УДК 539.12

Я.А. Войнова[1], *О.В. Веко*[2], *Е.М. Овсиюк*[3]
[1]*учитель физики Качищанской средней школы Ельского района*
[2]*учитель физики гимназии г. Калинковичи*
[3]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. общей физики и методики преподавания физики Мозырского государственного университета имени И.П. Шамякина*
e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru

ВЕКТОРНАЯ ЧАСТИЦА С ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬЮ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ, НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Квантово-механическое уравнение для частицы со спином 1 и дополнительной электромагнитной характеристикой – поляризуемостью исследуется в присутствии внешнего кулоновского поля. Из 15-мерной релятивистской теории в тензорной форме Прока следует соответствующее нерелятивистское уравнение для 3-мерной волновой функции. Задача разделения переменных в присутствии внешнего кулоновского поля решается сначала для 15-мерного релятивистского уравнения. В найденной системе из 15 радиальных уравнений с использованием диагонализации оператора пространственной инверсии проведено расщепление на две подсистемы – по 5 и 10 уравнений соответственно. Релятивистская радиальная система из 5 уравнений сводится к уравнению, известному в теории обычной скалярной частицы во внешнем кулоновском поле, при этом поляризуемость никак не проявляет себя в спектре энергий. В радиальной подсистеме из 10 уравнений выполнено нерелятивистское приближение, в результате получена система из двух зацепляющихся уравнений 2-го порядка для двух функций, из которой выведено радиальное дифференциальное уравнение 4-го порядка. Уравнение имеет две нерегулярные особые точки – $r = 0$ *и* $r = \infty$ *ранга 3. Отдельно рассмотрен случай минимального значения* $j = 0$ *сохраняющегося полного момента, при этом в нерелятивистском приближении система описывается одним уравнением второго порядка с двумя нерегулярными особыми точками* $r = 0$ *и* $r = \infty$ *ранга 2. Построены формальные решения Фробениуса выведенных радиальных уравнений 2-го и 4-го порядков, указаны те решения, которые моли бы описывать связанные состояния в системе.*

Введение

Известны релятивистские уравнения для скалярных и векторных частиц с дополнительной электромагнитной характеристикой – поляризуемостью [1–9]; для описания таких частиц необходимо использовать 15-компонетные волновые функции. Уравнение для векторной частицы было решено в случае присутствия внешнего однородного магнитного поля [8]. В случае внешнего кулоновского поля анализ для релятивистской векторной частицы оказывается очень сложным, даже в отсутствии поляризуемости задача все еще не решена полностью. При этом известны решения уравнения для обычной векторной частицы в кулоновском поле в нерелятивистском пределе.

В настоящей работе исследуется нерелятивистская задача для частицы со спином 1 и поляризуемостью во внешнем кулоновском поле. Из 15-мерной релятивистской теории в тензорной форме Прока выведено соответствующее нерелятивистское уравнение для 3-мерной волновой функции. Задача разделения переменных в присутствии внешнего кулоновского поля решается для 15-мерного релятивистского уравнения, при этом используется тетрадный формализм и аппарат функций Вигнера. В найденной системе из 15 радиальных уравнений с использованием диагонализации оператора пространственной инверсии проведено расщепление на две подсистемы – по 5 и 10 уравнений соответственно. Система из 5 уравнений сводится к уравнению, известному в теории обычной скалярной частицы во внешнем кулоновском поле, при этом поляризуемость никак не проявляет себя в спектре энергий. В радиальной системе из 10 уравнений выполнено нерелятивистское приближение, в результате найдена система из двух зацепляющихся уравнений 2-го порядка для двух функций, из которой следует дифференциальное уравнение 4-го порядка, это уравнение имеет две нерегулярные особые точки $r=0$ и $r=\infty$ ранга 3. Отдельно рассмотрен случай минимального значения $j=0$ сохраняющегося полного момента, при этом в нерелятивистском приближении задача сводится к одному уравнению второго уравнения с двумя нерегулярными особыми точками $r=0$ и $r=\infty$ ранга 2. Построены формальные решения Фробениуса выведенных уравнений 2-го и 4-го порядков, в них выделены те, которые могли бы описывать связанные состояния системы.

1. Нерелятивистский предел для частицы с поляризуемостью

Будем исходить из обобщенной системы уравнений Прока для векторной частицы с поляризуемостью [10] (используем обозначение $\mu = e\sigma/m^2$)

$$i\mu D_b\left(\frac{1}{2}F^{kl}\Phi_{kl}\right) + D^a\Phi_{ba} = m\Phi_b\,, \quad D_a\Phi_b - D_b\Phi_a = m\Phi_{ab}\,. \tag{1.1}$$

Совершим в (1.1) переход к нерелятивистскому пределу. Для этого проведем в уравнениях расщепление (3+1):

$$\begin{gathered} i\mu D_0\left(F^{0l}\Phi_{0l} + \frac{1}{2}F^{lk}\Phi_{lk}\right) + D^l\Phi_{0l} = m\Phi_0\,, \\ i\mu D_n\left(F^{0l}\Phi_{0l} + \frac{1}{2}F^{lk}\Phi_{lk}\right) + D_0\Phi_{n0} + D^l\Phi_{nl} = m\Phi_n\,, \\ D_0\Phi_l - D_l\Phi_0 = m\Phi_{0l}\,, \qquad D_l\Phi_k - D_k\Phi_l = m\Phi_{lk}\,. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Затем исключим поля Φ_0, Φ_{lk}:

$$m\Phi_n = -D_0\Phi_{0n} + \frac{1}{m}\left(-D^lD_l\Phi_n + D^lD_n\Phi_l\right) + i\mu D_n\left(F^{0l}\Phi_{0l} + \frac{1}{m}F^{lk}D_l\Phi_k\right), \tag{1.3a}$$

$$m\Phi_{0n} = D_0\Phi_n - \frac{1}{m}D_n\,D^l\Phi_{0l} - i\frac{\mu}{m}D_nD_0\left(F^{0l}\Phi_{0l} + \frac{1}{m}F^{lk}D_l\Phi_k\right). \tag{1.3b}$$

Вводим большую Ψ_n и малую ψ_n компоненты:

$$\Phi_n = \Psi_n + \psi_n, \quad i\Phi_{0n} = \Psi_n - \psi_k\,,$$

Из (1.3) получаем уравнения для функций Ψ_n, ψ_n:

$$\begin{gathered} 2m\Psi_n = 2iD_0\Psi_n + \frac{1}{m}\left[-D^lD_l(\Psi_n+\psi_n) + D^lD_n(\Psi_l+\psi_l)\right] - \frac{1}{m}D_nD^l(\Psi_l-\psi_l) + \\ +\mu D_n\left[F^{0l}(\Psi_l-\psi_l) + \frac{i}{m}F^{lk}D_l(\Psi_k+\psi_k)\right] - \\ - i\frac{\mu}{m}D_nD_0\left[F^{0l}(\Psi_l-\psi_l) + \frac{i}{m}F^{lk}D_l(\Psi_k+\psi_k)\right], \end{gathered} \tag{1.4a}$$

$$2m\psi_n = -2iD_0\psi_n + \frac{1}{m}\left[-D^lD_l(\Psi_n+\psi_n) + D^lD_n(\Psi_l+\psi_l)\right] + \frac{1}{m}D_nD^l(\Psi_l-\psi_l) +$$

$$+\mu D_n\left[F^{0l}(\Psi_l-\psi_l)+\frac{i}{m}F^{lk}D_l(\Psi_k+\psi_k)\right]+$$

$$+i\frac{\mu}{m}D_nD_0\left[F^{0l}(\Psi_l-\psi_l)+\frac{i}{m}F^{lk}D_l(\Psi_k+\psi_k)\right]. \qquad (1.4b)$$

