УДК 519.21

И.Н. Боднарчук

канд. физ.-мат. наук, ведущий инженер-математик научно-исследовательской лаборатории «Дифференциальные уравнения и их применение в механике» Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

e-mail: ibodnarchuk@univ.kiev.ua

АСИМПТОТИКА МЯГКОГО РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ МЕРОЙ

Исследованы задачи Коши для волнового уравнения с общей стохастической мерой в двух случаях: уравнение задано (1) на прямой и (2) на плоскости. Доказано, что мягкие решения задач стремятся к нулю при неограниченном возрастании абсолютной величины пространственной переменной.

Введение

Пусть X – произвольное множество, $B(X)$ – σ-алгебра подмножеств X; $L_0(\Omega,F,P)$ – множество вещественнозначных случайных величин, определенных на полном вероятностном пространстве $L_0(\Omega,F,P)$. Сходимость в $L_0(\Omega,F,P)$ – это сходимость по вероятности. Пусть также μ – стохастическая мера на $B(X)$, т.е. σ – аддитивное отображение $\mu: B(X)\to L_0(\Omega,F,P)$. В [1] такая μ называется общей стохастической мерой. Мы не накладываем на меру μ никаких дополнительных условий, кроме σ-аддитивности.

Рассматриваем следующую задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(t), \\ u(0,x)=u_0(x); \qquad \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

где $(t,x)\in[0,T]\times R^d$, $d=1,2$, $T>0$, $a>0$ и μ – стохастическая мера, определенная на борелевской σ-алгебре $B([0,T])$.

Мы исследуем мягкое решение задачи (1), т.е. такую измеримую случайную функцию $u(t,x)=u(t,x,\omega):[0,T]\times R^d\times\Omega\to R$, что

$$u(t,x)=\int_{R^d} S_d(t,x-y)v_0(y)dy + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{R^d} S_d(t,x-y)u_0(y)dy\right)+$$
$$+\int_0^t ds\int_{R^d} S_d(t-s,x-y)f(s,y,u(s,y))dy + \int_{(0,t]} d\mu(s)\int_{R^d} S_d(t-s,x-y)\sigma(s,y)dy, \tag{2}$$

где $S_d(t,x)$ – фундаментальное решение однородного волнового уравнения:

$$S_1(t,x)=\frac{1}{2a}\mathrm{I}_{\{|x|<at\}}, \quad S_2(t,x)=\frac{1}{2a\pi\sqrt{a^2t^2-|x|^2}}\mathrm{I}_{\{|x|<at\}},$$

где I_A – индикатор множества A, $|\cdot|$ – евклидова норма.

Интегралы от случайных функций по dy и ds берутся для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$. Определение и свойства интегралов по стохастическим мерам представлены в [1; 2].

Мягкие решения уравнений со стохастическими мерами исследованы, например, в работах [3–6]. В [3] доказано существование и единственность мягкого решения (2) для $d = 1$, а также получена непрерывность по Гельдеру его траекторий по временной и пространственной переменным, установлена непрерывная зависимость решения от данных задачи. Аналогичная задача для $d = 2$ исследована в [4].

Асимптотическое поведение мягких решений уравнений теплопроводности со стохастическими мерами рассмотрено в [7–9]. В публикациях [10–11] изучена асимптотика решений волновых уравнений с белым шумом.

Цель данной работы – показать, что при определенных условиях мягкое решение задачи Коши (1) стремится к нулю при неограниченном возрастании абсолютной величины пространственной переменной.

