограничение $\overline{\varphi}_k = \widehat{\Phi}\restriction_{Z'_k} : Z'_k \to X$ принимает значения из множества $X^{m_k} \cap U$ и, следовательно, является продолжением отображения $\varphi_k$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

## Литература


[1] Бордман Дж., Фогт Р. *Гомотопически инвариантные алгебраические структуры на топологических пространствах* (Наука, М., 1995).

[2] Постников М. М. *Лекции по алгебраической гомотопии. Основы теории гомотопий* (Наука, М., 1984).

[3] Силаева З.Н. *Экстензорные свойства пространств с фильтрациями*, Дисс. … канд. физ.-матем. наук (Минск, 2011, Ин-т матем. НАН РБ).

[4] Torunczyk H. *On CE images of the Hilbert cube and characterization of Q-manifolds*, Fund. Math. **106** (1), 31–40 (1980).

[5] Энгелькинг Р. *Общая топология* (Мир, М., 1986).



*С.М. Агеев*

*Белорусский государственный университет,*
*просп. Независимости, д. 4, г. Минск, 220030, Республика Беларусь,*

`e-mail:` ageev_sergei@inbox.ru

*И.А. Жигулич*

*Белорусский государственный университет,*
*просп. Независимости, д. 4, г. Минск, 220030, Республика Беларусь,*

`e-mail:` irina.zhigulich@gmail.com

*З.Н. Силаева*

*Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина,*
*бульвар Космонавтов, д. 21, г. Брест, 224016, Республика Беларусь,*

`e-mail:` szn2006@yandex.ru

*S.M. Ageev, I.A. Zhigulich, and Z.N. Silaeva*


**Injective objects of the category of stratified spaces**


*Abstract.* We investigate the category of stratified spaces. We establish the existence of absolute extensors of the category of stratified spaces and determine its correlation with absolute extensors of the category of filtered spaces. For this purpose we introduce and investigate absolute extensors including properties of the filtered category and the stratified category. We determine the properties of contractibility and local contractibility of stratified absolute extensors. It is shown the family of strata of stratified absolute extensors has the property of equicontinuous local extensibility.



*Keywords*: spaces with filtration, filtered and stratified maps, absolute extensors and universal spaces of the category of stratified spaces.

*S.M. Ageev*

*Belarusian State University,*
*4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030 Republic of Belarus,*

`e-mail:` ageev_sergei@inbox.ru

*I.A. Zhigulich*

*Belarusian State University,*
*4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030 Republic of Belarus,*

`e-mail:` irina.zhigulich@gmail.com

*Z.N. Silayeva*

*A.S. Pushkin Brest State University,*
*21 Kosmonavtov blvd., Brest, 224016 Republic of Belarus,*

`e-mail:` szn2006@yandex.ru