В уравнениях (1.4) совершим формальную замену $iD_0\Rightarrow(iD_0+m)$, отвечающую выделению энергии покоя; одновременно будем пренебрегать малой компонентой $\psi_n(x)$ в сравнении с большой $\Psi_n(x)$; кроме того, пренебрежем членом $iD_0\psi_n(x)$ по сравнению с $m\Psi_n$. В результате получим

$$0=2iD_0\Psi_n+\frac{1}{m}\left[-D^lD_l\Psi_n+(D^lD_n-D_nD^l)\Psi_l\right]-$$

$$-\frac{\mu}{m}D_niD_0\left(F^{0l}\Psi_l+\frac{i}{m}F^{lk}D_l\Psi_k\right), \qquad (1.5a)$$

$$4m\psi_n=+\frac{1}{m}\left[-D^lD_l\Psi_n+(D^lD_n+D_nD^l)\Psi_l\right]+$$

$$+2\mu D_n\left(F^{0l}\Psi_l+\frac{i}{m}F^{lk}D_l\Psi_k\right)+i\frac{\mu}{m}D_nD_0\left(F^{0l}\Psi_l+\frac{i}{m}F^{lk}D_l\Psi_k\right). \qquad (1.5b)$$

Уравнение ($1.5a$) представляет собой уравнение для большой компоненты $\Psi_k(x)$ векторной частицы с поляризуемостью; уравнение ($1.5b$) позволяет вычислить малую компоненту $\psi_k(x)$ по известной большой. Таким образом, нерелятивистское уравнение для частицы с поляризуемостью имеет вид

$$iD_0\Psi_n=\frac{1}{2m}\left(D^lD_l\Psi_n-[D_l,D_n]_-\Psi^l\right)+\frac{\mu}{2m}D_niD_0\left(F^{0l}\Psi_l+\frac{i}{m}F^{lk}D_l\Psi_k\right). \qquad (1.6)$$

В отсутствие магнитного поля уравнения уравнение (1.6) упрощается

$$iD_0\Psi_n=\frac{1}{2m}\partial^l\partial_l\Psi_n+\frac{\mu}{2m}\partial_niD_0\left(F^{0l}\Psi_l\right). \qquad (1.7)$$

2. Матричное представление релятивистского уравнения, тетрадный формализм

Разделение переменных удобно выполнить в релятивистском матричном волновом уравнении. Для простоты сначала рассматриваем свободный случай, внешнее кулоновское поле учтем в радиальной системе уравнений. Исходное уравнение для 15-компонентной волновой функции частицы в матричном представлении имеет вид [10]

$$(\Gamma^a\partial_a-m)\Psi=0\,,\quad \Psi=\begin{vmatrix}C\\C_l\\\Phi_l\\\Phi_{mn}\end{vmatrix},\quad \Gamma^a=\begin{vmatrix}0&G^a&0&0\\0&0&0&K^a\\\sigma\Delta^a&0&0&K^a\\0&0&\Lambda^a&0\end{vmatrix}, \qquad (2.1)$$

где используются блочные матрицы размерностью 1×4, 4×1, 4×6 и 6×4 соответственно:

$$(G^a)_{(0)}^{\ k}=g^{ak}\,,\qquad(\Delta^a)^{(0)}_{\ n}=\delta^a_n\,,$$

$$(K_a)_n^{\ kl} = -g^{ak}\ \delta_n^l + g^{al}\ \delta_n^k\,, \qquad (\Lambda^a)^k_{\ nb} = \delta_n^a\ \delta_b^k - \delta_n^k\ \delta_b^a\,; \tag{2.2}$$

σ – вещественный параметр.

В соответствии с тетрадным подходом, матричное 15-мерное уравнение (2.1)–(2.2) обобщается на псевдориманово пространство-время с метрикой $g_{\alpha\beta}(x)$ и какой-либо сопутствующей ей тетрадой $e^{\alpha}_{(a)}(x)$ следующим образом [10]:

$$[\ \Gamma^{\alpha}(x)\,(\partial_{\alpha} + B_{\alpha}(x)) - m\ ]\,\Psi(x) = 0\,, \tag{2.3}$$

где

$$\Gamma^{\alpha}(x) = \Gamma^{a} e^{\alpha}_{(a)}(x)\,, \qquad B_{\alpha}(x) = \frac{1}{2} J^{ab} e^{\beta}_{(a)} \nabla_{\alpha}(e_{(b)\beta})\,. \tag{2.4}$$

Воспользуемся этим представлением уравнения (2.3) в пространстве Минковского в сферических координатах [11]:

$$\left(\Gamma^0 \partial_0 + \Gamma^3 \partial_r + \frac{\Gamma^1 J^{31} + \Gamma^2 J^{32}}{r} + \frac{1}{r} \Sigma_{\theta,\phi} - m \right) \Psi(x) = 0\,, \tag{2.5}$$

$$\Sigma_{\theta,\phi} = \Gamma^1 \partial_{\theta} + \Gamma^2 \frac{\partial_{\phi} + \cos\theta J^{12}}{\sin\theta}\,.$$

Потребуется явный вид матриц Γ^a. Исходя из определений (2.2), для блочных матриц G^a, Δ^a, Λ^a, K^a находим

$$G^0 = (+1,0,0,0)\,,\ G^1 = (0,-1,0,0)\,,\ G^2 = (0,0,-1,0)\,,\ G^3 = (0,0,0,-1)\,,$$

$$\Delta^0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta^1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta^2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Delta^3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$\Lambda^0 = \begin{vmatrix} 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Lambda^1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Lambda^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \Lambda^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$K^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad K^1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$K^2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad K^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (2.6)$$

Введем обозначения

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_1^{\,t} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{e}_2^{\,t} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{e}_3^{\,t} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$\tau_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (2.7)$$

Тогда выражения для блочных матриц могут быть записаны в виде

$$\Delta^0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad G^0 = (1,0,0,0), \quad \Lambda^0 = \begin{vmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad K^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -I & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta^i = \begin{vmatrix} 0 \\ \vec{e}_i^{\,t} \end{vmatrix}, \quad G^i = \begin{vmatrix} 0 & -\vec{e}_i \end{vmatrix}, \quad \Lambda^i = \begin{vmatrix} -\vec{e}_i^{\,t} & 0 \\ \vec{0}^{\,t} & \tau_i \end{vmatrix}, \quad K^i = \begin{vmatrix} \vec{e}_i & \vec{0} \\ 0 & \tau_i \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем потребуется также явный вид генераторов рассматриваемого набора полей и явный вид оператора полного момента в сферической тетраде и циклическом базисе:

$$J_1 = l_1 + \frac{\cos\phi}{\sin\theta} S_3, \qquad J_2 = l_2 + \frac{\sin\phi}{\sin\theta} S_3, \qquad J_3 = l_3,$$

$$\vec{J}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta\, \partial_\theta + \frac{-\partial_\phi^2 + 2\, i\, \partial_\phi\, S_3 \cos\theta + S_3^2}{\sin^2\theta}, \qquad (2.8)$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_3 = -i \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \qquad (2.9)$$