Дополнительные сведения

Рассмотрим пространство Бесова $B_{22}^{\alpha}([b,c]), \alpha \in (1/2, 1)$, т.е. пространство функций $g:[b,c] \to R$, для которых конечной является норма

$$\|g\|_{B_{22}^{\alpha}([b,c])} = \|g\|_{L_2([b,c])} + \left(\int_0^{c-b} (w_2(g,r))^2 r^{-2\alpha-1} dr \right)^{1/2},$$

где

$$w_2(g,r) = \sup_{0 \le h \le r} \left(\int_b^{c-h} | g(s+h) - g(s) |^2 \, ds \right)^{1/2}.$$

Для произвольных $n \ge 1, 1 \le k \le 2^n$ положим $\Delta_{kn}^{(t)} = ((k-1)2^{-n}t, k2^{-n}t]$. Пусть функция $g(z,s): Z \times [0,t] \to R$ такова, что для некоторого $\alpha \in (1/2, 1)$ и для любого $z \in Z$: $g(z,\cdot) \in B_{22}^{\alpha}([0,t])$. Здесь Z – произвольное множество. Обозначим

$$g_n(z,s) = g(z,0)\mathrm{I}_{\{0\}}(s) + \sum_{1 \le k \le 2^n} g(z,(k-1)2^{-n}t)\mathrm{I}_{\Delta_{kn}^{(t)}}(s).$$

Тогда, согласно [5] (лемма 3), случайная функция

$$\eta(z) = \int_{(0,t]} g(z,s) d\mu(s), \quad z \in Z,$$

имеет такую модификацию

$$\widetilde{\eta}(z) = \int_{(0,t]} g_0(z,s) d\mu(s) + \sum_{n \ge 1} \left(\int_{(0,t]} g_n(z,s) d\mu(s) - \int_{(0,t]} g_{n-1}(z,s) d\mu(s) \right), \tag{3}$$

что для всех $\omega \in \Omega$, $z \in Z$ справедлива оценка

$$\left|\widetilde{\eta}(z)\right| \le \left|g(z,0)\mu((0,t])\right| +$$

$$+\left\{\sum_{n\ge 1}2^{n(2\alpha-1)}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|g\left(z,k2^{-n}t\right)-g\left(z,(k-1)2^{-n}t\right)\right|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{n\ge 1}2^{-n(2\alpha-1)}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right)\right|^2\right\}^{1/2}.$$

Определение модификации случайной функции представлено, например, в [12, с. 21]. Тогда, согласно [13] (теорема 1.2):

$$\left|\widetilde{\eta}(z)\right|\le\left|g(z,0)\mu((0,t])\right|+C\left\|g(z,\cdot)\right\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])}\left\{\sum_{n\ge 1}2^{-n(2\alpha-1)}\sum_{1\le k\le 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right)\right|^2\right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Отметим, что константа C зависит от α, t и не зависит от z, ω.

Волновое уравнение на прямой

При $d=1$ уравнение (2) принимает вид

$$u(t,x)=\frac{1}{2}\left(u_0(x+at)-u_0(x-at)\right)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}v_0(y)dy+\frac{1}{2a}\int_0^t ds\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}f(s,y,u(s,y))dy+$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{(0,t]}d\mu(s)\int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)dy. \tag{5}$$

Будем рассматривать следующие предположения.

А1.1. Функции $u_0(y)=u_0(y,\omega):R\times\Omega\to R$ и $v_0(y)=v_0(y,\omega):R\times\Omega\to R$ измеримы и ограничены: $|u_0(y)|\le C(\omega)$, $|v_0(y)|\le C(\omega)$.

А1.2. Функция $u_0(y)$ непрерывна по Гельдеру:

$|u_0(y_1)-u_0(y_2)|\le C(\omega)|y_1-y_2|^{\beta(u_0)},\quad 0<\beta(u_0)\le 1$.

А1.3. $f(s,y,v):[0,T]\times R\times R\to R$ измерима и ограничена: $|f(s,y,v)|\le C$.

А1.4. $f(s,y,v)$ липшицева по $v\in R$:

$|f(s,y,v_1)-f(s,y,v_2)|\le C|v_1-v_2|$.

А1.5. $\sigma(s,y):[0,T]\times R\to R$ измерима и ограничена: $|\sigma(s,y)|\le C$.