В этом базисе матрица S_3 диагональна. Потребуются также выражения для векторов $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_i^{\,t}$ в циклическом базисе

$$\vec{e}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{e}_2 = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{e}_3 = (0,1,0),$$

$$\vec{e}_1^{\,t} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}, \quad \vec{e}_2^{\,t} = \begin{vmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}, \quad \vec{e}_3^{\,t} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}. \tag{2.10}$$

3. Разделение переменных, радиальные уравнения

Дальше все формулы и соотношения будут относиться к сферической тетраде и циклическому базису. Находим наиболее общий вид 15-компонентной волновой функции с квантовыми числами $\varepsilon,\ j,\ m$:

$$\Psi(x) = \left\{C(x), C_0(x), \vec{C}(x), \Phi_0(x), \vec{\Phi}(x), \vec{E}(x), \vec{H}(x)\right\}. \tag{3.1}$$

Здесь для отдельных компонент волновой функции должны быть взяты подстановки:

$$C(x) = e^{-i\varepsilon t}\, C(r)\, D_0\,,\ \ C_0(x) = e^{-i\varepsilon t}\, C_0(r)\, D_0\,,\ \ \Phi_0(x) = e^{-i\varepsilon t}\, \Phi_0(x)\, D_0\,,$$

$$\vec{C}(x) = e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} C_1(r)\, D_{-1} \\ C_2(r)\, D_0 \\ C_3(r)\, D_{+1} \end{vmatrix}, \quad \vec{\Phi}(x) = e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} \Phi_1(r)\, D_{-1} \\ \Phi_2(r)\, D_0 \\ \Phi_3(r)\, D_{+1} \end{vmatrix},$$

$$\vec{E}(x) = e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} E_1(r)\, D_{-1} \\ E_2(r)\, D_0 \\ E_3(r)\, D_{+1} \end{vmatrix}, \quad \vec{H}(x) = e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} H_1(r)\, D_{-1} \\ H_2(r)\, D_0 \\ H_3(r)\, D_{+1} \end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

Будут использованы известные рекуррентные соотношения для функций Вигнера [11]:

$$\partial_\theta D_{-1} = (1/2)(aD_{-2} - \nu D_0)\,, \quad \frac{-m + \cos\theta}{\sin\theta} D_{-1} = (1/2)(-aD_{-2} - \nu D_0)\,,$$

$$\partial_\theta D_0 = (1/2)(\nu D_{-1} - \nu D_{+1})\,, \quad \frac{-m}{\sin\theta} D_0 = (1/2)(-\nu D_{-1} - \nu D_{+1})\,,$$

$$\partial_\theta D_{+1} = (1/2)(\nu D_0 - aD_{+2})\,, \quad \frac{-m - \cos\theta}{\sin\theta} D_{+1} = (1/2)(-\nu D_0 - aD_{+2})\,, \tag{3.3}$$

где

$$\nu = \sqrt{j(j+1)}\,; \quad a = \sqrt{(j-1)(j+2)}\,.$$

Учитывая в уравнении (2.5) блочную структуру всех входящих в него величин, после необходимых вычислений получаем уравнения (используем обозначение $\nu = \sqrt{j(j+1)}/\sqrt{2}$; рядом с радиальными уравнениями приведены также соответствующие тензорные уравнения):

$$\underline{\partial^a\, C_a = m\, C}\,, \quad -i\,\varepsilon\, C_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) C_2 - \frac{\nu}{r}(C_1 + C_3) = m\, C\,; \tag{3.4a}$$

$$\underline{\partial^a\, \Phi_{ba} = m\, C_a}\,,$$

$$-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2-\frac{\nu}{r}(E_1+E_3)=m\,C_0\,,\quad +i\,\varepsilon\,E_1+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+i\frac{\nu}{r}H_2=m\,C_1\,,$$

$$+i\,\varepsilon\,E_2-i\frac{\nu}{r}(H_1-H_3)=m\,C_2\,,\quad +i\,\varepsilon\,E_3-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_3-i\frac{\nu}{r}H_2=m\,C_3\,; \qquad (3.4b)$$

$$\underline{\sigma\,\partial_a\,C+\partial^a\,\Phi_{ba}=m\,\Phi_a}\,,$$

$$-i\,\varepsilon\,\sigma C\;-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2-\frac{\nu}{r}(E_1+E_3)=m\,\Phi_0\,,$$

$$+i\,\varepsilon\,E_1\;+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+i\frac{\nu}{r}H_2-\sigma\frac{\nu}{r}C=m\Phi_1\,,$$

$$+i\,\varepsilon\,E_2\;+\sigma\frac{d}{dr}C-i\frac{\nu}{r}(H_1-H_3)=m\,\Phi_2\,,$$

$$+i\,\varepsilon\,E_3\;-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_3-i\frac{\nu}{r}H_2-\sigma\frac{\nu}{r}C=m\,\Phi_3\,; \qquad (3.4c)$$

$$\underline{\partial_a\Phi_b-\partial_b\Phi_a=m\,\Phi_{ab}}\,,$$

$$-i\,\varepsilon\,\Phi_1\;+\frac{\nu}{r}\Phi_0=m\,E_1\,,\quad -i\,\varepsilon\,\Phi_2\;-\frac{d}{dr}\Phi_0=m\,E_2\,,\quad -i\,\varepsilon\,\Phi_3\;+\frac{\nu}{r}\Phi_0=m\,E_3\,,$$

$$-\;i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1-i\frac{\nu}{r}\Phi_2=m\,H_1\,,\quad +i\frac{\nu}{r}(\Phi_1-\Phi_3)=m\,H_2\,,$$

$$+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_3+i\frac{\nu}{r}\Phi_2=m\,H_3. \qquad (3.4d)$$

Одновременно с операторами $\vec{J}^{\,2}$, J_3 будем диагонализировать оператор пространственной инверсии Π. В представлении декартовой тетрады и декартового базиса матриц Γ^a этот оператор имеет обычный вид

$$\widehat{\Pi}=\left|\begin{array}{ccccccc}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&-I&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&-I&0&0\\0&0&0&0&0&-I&0\\0&0&0&0&0&0&+I\end{array}\right|\widehat{P}\,,\quad \widehat{P}\Psi(\vec{r})=\Psi(-\vec{r})\,. \qquad (3.5)$$

После перехода к сферической тетраде, а затем к циклическому представлению матриц Γ^a получаем

$$\widehat{\Pi}'=\left|\begin{array}{ccccccc}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&\Pi_3&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&\Pi_3&0&0\\0&0&0&0&0&\Pi_3&0\\0&0&0&0&0&0&-\Pi_3\end{array}\right|\widehat{P}\,,\quad \Pi_3=\left|\begin{array}{ccc}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{array}\right|. \qquad (3.6)$$

Уравнение $\widehat{\Pi}\Psi = P\Psi$ с учетом соотношения $\widehat{P}D_{\sigma} = (-1)^j D_{-\sigma}$ дает

$$(-1)^j C = PC\,,$$
$$(-1)^j C_0 = PC_0\,,\ (-1)^j C_3 = PC_1\,,\ (-1)^j C_2 = PC_2\,,\ (-1)^j C_1 = PC_3\,,$$
$$(-1)^j \Phi_0 = P\Phi_0\,,\ (-1)^j \Phi_3 = P\Phi_1\,,\ (-1)^j \Phi_2 = P\Phi_2\,,\ (-1)^j \Phi_1 = P\Phi_3\,,$$
$$(-1)^j E_3 = PE_1\,,\ (-1)^j E_2 = PE_2\,,\ (-1)^j E_1 = PE_3\,,$$
$$(-1)^j H_3 = -PH_1\,,\ (-1)^j H_2 = -PH_2\,,\ (-1)^j H_1 = -PH_3\,. \tag{3.7}$$

У этой системы уравнений есть два решения:

$$\underline{P=(-1)^{j+1}}\,,\qquad C=0\,,\ C_0=0\,,\ C_3=-\,C_1\,,\ C_2=0\,,$$
$$\Phi_0=0\,,\ \Phi_3=-\Phi_1\,,\ \Phi_2=0\,,\quad E_3=-E_1\,,\ E_2=0\,,\ H_3=H_1\,; \tag{3.8}$$
$$\underline{P=(-1)^{j}},\quad C_3=+\,C_1\,,\ \Phi_3=+\Phi_1\,,\quad E_3=+E_1\,,\ H_3=-H_1\,,\ H_2=0\,. \tag{3.9}$$

Легко убеждаемся в том, что эти условия совместимы с радиальными уравнениями. При этом получаем соответственно две системы уравнений:

$$\underline{P=(-1)^{j+1}},$$
$$+\,i\,\varepsilon\,E_1 + i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1 + i\,\frac{\nu}{r}H_2 = m\,C_1\,,$$
$$+\,i\,\varepsilon\,E_1 + i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1 + i\,\frac{\nu}{r}H_2 = m\,\Phi_1\,,\ -i\,\varepsilon\,\Phi_1 = m\,E_1\,,$$
$$-\,i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1 = m\,H_1\,,\quad 2i\,\frac{\nu}{r}\,\Phi_1 = m\,H_2\,; \tag{3.10}$$
$$\underline{P=(-1)^{j}},$$
$$-\,i\,\varepsilon\,C_0 - \left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)C_2 - 2\,\frac{\nu}{r}\,C_1 = m\,C\,,\quad -\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2 - 2\,\frac{\nu}{r}\,E_1 = m\,C_0\,,$$
$$+\,i\,\varepsilon\,E_1 + i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1 = m\,C_1\,,\quad +\,i\,\varepsilon\,E_2 - 2i\,\frac{\nu}{r}\,H_1 = m\,C_2\,,$$
$$-\,i\,\varepsilon\,\sigma\,C - \left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2 - 2\frac{\nu}{r}\,E_1 = m\,\Phi_0\,,\quad +\,i\,\varepsilon\,E_1 + i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1 - \sigma\,\frac{\nu}{r}\,C = m\,\Phi_1\,,$$
$$+\,i\,\varepsilon E_2 - 2i\,\frac{\nu}{r}\,H_1 + \sigma\,\frac{d}{dr}\,C = m\,\Phi_2\,,\quad -\,i\,\varepsilon\,\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\,\Phi_0 = m\,E_1\,,\quad -\,i\,\varepsilon\,\Phi_2 - \frac{d}{dr}\,\Phi_0 = m\,E_2\,,$$
$$-\,i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1 - i\frac{\nu}{r}\,\Phi_2 = m\,H_1\,. \tag{3.11}$$

4. Учет кулоновского поля, нерелятивистские уравнения

Учтем кулоновское поле (используем сокращение $e^2=\alpha$):

$$\underline{P=(-1)^{j+1}},$$
$$+\,i(\varepsilon+\frac{\alpha}{r})\,E_1 + i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}\,H_2 = m\,C_1\,,$$

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+i\frac{\nu}{r}H_2=m\,\Phi_1\,,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1=m\,E_1\,,\quad -i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1=m\,H_1\,,\quad 2i\frac{\nu}{r}\Phi_1=m\,H_2\,; \tag{4.1}$$

$$\underline{P=(-1)^j},$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)C_0-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)C_2-2\frac{\nu}{r}C_1=m\,C\,,\quad -\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2-2\frac{\nu}{r}E_1=m\,C_0\,,$$

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1=m\,C_1\,,\quad +i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2-2i\frac{\nu}{r}H_1=m\,C_2\,;$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\sigma\,C-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2-2\frac{\nu}{r}E_1=m\,\Phi_0\,,$$

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1-\sigma\frac{\nu}{r}C=m\,\Phi_1\,,$$

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2-2i\frac{\nu}{r}H_1+\sigma\frac{d}{dr}C=m\,\Phi_2\,,\quad -i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1+\frac{\nu}{r}\Phi_0=m\,E_1\,,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2-\frac{d}{dr}\Phi_0=m\,E_2\,,\quad -i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1-i\frac{\nu}{r}\Phi_2=m\,H_1\,. \tag{4.2}$$

Обратимся к анализу уравнений (4.1). Прежде всего отмечаем, что для решений с четностью $P=(-1)^{j+1}$ в присутствии внешнего кулоновского поля дополнительная электромагнитная характеристика σ (поляризуемость) не входит в уравнения этой подсистемы. Уравнения (2.1) допускают полное решение. Из (4.1) следует

$$C_1(x)=\Phi_1(x)\,,\quad m\,H_2=2i\frac{\nu}{r}\Phi_1\,,$$

$$m\,E_1=-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1\,,\quad m\,H_1=-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1\,. \tag{4.3a}$$

Подставляя эти выражения для E_1, H_1, H_2 через Φ_1, приходим к уравнению второго порядка для функции Φ_1:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-m^2-\frac{j(j+1)}{r^2}\right]\Phi_1=0\,. \tag{4.3b}$$

Уравнение (4.3*b*) – это известное уравнение, которое возникает в теории скалярной частицы во внешнем кулоновском поле. Его точное решение и отвечающий ему спектр энергии известны. Таким образом, есть класс решений с четностью $P=(-1)^{j+1}$, в которых поляризуемость себя не проявляет; этим решениям отвечают энергетические уровни, имеющиеся в теориях обычных скалярной и векторной частиц.