А1.6. $\sigma(s,y)$ непрерывна по Гельдеру:

$|\sigma(s_1,y_1)-\sigma(s_2,y_2)|\le C\left(|s_1-s_2|^{\beta(\sigma)}+|y_1-y_2|^{\beta(\sigma)}\right),\quad 1/2<\beta(\sigma)\le 1$.

А1.7. $|u_0(y)|\to 0$, $|v_0(y)|\to 0$, $\sup\limits_{s\in[0,T],\,v\in R}|f(s,y,v)|\to 0$, $\sup\limits_{s\in[0,T]}|\sigma(s,y)|\to 0$ при $|y|\to\infty$.

Здесь и далее будем обозначать через C и $C(\omega)$ константы, которые могут быть разными в разных формулах, и точное значение которых не существенно.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения А1.1.–А1.7. Тогда существует такая модификация решения уравнения (5), что для любых фиксированных* $t\in[0,T]$, $\omega\in\Omega$ *имеет место сходимость*

$$|u(t,x)|\to 0,\quad |x|\to\infty.$$

Доказательство. Согласно [3] (теорема 2.1), если выполнены предположения А1.1–А1.6, то для всех $t\in[0,T], x\in R$ уравнение (5) имеет единственное решение $u(t,x)$. Для этого решения имеем

$$|u(t,x)|\le \frac{1}{2}|u_0(x+at)-u_0(x-at)|+\frac{1}{2a}\left|\int\limits_{x-at}^{x+at} v_0(y)dy\right|+\frac{1}{2a}\left|\int\limits_0^t ds\int\limits_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))dy\right|+$$

$$+\frac{1}{2a}\left|\int\limits_{(0,t]} d\mu(s)\int\limits_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)dy\right|\le \frac{1}{2}\left|I_1(t,x)\right|+\frac{1}{2a}\left|I_2(t,x)\right|+\frac{1}{2a}\left|I_3(t,x)\right|+\frac{1}{2a}\left|I_4(t,x)\right|.$$

Рассмотрим стохастический интеграл $\left|I_4(t,x)\right|=\int\limits_{(0,t]} q(t,x,s)d\mu(s)$. Пусть $t\in[0,T],\, x\in R$ фиксированы. Тогда случайная функция $\varphi(z)=I_4(t,x),\, z=(t,x)$ имеет модификацию (3), для которой справедливо неравенство (4). Рассмотрим составные его правой части. Для произвольного $s\le t$ оценим $|q(t,x,s)|$.

Согласно предположению A1.7, имеем, что для любого $\varepsilon_0>0$ существует такое число $\delta_0>0$, что $\forall |y|>\delta_0$:

$$|u_0(y)|<\varepsilon_0,\quad |v_0(y)|<\varepsilon_0,\quad \sup_{s\in[0,T],\, v\in R}|f(s,y,v)|<\varepsilon_0,\quad \sup_{s\in[0,T]}|\sigma(s,y)|<\varepsilon_0. \tag{6}$$

Тогда $\forall\, s\le t, \forall |x|>\delta_0+aT$ по теореме о среднем существует такая точка $y_0\in[x-a(t-s),\, x+a(t-s)]$, что

$$|q(t,x,s)|=\left|\int\limits_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)dy\right|=2a(t-s)|\sigma(s,y_0)|\le 2aT\sup_{s\in[0,T]}|\sigma(s,y_0)|<2aT\varepsilon_0=C\varepsilon_0\,, \tag{7}$$

где мы применили теорему о трех последовательностях и A1.7.