Теперь обратимся к системе уравнений (4.2), описывающих состояния с четностью $P=(-1)^j$. Прежде всего, используя второе, третье и четвертое уравнения в (4.2), находим представление для $C(x)$:

$$C=i\frac{\alpha}{m^2r^2}E_2\,. \tag{4.4}$$

Подставляя это выражение для $C(x)$ в оставшиеся шесть уравнений, получаем

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\sigma\, i\,\frac{\alpha}{m^2r^2}\,E_2-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2-2\frac{\nu}{r}\,E_1=m\,\Phi_0\,,$$

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1-\sigma\,\frac{\nu}{r}\,i\,\frac{\alpha}{m^2r^2}\,E_2=m\,\Phi_1\,,$$

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2-2i\frac{\nu}{r}\,H_1+\sigma\,\frac{d}{dr}\,i\,\frac{\alpha}{m^2r^2}\,E_2=m\,\Phi_2\,,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1+\frac{\nu}{r}\,\Phi_0=m\,E_1\,,\quad -i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2-\frac{d}{dr}\,\Phi_0=m\,E_2\,,$$

$$-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1-\frac{i\nu}{r}\,\Phi_2=m\,H_1\,. \tag{4.5}$$

Исключим нединамические переменные – функции Φ_0 и H_1:

$$\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)iE_1+\frac{1}{m}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)^2\Phi_1+\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\frac{\nu}{mr}\Phi_2=m\,\Phi_1+\frac{\sigma\nu\alpha}{m^2r^3}\,iE_2\,,$$

$$\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1-\frac{\nu}{mr}\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)iE_2-\frac{2\nu^2}{mr^2}iE_1=m\,iE_1-\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{\sigma\alpha\nu}{m^3r^3}iE_2\,; \tag{4.6}$$

$$\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)iE_2-\frac{2\nu}{mr}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1-\frac{2\nu^2}{mr^2}\Phi_2=m\,\Phi_2-\frac{d}{dr}\,\frac{\sigma\alpha}{m^2r^2}\,iE_2\,,$$

$$\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2+\frac{d}{dr}\frac{1}{m}\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)iE_2+\frac{d}{dr}\frac{2\nu}{mr}iE_1=m\,iE_2+\frac{d}{dr}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{\sigma\alpha}{m^3r^2}iE_2\,. \tag{4.7}$$

Вводим большие $B_{1,2}(r)$ и малые $M_{1,2}(r)$ компоненты:

$$\Phi_1=(B_1+M_1),\quad \Phi_2=(B_2+M_2),\quad iE_1=(B_1-M_1),\quad iE_2=(B_2-M_2)\,; \tag{4.8}$$

также выделяем энергию покоя с помощью формальной замены $\varepsilon=m+E$, в результате находим более простые уравнения (пренебрежем малыми функциями M_i в сравнении с большими B_i):

$$\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)B_1+\frac{1}{m}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)^2B_1+\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\frac{\nu}{mr}B_2=2m\,M_1+\frac{\sigma\nu\alpha}{m^2r^3}\,B_2\,,$$

$$\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)B_1-\frac{\nu}{mr}\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)B_2-\frac{2\nu^2}{mr^2}B_1=-2mM_1-\left(m+E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{\sigma\alpha\nu}{m^3r^3}B_2\,;$$

$$\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)B_2-\frac{2\nu}{mr}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)B_1-\frac{2\nu^2}{mr^2}B_2=2m\,M_2-\frac{d}{dr}\,\frac{\sigma\alpha}{m^2r^2}\,B_2\,,$$

$$\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)B_2+\frac{d}{dr}\frac{1}{m}\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)B_2+\frac{d}{dr}\frac{2\nu}{mr}B_1=-2m\,M_2+\frac{d}{dr}\left(m+E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{\sigma\alpha}{m^3r^2}B_2\,.$$

Чтобы получить уравнения, содержащие только большие компоненты, сложим уравнения в каждой паре

$$2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)B_1+\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)^2B_1+\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\frac{\nu}{r}B_2-\frac{\nu}{r}\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)B_2-\frac{2\nu^2}{r^2}B_1=-\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{\sigma\alpha\nu}{m^2r^3}B_2\,,$$

$$2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)B_2-\frac{2\nu}{r}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)B_1-\frac{2\nu^2}{r^2}B_2+\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)B_2+\frac{d}{dr}\frac{2\nu}{r}B_1=+\frac{d}{dr}\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{\sigma\alpha}{m^2r^2}B_2\,.$$

Их можно переписать так:

$$\Delta B_1=\frac{2\nu}{r^2}B_2-e\mu\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{\nu}{r^3}B_2\,, \tag{4.9}$$

$$\Delta B_2=+\frac{3\nu}{r^2}B_1+\frac{2}{r^2}B_2+e\mu\frac{d}{dr}\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}B_2\,, \tag{4.10}$$

где использованы обозначения

$$e^2=\alpha,\quad \frac{e\sigma}{m^2}=\mu\,,\qquad \Delta=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+2m\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)-\frac{2\nu^2}{r^2}. \tag{4.11}$$

Отметим, что система уравнений (4.9) – (4.10) для ситуации $\mu=0$ исследовалась при рассмотрении нерелятивистского предела для векторной частицы без поляризуемости. Здесь также применим аналогичное преобразование (напоминаем, что $\nu=\sqrt{j(j+1)/2}$)

$$F_1=2\nu B_1+\lambda_1B_2,\qquad f_2=2\nu B_1+\lambda_2B_2\,, \tag{4.12}$$

где λ_1, λ_2 – это корни уравнения

$$\lambda^2-\lambda-j(j+1)=0,\qquad \lambda_1=j+1,\ \lambda_2=-j\,. \tag{4.13}$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$B_1=\frac{1}{2\nu}\left(\frac{j}{2j+1}F_1+\frac{j+1}{2j+1}F_2\right),\quad B_2=\frac{1}{2j+1}F_1-\frac{1}{2j+1}F_2\,. \tag{4.14}$$

Уравнения (4.9) – (4.10) преобразовываем к переменным F_1, F_2:

$$F_1=2\nu B_1+(j+1)B_2,\qquad F_2=2\nu B_1-jB_2\,,$$

находим

$$\Delta F_1=\frac{4\nu^2}{r^2}B_2-e\mu\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{2\nu^2}{r^3}B_2+$$
$$+\frac{4\nu(j+1)}{r^2}B_1+\frac{2(j+1)}{r^2}B_2+e\mu(j+1)\frac{d}{dr}\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}B_2\,, \tag{4.15}$$

$$\Delta F_2=\frac{4\nu^2}{r^2}B_2-e\mu\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{2\nu^2}{r^3}B_2-\frac{4\nu j}{r^2}B_1-\frac{2j}{r^2}B_2-e\mu j\frac{d}{dr}\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}B_2\,. \tag{4.16}$$

Из (4.15) и (4.16) получим уравнения для функций F_1, F_2 :

$$\Delta F_1=2(j+1)F_1+e\mu(j+1)\left\{-\frac{\alpha}{r^4}+\left(E+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr}-\frac{j+2}{r}\right)\right\}\frac{F_1-F_2}{2j+1}, \tag{4.17}$$

$$\Delta F_2 = -2jF_2 - e\mu\, j\left\{-\frac{\alpha}{r^4} + \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}\left(\frac{d}{dr} + \frac{j-1}{r}\right)\right\}\frac{F_1 - F_2}{2j+1}. \qquad (4.18)$$

Пусть

$$G = F_1 - F_2, \quad H = F_1 + F_2\,, \qquad (4.19)$$

из уравнений (4.17) – (4.18) получаем

$$\Delta G = 2jH + G + H + e\mu\left\{-\frac{\alpha}{r^4} + \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} - \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{2}{r}\right\}G,$$

$$\Delta H = 2jG + G + H + e\mu\left\{-\frac{\alpha}{r^4} + \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} - \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{2(j^2 + j + 1)}{r}\right\}\frac{G}{2j+1}.$$