Таким образом,

$$|q(t,x,0)|<C\varepsilon_0,\quad \left\|q(t,x,0)\right\|_{L_2([0,t])}=\left(\int\limits_0^t |q(t,x,s)|^2\,ds\right)^{1/2}<C\varepsilon_0\,.$$

Далее оценим норму $\left\|q(t,x,\cdot)\right\|_{B_{22}^{\alpha}([0,t])}$. Для этого рассмотрим величину $|q(t,x,s+h)-q(t,x,s)|$. Согласно A1.5 – A1.6, имеем

$$|q(t,x,s+h)-q(t,x,s)|=\left|\int\limits_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)}\sigma(s+h,y)dy-\int\limits_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)dy\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{x-a(t-s-h)}^{x+a(t-s-h)}\big(\sigma(s+h,y)-\sigma(s,y)\big)dy-\int\limits_{x-a(t-s)}^{x-a(t-s-h)}\sigma(s,y)dy-\int\limits_{x+a(t-s-h)}^{x+a(t-s)}\sigma(s,y)dy\right|\le$$

$$\le Ch^{\beta(\sigma)}2a(t-s-h)+2C2ah\le Ch^{\beta(\sigma)}\,.$$

Следовательно,

$$w_2(q(t,x,\cdot),r)=\sup_{0\le h\le r}\left(\int\limits_0^t |q(t,x,s+h)-q(t,x,s)|^2\,ds\right)^{1/2}\le Cr^{\beta(\sigma)}\sqrt{t}\le Cr^{\beta(\sigma)}\,. \tag{8}$$

С другой стороны, за (7) для $s+h\le t$:

$$|q(t,x,s+h)-q(t,x,s)|\le|q(t,x,s+h)|+|q(t,x,s)|<C\varepsilon_0\ ,$$

и поэтому

$$w_2(q(t,x,\cdot),r)<C\varepsilon_0\sqrt{t}\le C\varepsilon_0\ . \tag{9}$$

Перемножим неравенства (8) и (9), возведенные в степени θ и $1-\theta$ соответственно, где $\theta\in(0,1)$ – произвольное. Имеем

$$w_2(q(t,x,\cdot),r)<Cr^{\theta\beta(\sigma)}\varepsilon_0^{1-\theta}\ .$$

Тогда существует такое $\alpha<\theta\beta(\sigma)$, что

$$\|q(t,x,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])}<C\varepsilon_0+C\varepsilon_0^{1-\theta}\left(\int\limits_0^t r^{2\theta\beta(\sigma)-2\alpha-1}dr\right)^{1/2}\le C\left(\varepsilon_0\vee\varepsilon_0^{1-\theta}\right),$$

где $a\vee b$ – максимум чисел a и b.

Таким образом,

$$\left|I_4(t,x)\right|<C\left(\varepsilon_0\vee\varepsilon_0^{1-\theta}\right)\left(\left|\mu((0,t])\right|+\left\{\sum_{n\ge1}2^{-n(2\alpha-1)}\sum_{1\le k\le2^n}\left|\mu\left(\Delta^{(t)}_{kn}\right)\right|^2\right\}^{1/2}\right)\le C(\omega)\left(\varepsilon_0\vee\varepsilon_0^{1-\theta}\right),$$

где в последнем неравенстве мы использовали [6] (лемма 3.1).

Кроме того, для любого $|x|>\delta_0+aT$, согласно (6) и A1.1,

$$\left|I_1(t,x)\right|=|u_0(x+at)-u_0(x-at)|<2\varepsilon_0\ ,$$

и аналогично доказательству неравенства (7) устанавливаем оценку

$$\left|I_2(t,x)\right|=2at\,|v_0(y_1)|<C\varepsilon_0\ ,$$

для произвольного $|x|>\delta_0+aT$ и некоторого $y_1\in[x-at,x+at]$.

Также аналогично получаем, что для любого $|x|>\delta_0+aT$

$$\left|I_3(t,x)\right|\le\sup_{s\in[0,T],\,v\in R}|f(s,y,v)|\int\limits_0^t 2a(t-s)ds<\varepsilon_0 at^2\le C\varepsilon_0\ .$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ положим в (6) $\varepsilon_0=\varepsilon C^{-1}(\omega)$ при $\varepsilon\ge1$ и $\varepsilon_0=\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}C^{-1}(\omega)$ при $\varepsilon<1$. Таким образом, существует такое множество $\Omega_0\subset\Omega,\ P(\Omega_0)=1$, что для любых фиксированных $t\in[0,T],\ \omega\in\Omega_0$:

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\,\delta=\delta_0+aT\quad\forall\,|x|>\delta:\quad|u(t,x)|<\varepsilon\ .$$

Теорема доказана.

Волновое уравнение на плоскости

Рассмотрим теперь случай $d=2$. Положим для $x\in R^2$ и $r>0$: $B(x,r)=\left\{y\in R^2:|x-y|<r\right\}$ – шар в R^2, $\overline{B}(x,r)$ – его замыкание.

Уравнение (2) принимает следующий вид

$$u(t,x)=\frac{1}{2a\pi}\int\limits_{B(x,at)}\frac{v_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}dy+\frac{1}{2a\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{B(x,at)}\frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}dy\right)+$$

$$+\frac{1}{2a\pi}\int\limits_0^t ds\int\limits_{B(x,a(t-s))}\frac{f(s,y,u(s,y))}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dy+$$

$$+\frac{1}{2a\pi}\int\limits_{(0,t]}d\mu(s)\int\limits_{B(x,a(t-s))}\frac{\sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dy. \qquad (10)$$

Будем рассматривать следующие предположения.

А2.1. Функции $u_0(y)=u_0(y,\omega):R^2\times\Omega\to R$ и $v_0(y)=v_0(y,\omega):R^2\times\Omega\to R$ измеримы и ограничены: $|u_0(y)|\le C(\omega)$, $|v_0(y)|\le C(\omega)$.

А2.2. $v_0(y), u_0(y), \dfrac{\partial u_0(y)}{\partial y_i}, i=1,2,$ непрерывны по Гельдеру:

$|v_0(y')-v_0(y'')|\le C(\omega)|y'-y''|^{\beta(v_0)},\quad 0<\beta(v_0)\le 1$;

$|u_0(y')-u_0(y'')|\le C(\omega)|y'-y''|^{\beta(u_0)},\quad 0<\beta(u_0)\le 1$;

$\left|\dfrac{\partial u_0}{\partial y_i}(y')-\dfrac{\partial u_0}{\partial y_i}(y'')\right|\le C(\omega)|y'-y''|^{\beta(u_0)}$.

А2.3. $f(s,y,v):[0,T]\times R^2\times R\to R$ измерима и ограничена: $|f(s,y,v)|\le C$.

А2.4. $f(s,y,v)$ липшицева по $y\in R^2, v\in R$:

$|f(s,y',v')-f(s,y'',v'')|\le C\big(|y'-y''|+|v'-v''|\big)$.

А2.5. $\sigma(s,y):[0,T]\times R^2\to R$ измерима и ограничена: $|\sigma(s,y)|\le C$.

А2.6. $\sigma(s,y)$ непрерывна по Гельдеру:

$|\sigma(s',y')-\sigma(s'',y'')|\le C\big(|s'-s''|^{\beta(\sigma)}+|y'-y''|^{\beta(\sigma)}\big),\quad 1/2<\beta(\sigma)\le 1$.

А2.7. $|u_0(y)|\to 0$, $\left|\dfrac{\partial u_0}{\partial y_i}(y)\right|\to 0$, $|v_0(y)|\to 0$, $\sup\limits_{s\in[0,T],\,v\in R}|f(s,y,v)|\to 0$, $\sup\limits_{s\in[0,T]}|\sigma(s,y)|\to 0$ при $|y|\to\infty$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения А2.1.–А2.7. Тогда существует такая модификация решения уравнения (10), что для любых фиксированных $t\in[0,T]$, $\omega\in\Omega$ имеет место сходимость*