Последние уравнения переписываются окончательно так:

$$\left\{\Delta - 1 + e\mu\left[-\frac{\alpha}{r^4} + \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} - \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{2}{r}\right]\right\}G = (2j+1)H\,,$$

$$(\Delta - 1)\,(2j+1)H = = \left\{(2j+1)^2 + e\mu\left[-\frac{\alpha}{r^4} + \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr} - \left(E + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{2(j^2 + j + 1)}{r}\right]\right\}G. \qquad (4.20)$$

Радиальные уравнения (4.20) могут быть сопоставлены с общей записью нерелятивистского уравнения Паули (1.7) для векторной частицы с поляризуемостью в электрическом поле:

$$2m\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\psi_n = -\nabla^2\psi_n + e\mu\partial_n\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)(F^{0k}\psi_k), \quad \mu = \frac{e\sigma}{m^2}.$$

Уравнения (4.20) позволяют после исключения функции $H(r)$ получить уравнение 4-го порядка для функции $G(r)$. Информация о радиальных волновых функциях векторной частицы с поляризуемостью в кулоновском поле содержится именно в этом уравнении 4-го порядка.

В следующем разделе рассмотрим самый простой случай, когда квантовое число j принимает нулевое значение.

5. Случай минимального значения $j = 0$

Отдельно должен быть рассмотрен случай минимального значения $j = 0$. При этом нужно использовать более простую подстановку для волновой функции:

$$C(x) = e^{-i\varepsilon t}\, C(r)\, D_0\,, \; C_0(x) = e^{-i\varepsilon t}\, C_0(r)\, D_0\,, \; \Phi_0(x) = e^{-i\varepsilon t}\, \Phi_0(r)\, D_0\,,$$

$$\vec{C}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0\cdot D_{-1} \\ C_2(r)\, D_0 \\ 0\cdot D_{+1}\end{vmatrix}, \qquad \vec{\Phi}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0\cdot D_{-1} \\ \Phi_2(r)\, D_0 \\ 0(r)\, D_{+1}\end{vmatrix},$$

$$\vec{E}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0\cdot D_{-1} \\ E_2(r)\, D_0 \\ 0\cdot D_{+1}\end{vmatrix}, \qquad \vec{H}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0\cdot D_{-1} \\ H_2(r)\, D_0 \\ 0\cdot D_{+1}\end{vmatrix}. \qquad (5.1)$$

Эта волновая функция имеет четность $\Pi = (-1)^j = (-1)^0 = +1$; соответственно, имеем только одну систему уравнений для состояний с этой четностью – ее легко получить из (4.2). Так, находим

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)C_0 - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)C_2 = mC\,, \quad -\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 = mC_0\,, \quad +i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 = mC_2\,,$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\sigma C - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2 = m\Phi_0\,, \quad i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2 + \sigma\frac{d}{dr}C = m\Phi_2\,,$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 - \frac{d}{dr}\Phi_0 = mE_2\,, \quad H_2 = 0\,. \tag{5.2}$$

Первые три уравнения дают возможность найти выражение $C(r)$

$$C(r) = \frac{i}{m^2}\left[\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\right]E_2(r) = \frac{i\alpha}{m^2}\frac{1}{r^2}\,E_2(r)\,, \tag{5.3}$$

а затем исключить вспомогательную функцию из трех оставшихся уравнений:

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\sigma\frac{i\alpha}{m^2}\frac{1}{r^2}\,E_2(r) - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)E_2(r) = m\Phi_0(r),$$

$$i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)E_2(r) + \sigma\frac{d}{dr}\frac{i\alpha}{m^2}\frac{1}{r^2}\,E_2(r) = m\Phi_2(r)\,,$$

$$-i\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2(r) - \frac{d}{dr}\Phi_0 = mE_2(r)\,. \tag{5.4}$$

Осуществим в этой системе предельный переход к нерелятивистскому случаю. Для этого сначала исключим нединамическую переменную Φ_0:

$$\Phi_0 = \frac{1}{m}\left[\frac{\sigma\alpha}{m^2}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2} - \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)\right]E_2\,,$$

после чего получаем два уравнения:

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)iE_2 + \frac{\sigma\alpha}{m^2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}\,iE_2 = m\,\Phi_2\,,$$

$$\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 - \frac{d}{dr}\frac{\sigma\alpha}{m^2}\frac{1}{m}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}iE_2 + \frac{d}{dr}\frac{1}{m}\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)iE_2 = m\,iE_2\,. \tag{5.5}$$

Вводим большие и малые компоненты:

$$\Phi_2 = (B_2 + M_2), \quad iE_2 = (B_2 - M_2); \tag{5.6}$$

выделяем энергию покоя формальной заменой $\varepsilon \Rightarrow M + \varepsilon$. Получим

$$\left(m + \varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)(B_2 - M_2) + \frac{\sigma\alpha}{m^2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}\,(B_2 - M_2) = m\,(B_2 + M_2)\,,$$

$$\left(m + \varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)(B_2 + M_2) - \frac{d}{dr}\frac{\sigma\alpha}{m^2}\frac{1}{m}\left(\varepsilon + \frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}(B_2 - M_2) +$$

$$+\frac{d}{dr}\frac{1}{m}\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)(B_2-M_2)=m\,(B_2-M_2)\,, \qquad (5.7)$$

откуда следует

$$\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)(B_2-M_2)+\frac{\sigma\alpha}{m^2}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}\,(B_2-M_2)=2m\,M_2\,,$$

$$\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)(B_2+M_2)-\frac{d}{dr}\frac{\sigma\alpha}{m^2}\frac{1}{m}\frac{1}{r}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}(B_2-M_2)+\frac{d}{dr}\frac{1}{m}\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)(B_2-M_2)=-2m\,M_2\,.$$

Чтобы найти уравнение для большой компоненты B_2, сложим последние два уравнения:

$$\left[\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)+2m\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)+\frac{\sigma\alpha}{m}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}-\frac{d}{dr}\frac{\sigma\alpha}{m}\frac{1}{m}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{r^2}\right]B_2=0\,;$$

это радиальное уравнение в приближении Паули для состояний с $j=0$. Его можно представить в явном виде так (пусть $B_2(r)=F(r)$):

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\left(\frac{2}{r}+\frac{-\sigma\alpha\varepsilon/m^2+\sigma\alpha/m}{r^2}-\frac{\alpha^2\sigma/m^2}{r^3}\right)\frac{d}{dr}+\right.$$
$$\left.+\left(2m\varepsilon+\frac{2m\alpha}{r}-\frac{2}{r^2}+\frac{-2\sigma\alpha/m+2\sigma\alpha\varepsilon/m^2}{r^3}+\frac{3\sigma\alpha^2/m^2}{r^4}\right)\right\}F=0. \qquad (5.8)$$

Это уравнение второго порядка с двумя особыми нерегулярными точками 0 и ∞ ранга 3. Это сложная для анализа задача. В настоящее время можно описать лишь ее формальные решения, при этом нет алгоритма для квантования значений энергии. При обращении параметра поляризуемости σ в ноль из (5.8) следует простое уравнение, решаемое в вырожденных гипергеометрических функциях.