$|u(t,x)|\to 0,\quad |x|\to\infty.$

Доказательство. Согласно [4] (теорема 2.1), если выполнены предположения А1.1–А1.6, то для всех $t\in[0,T], x\in R^2$ уравнение (10) имеет единственное решение $u(t,x)$. Для этого решения

$$|u(t,x)|=\frac{1}{2a\pi}\left|\int\limits_{B(x,at)}\frac{v_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}dy\right|+\frac{1}{2a\pi}\left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{B(x,at)}\frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2-|x-y|^2}}dy\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{2a\pi}\left|\int\limits_0^t ds\int\limits_{B(x,a(t-s))}\frac{f(s,y,u(s,y))}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}dy\right|+$$

$$+\frac{1}{2a\pi}\left|\int\limits_{(0,t]} d\mu(s) \int\limits_{B(x,a(t-s))} \frac{\sigma(s,y)}{\sqrt{a^2(t-s)^2-|x-y|^2}}\, dy\right| =$$

$$=\frac{1}{2a\pi}\left|J_1(t,x)\right|+\frac{1}{2a\pi}\left|J_2(t,x)\right|+\frac{1}{2a\pi}\left|J_3(t,x)\right|+\frac{1}{2a\pi}\left|J_4(t,x)\right|. \tag{11}$$

Аналогично доказательству теоремы 1, рассмотрим стохастический интеграл $J_4(t,x)=\int\limits_{(0,t]}\hat{q}(t,x,s)d\mu(s)$. Пусть $t\in[0,T],\, x\in R^2$ фиксированы. Тогда случайная функция $\psi(z)=J_4(t,x),\, z=(t,x)$ имеет модификацию (3), для которой справедливо неравенство (4). Для произвольного $s\le t$ оценим $|\hat{q}(t,x,s)|$.

Согласно с А2.7, имеем, что $\forall\, \varepsilon_*>0 \quad \exists\, \delta_*>0 \quad \forall\, |y|>\delta_*$:

$$|u_0(y)|<\varepsilon_*,\ \left|\frac{\partial u_0}{\partial y_i}(y)\right|<\varepsilon_*,\ |v_0(y)|<\varepsilon_*,\ \sup_{s\in[0,T],\, v\in R}|f(s,y,v)|<\varepsilon_*,\ \sup_{s\in[0,T]}|\sigma(s,y)|<\varepsilon_*. \tag{12}$$

Тогда, выполнив в интеграле $\hat{q}(t,x,s)$ замену переменных

$$\begin{matrix} y_1 = x_1 - r(t-s)\cos\varphi \\ y_2 = x_2 - r(t-s)\sin\varphi \end{matrix},\quad r\in(0,2\pi),\, \varphi\in(0,a),$$

получаем

$$\hat{q}(t,x,s)=(t-s)\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a \frac{\sigma(s,x_1-r(t-s)\cos\varphi,\, x_2-r(t-s)\sin\varphi)}{\sqrt{a^2-r^2}}\, rdr\,.$$

Теперь выполняем замену $v=\sqrt{a^2-r^2}$:

$$\left|\hat{q}(t,x,s)\right|=(t-s)\left|\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a \sigma(s,x_1-\sqrt{a^2-v^2}\,(t-s)\cos\varphi,\, x_2-\sqrt{a^2-v^2}\,(t-s)\sin\varphi)\, dv\right| =$$

$$=2a\pi(t-s)\,|\sigma(s,y_*)|\le 2a\pi T\sup_{s\in[0,T]}|\sigma(s,y_*)|<2a\pi T\varepsilon_*\le C\varepsilon_*, \tag{13}$$

где $y_*\in\overline{B}(x,a(t-s)),\, |x|>\delta_*+aT$. Мы применили теорему о среднем, теорему о трех последовательностях и неравенство (12).