Из (5.8), совершив с помощью замен

$$\alpha=e^2\longrightarrow 0,\quad \frac{(e^2\sigma)}{m^2}\Rightarrow\Sigma\quad(\sigma\longrightarrow\infty) \qquad (5.9)$$

формальный переход к случаю электрически нейтральной частицы, получим уравнение

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\left(\frac{2}{r}+\frac{\Sigma(m-\varepsilon)}{r^2}-\frac{\Sigma}{r^3}\right)\frac{d}{dr}+\left(2m\varepsilon-\frac{2}{r^2}-2\frac{\Sigma(m-\varepsilon)}{r^3}+\frac{3\Sigma}{r^4}\right)\right\}F=0. \qquad (5.10)$$

Эффективная потенциальная энергия задается равенством

$$U=\frac{2}{r^2}+2\frac{\Sigma(m-\varepsilon)}{r^3}-\frac{3\Sigma}{r^4}; \qquad (5.11)$$

около особых точек она ведет себя так (пусть $\varepsilon,\ m,\ \Sigma>0$):

$$r\to 0,\quad U\to-\frac{3\Sigma}{r^4}=-\infty,\quad r\to\infty,\quad U\to\frac{2}{r^2}=0\,.$$

Из двух точек обращения в ноль потенциала одна положительная, другая отрицательная:

$$r_{1,2} = -\Sigma\frac{m-\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\Sigma^2(\frac{m-\varepsilon}{2})^2 + \frac{3\Sigma}{2}}. \quad (5.12)$$

Таким образом, и для нейтральной частицы с поляризуемостью $\Sigma > 0$ существуют условия, при которых могут возникнуть связанные состояния частицы во внешнем кулоновском поле. Качественный анализ может быть выполнен и для случая заряженной частицы:

$$U = -\frac{2m\alpha}{r} + \frac{2}{r^2} + \frac{2\sigma\alpha/m - 2\sigma\alpha\varepsilon/m^2}{r^3} - \frac{3\sigma\alpha^2/m^2}{r^4}. \quad (5.13)$$

Поведение этого более сложного потенциала около особых точек аналогичное. Анализ точек $U(r) = 0$ сводится к исследованию уравнения третьей степени. Связанным состояниям отвечает случай трех вещественных корней: двух положительных и одного отрицательного.

Возвращаясь к случаю заряженной частицы в состояниях с $j = 0$, исследуем локальные решения Фробениуса [12] уравнения (5.8) около точки $r = 0$. В соответствии с рангом 3 особой точки ищем решения в виде [12]

$$F(r) = r^A e^{\frac{B}{r}} e^{\frac{C}{r^2}} f(r); \quad (5.14)$$

получим следующее уравнение для функции $f(r)$:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left[\frac{2A+2}{r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\sigma\alpha}{m} - \frac{\sigma\alpha\varepsilon}{m^2} - 2B\right) - \frac{\sigma\alpha^2/m^2 + 4C}{r^3}\right]\frac{df}{dr} +$$
$$+\left[2m\varepsilon + 2\frac{m\alpha}{r} + \frac{A^2+A-2}{r^2} + \frac{1}{r^3}\left(-2\frac{\sigma\alpha}{m} - \frac{\sigma\alpha\varepsilon A}{m^2} - 2AB + \frac{\sigma\alpha A}{m} + 2\frac{\sigma\alpha\varepsilon}{m^2}\right) + \right.$$
$$+\frac{1}{r^4}\left(2C - 4AC - \frac{\alpha^2\sigma A}{m^2} - \frac{\sigma\alpha B}{m} + B^2 + \frac{\sigma\alpha\varepsilon B}{m^2} + 3\frac{\sigma\alpha^2}{m^2}\right) +$$
$$\left. + \frac{4BC + \alpha^2\sigma B/m^2 - 2\sigma\alpha C/m + 2\alpha\sigma\varepsilon C/m^2}{r^5} + \frac{4C^2 + 2\alpha^2\sigma C/m^2}{r^6}\right] f = 0. \quad (5.15)$$

Занулим коэффициент при $\frac{1}{r^6}$:

$$4C^2 + 2\alpha^2\sigma C/m^2 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{\alpha^2\sigma}{2m^2}, \quad (5.16)$$

а также коэффициент при $\frac{1}{r^5}$:

$$B = \frac{2\alpha\sigma C(m-\varepsilon)}{4Cm^2 + \alpha^2\sigma} = 0 \;\Rightarrow\; B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{\alpha\sigma(m-\varepsilon)}{m^2}. \quad (5.17)$$

Занулив коэффициент при $\frac{1}{r^4}$, получим

$$A = \frac{B^2 m^2 - Bm\alpha\sigma + B\alpha\varepsilon\sigma + 2Cm^2 + 3\alpha^2\sigma}{4Cm^2 + \alpha^2\sigma} \;\Rightarrow\; A_1 = 3, \quad A_2 = -2. \quad (5.18)$$

Таким образом, имеем два типа решений. Найдем явный вид уравнений для соответствующих функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$.

Для случая

$$A_1 = 3,\ \ B_1 = 0,\ \ C_1 = 0 \tag{5.19a}$$

имеем уравнение

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left(\frac{8}{r} + \frac{\sigma\alpha/m - \sigma\alpha\varepsilon/m^2}{r^2} - \frac{\sigma\alpha^2/m^2}{r^3} \right)\frac{df}{dr} +$$
$$+\left(2m\varepsilon + \frac{2m\alpha}{r} + \frac{10}{r^2} + \frac{\sigma\alpha/m - \sigma\alpha\varepsilon/m^2}{r^3} \right) f = 0. \tag{5.19b}$$

Для случая

$$A_2 = -2,\ \ B_2 = \frac{\alpha\sigma(m-\varepsilon)}{m^2},\ \ C_2 = -\frac{\alpha^2\sigma}{2m^2} \tag{5.20a}$$

имеем уравнение

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \left(-\frac{2}{r} - \frac{\sigma\alpha(m-\varepsilon)/m^2}{r^2} + \frac{\sigma\alpha^2/m^2}{r^3} \right)\frac{df}{dr} + \left(2m\varepsilon + \frac{2m\alpha}{r} \right) f = 0. \tag{5.20b}$$

Эти два уравнения имеют похожую общую структуру. Будем следить за обоими уравнениями, пользуясь следующими краткими символическими обозначениями:

$$f'' + \left(\frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r^2} + \frac{a_3}{r^3} \right) f' + \left(b + \frac{b_1}{r} + \frac{b_2}{r^2} + \frac{b_3}{r^3} \right) f = 0. \tag{5.21}$$

Строим решения в виде степенного ряда: $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$, в результате получим 5-членные рекуррентные соотношения

$$bc_{n-3} + b_1 c_{n-2} + [(n-1)(n-2) + a_1(n-1) + b_2]c_{n-1} + [a_2 n + b_3]c_n + [a_3(n+1)]c_{n+1} = 0.$$

Делим последнее соотношение на c_{n-3}:

$$b + b_1\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} + [(n-1)(n-2) + a_1(n-1) + b_2]\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} +$$
$$+ [a_2 n + b_3]\frac{c_n}{c_{n-1}}\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} + [a_3(n+1)]\frac{c_{n+1}}{c_n}\frac{c_n}{c_{n-1}}\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}}\frac{c_{n-2}}{c_{n-3}} = 0.$$

Домножив на n^{-2} и устремив $n \to \infty$, находим алгебраическое уравнение для величины R, определяющей возможные радиусы сходимости R_{conv} степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n-1}}, \qquad R^2 = 0, \qquad R_{conv} = \frac{1}{|R|} = \infty.$$

Таким образом, возникают два линейно независимых решения:

$$F_1(r)=r^3\ f(r),\qquad F_2(r)=\frac{1}{r^2}\exp\left(+\frac{\alpha\sigma(m-\varepsilon)}{m^2r}\right)\exp\left(-\frac{\sigma\alpha^2/2}{m^2r^2}\right)f_2(r). \quad (5.22)$$

Отмечаем, что знак параметра поляризуемости σ существенно влияет на поведение экспоненциальных множителей в окрестности точки $r=0$. Наиболее вероятным представляется возможность на основе функций $F_2(r)$ строить решения, сопоставляемые связанным состояниям при $\sigma>0$.