Следовательно,

$$|\hat{q}(t,x,0)|<C\varepsilon_*,\quad \left\|\hat{q}(t,x,0)\right\|_{L_2([0,t])}=\left(\int\limits_0^t|\hat{q}(t,x,s)|^2\, ds\right)^{1/2}<C\varepsilon_*\,.$$

Оценим норму $\left\|\hat{q}(t,x,\cdot)\right\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])}$. В силу А2.5 – А2.6 имеем

$$|\hat{q}(t,x,s+h)-\hat{q}(t,x,s)|=$$

$$=\left|(t-s-h)\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^a\sigma(s,x_1-\sqrt{a^2-v^2}\,(t-s-h)\cos\phi,\, x_2-\sqrt{a^2-v^2}\,(t-s-h)\sin\phi)\, dv-\right.$$

$$\left.-(t-s)\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^a\sigma(s,x_1-\sqrt{a^2-v^2}\,(t-s)\cos\phi,\, x_2-\sqrt{a^2-v^2}\,(t-s)\sin\phi)\, dv\right|\le$$

$$\leq C2a\pi th + Ch^{\beta(\sigma)}(t-s)\frac{a^2\pi^2}{2} \leq Ch^{\beta(\sigma)} .$$

Далее, аналогично доказательству теоремы 1 получаем

$$\|\hat{q}(t,x,\cdot)\|_{B^{\alpha}_{22}([0,t])} < C\varepsilon_* + C\varepsilon_*^{1-\rho}\left(\int_0^t r^{2\rho\beta(\sigma)-2\alpha-1}dr\right)^{1/2} \leq C\left(\varepsilon_* \vee \varepsilon_*^{1-\rho}\right),$$

где $\rho \in (0,1)$ – произвольное, и найдется соответствующее $\alpha < \rho\beta(\sigma)$.

Таким образом,

$$|J_4(t,x)| < C\left(\varepsilon_* \vee \varepsilon_*^{1-\rho}\right)\left(|\mu((0,t])| + \left\{\sum_{n\geq 1} 2^{-n(2\alpha-1)} \sum_{1\leq k\leq 2^n}\left|\mu\left(\Delta_{kn}^{(t)}\right)\right|^2\right\}^{1/2}\right) \leq C(\omega)\left(\varepsilon_* \vee \varepsilon_*^{1-\rho}\right),$$

где в последнем неравенстве мы также использовали [6] (лемма 3.1).

Теперь рассмотрим остальные слагаемые (11). Аналогично (13) получаем

$$|J_1(t,x)| = t\left|\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a v_0(x_1 - \sqrt{a^2-v^2}\,t\cos\varphi, x_2 - \sqrt{a^2-v^2}\,t\sin\varphi)\,dv\right| = 2a\pi t\,|\,v_0(y_{**}) < C\varepsilon_* ,$$

где y_{**} – элемент множества $\overline{B}(x, a(t-s))$, а $|\,x\,| > \delta_* + aT$.

Рассмотрим $J_2(t,x)$. В [4] при доказательстве теоремы 2.1 было получено следующее. Поскольку

$$\int_{B(x,at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2 - |\,x-y\,|^2}}dy = t\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a u_0(x_1 - \sqrt{a^2-v^2}\,t\cos\varphi, x_2 - \sqrt{a^2-v^2}\,t\sin\varphi)dv,$$

то

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{B(x,at)} \frac{u_0(y)}{\sqrt{a^2t^2 - |\,x-y\,|^2}}dy\right) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a u_0(x_1 - \sqrt{a^2-v^2}\,t\cos\varphi, x_2 - \sqrt{a^2-v^2}\,t\sin\varphi)\,dv +$$

$$+\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{\partial u_0}{\partial t}(x_1 - \sqrt{a^2-v^2}\,t\cos\varphi, x_2 - \sqrt{a^2-v^2}\,t\sin\varphi)\,dv .$$

Поэтому, аналогично предыдущему, $\forall\,|\,x\,| > \delta_* + aT$:

$$|J_2(t,x)| < C\varepsilon_* \text{ , а также } |J_3(t,x)| < C\varepsilon_* .$$

Для любого $\varepsilon > 0$ положим в (6) $\varepsilon_* = \varepsilon C^{-1}(\omega)$ при $\varepsilon \geq 1$, и $\varepsilon_* = \varepsilon^{\frac{1}{1-\rho}} C^{-1}(\omega)$ при $\varepsilon < 1$. Тогда существует множество $\Omega_* \subset \Omega$, $P(\Omega_*) = 1$ такое, что для любых фиксированных $t \in [0,T]$, $\omega \in \Omega_*$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta_* + aT \quad \forall\,|\,x\,| > \delta: \quad |\,u(t,x)\,| < \varepsilon .$$

Теорема доказана.

Заключение

Рассмотрено мягкое решение задачи Коши для волнового уравнения, управляемого общей стохастической мерой. Доказано, что при определенных условиях решение стремится к нулю, если абсолютная величина пространственной переменной стремится к бесконечности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kwapień, S. Random Seriesand Stochastic Integrals: Single and Multiple / S. Kwapień, W. A. Woyczyński. – Boston : Birkhäuser, 1992. – 360 p.

2. Радченко, В. Н. Интегралы по общим случайным мерам / В. Н. Радченко // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – 1999. – Т. 27. – 196 с.

3. Bodnarchuk, I. M. Wave equation with a stochastic measure / I. M. Bodnarchuk // Theory Probab. Math. Statist. – 2017. – Vol. 94. – P. 1–16.

4. Боднарчук, И. Н. Волновое уравнение на плоскости, управляемое общей стохастической мерой / И. Н. Боднарчук, В. Н. Радченко // Теория вероятности. Мат. статистика. – 2018. – Вып. 1 (98). – С. 70–86.

5. Radchenko, V. M. Evolution equations driven by general stochastic measures in Hilbert space / V. M. Radchenko // Theory Probab. Appl. – 2015. – Vol. 59. – P. 328–339.

6. Radchenko, V. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V. Radchenko // Studia Math. – 2009. – Vol. 194, № 3. – P. 231–251.

7. Боднарчук, И. Н. Асимптотическое поведение решения уравнения теплопроводности со стохастической мерой / И. Н. Боднарчук, В. Н. Радченко // Науч. вестн. Черновиц. ун-та. Математика. – 2012. – Т. 2, № 1. – С. 7–11.

8. Боднарчук, И. Асимптотическое поведение мягкого решения стохастического уравнения теплопроводности / И. Боднарчук // Вестн. Киев. ун-та. Математика и механика. – 2016. – Вып. 2 (36). – С. 40–42.

9. Радченко, В. Н. Асимптотическое поведение решения уравнения теплопроводности со стохастической мерой при $|t| \to \infty$ / В. Н. Радченко // Науч. вестн. Ужгород. ун-та. – 2012. – Вып. 23, № 1. – С. 119–124.

10. Yang, M. Asymptotic behavior of solutions for random wave equations with nonlinear damping and white noise / M. Yang, J. Duan, P. Kloeden // Nonlinear Anal. RWA. – 2011. – Vol. 12, № 1. – P. 464–478.

11. Chen, L. Moment bounds and asymptotics for the stochastic wave equation / L. Chen, R. C. Dalang // Stoch. Process. Appl. – 2015. – Vol. 125. – P. 1605–1628.

12. Theory of Stochastic Processes: With Applications to Financial Mathematics and Risk Theory / D. Gusak [et al.] // Problem Books in Mathematics. – New York : Springer Science & Business Media, 2010. – 376 p.

13. Kamont, A. A discrete characterization of Besov spaces / A. Kamont // Approx. Theory Appl. – 1997. – Vol. 13, № 2. – P. 63–77.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.08.2018

Bodnarchuk I.M. **Asymptotics of the Mild Solution for the Wave Equation with a Stochastic Measure**

The Cauchy problem for the wave equation with a general stochastic measure is investigated in two cases: the equation is given (1) on the line and (2) on the plane. We prove that the mild solutions tend to zero as the spatial variable tends to infinity.