6. Структура решений Фробениуса уравнения 4-го порядка

Обратимся к системе уравнений (4.20), описывающей заряженную частицу. Исключая функцию $H(r)$, находим уравнение 4-го порядка для функции $G(r)$:

$$\begin{gathered}\frac{d^4G}{dr^4}+\left[\frac{4}{r}+\frac{\mu E}{r^2}+\frac{\mu\alpha}{r^3}\right]\frac{d^3G}{dr^3}+\\
+\left[\frac{-2\mu E+4m\alpha}{r}+\frac{-2\mu\alpha-2j(j+1)}{r^2}-\frac{2\mu E}{r^3}-\frac{5\mu\alpha}{r^4}+4mE-2\right]\frac{d^2G}{dr^2}+\\
+\left[\frac{-4+8mE}{r}+\frac{2mE^2\mu-2\mu E+4m\alpha}{r^2}+\frac{2(2mE+1)\mu\alpha}{r^3}-\right.\\
\left.-\frac{\left(Ej(j+1)-2m\alpha^2-2E\right)\mu}{r^4}-\frac{\left(j^2+j-12\right)\mu\alpha}{r^5}\right]\frac{dG}{dr}+\\
+\left[\frac{2j^2\mu E+2j\mu E-4mE^2\mu+4\mu E+8m^2E\alpha-4m\alpha}{r}+\right.\\
+\frac{j(j+1)(-4mE+2+2\mu\alpha)+4m^2\alpha^2+(-8mE+4)\mu\alpha}{r^2}+\\
+\frac{2j^2\mu E-4m\alpha j^2-4jm\alpha+2j\mu E-4m\mu\alpha^2}{r^3}+\\
+\frac{j^4+2j^3-j^2-2j+2j\mu\alpha(j+1)-2\mu\alpha(mE+1)}{r^4}-\\
\left.-\frac{2m\mu\alpha^2}{r^5}+\frac{\left(j^2+j-12\right)\mu\alpha}{r^6}-4j(j+1)-4mE+4m^2E^2\right]G=0. \quad (6.1)\end{gathered}$$

В уравнении для функции $G(r)$ выполним подстановку [12]

$$G=r^Ae^{B/r}e^{L/r^2}f(r); \quad (6.2)$$

в результате получим следующее уравнение для $G(r)$:

$$\begin{gathered}\frac{d^4f}{dr^4}+\left(\frac{E\mu-4B}{r^2}+\frac{\mu\alpha-8L}{r^3}+\frac{4A+4}{r}\right)\frac{d^3f}{dr^3}+\\
\left(-2+4mE+\frac{-2E\mu+4m\alpha}{r}+\frac{6A^2-2j^2-2\mu\alpha+6A-2j}{r^2}+\frac{3\mu EA-12AB-2E\mu}{r^3}+\right.\end{gathered}$$

$$+\frac{3A\mu\alpha-3BE\mu-24AL+6B^2-5\mu\alpha+12L}{r^4}+\frac{-3\mu\alpha B-6EL\mu+24BL}{r^5}+\frac{-6L\mu\alpha+24L^2}{r^6}\Bigg)\frac{d^2f}{dr^2}+$$

$$+\Bigg(\frac{8AEm+8mE-4A-4}{r}+\frac{2E^2m\mu-4\mu EA+8Am\alpha-8BEm-2E\mu+4m\alpha+4B}{r^2}+$$

$$+\frac{4Em\mu\alpha+4A^3-4Aj^2-4A\mu\alpha+4BE\mu-8Bm\alpha-16ELm-4Aj+2\mu\alpha-4A+8L}{r^3}+$$

$$+\frac{1}{r^4}[3\mu EA^2-Ej^2\mu+2m\mu\alpha^2-12A^2B-7\mu EA+4j^2B+4\mu\alpha B+8EL\mu-Ej\mu-16m\alpha L+$$

$$+12AB+4jB+2E\mu]+$$

$$+\frac{1}{r^5}[3\mu\alpha An^2-6ABE\mu-j^2\mu\alpha-24A^2L+12AB^2-13A\mu\alpha+10BE\mu+8Lj^2+8L\mu\alpha-j\mu\alpha+$$

$$+48AL-12B^2+8Lj+12\mu\alpha-24L]+$$

$$+\frac{-6AB\mu\alpha-12AEL\mu+3B^2E\mu+48ABL-4B^3+16\mu\alpha B+26EL\mu-72BL}{r^6}+$$

$$+\frac{-12AL\mu\alpha+3B^2\mu\alpha+12BEL\mu+48AL^2-24B^2L+38L\mu\alpha-96L^2}{r^7}+$$

$$+\frac{12BL\mu\alpha+12EL^2\mu-48BL^2}{r^8}+\frac{12L^2\mu\alpha-32L^3}{r^9}\Bigg)\frac{df}{dr}$$

$$+\Bigg(-4mE+4m^2E^2-4j-4j^2+\frac{-4E^2m\mu+2Ej^2\mu+8Em^2\alpha+2Ej\mu+4E\mu-4m\alpha}{r}+$$

$$+\frac{4A^2Em-4Ej^2m-8Em\mu\alpha+2j^2\mu\alpha+4m^2\alpha^2+4AEm-4Ejm+2j\mu\alpha-2A^2+2j^2+4\mu\alpha-2A+2j}{r^2}+$$

$$+\frac{2E^2m\mu A-2\mu EA^2+4m\alpha A^2-8mEAB+2Ej^2\mu-4j^2m\alpha-4m\mu\alpha^2+2Ej\mu-4jm\alpha+4AB}{r^3}+$$

$$+\frac{1}{r^4}[4AEm\mu\alpha-2E^2m\mu B+A^4-2A^2j^2-2\mu\alpha A^2+4ABE\mu-8m\alpha AB-16mEAL+4B^2Em-$$

$$-2Em\mu\alpha+j^4+2j^2\mu\alpha-2A^3-2A^2j+2Aj^2+4A\mu\alpha-2BE\mu+4Bm\alpha+8ELm+2j^3+2j\mu\alpha-$$

$$-A^2+8AL+2Aj-2B^2-j^2-2\mu\alpha+2A-4L-2j]+$$

$$+\frac{1}{r^5}[A^3E\mu-AEj^2\mu+2Am\mu\alpha^2-4BEm\mu\alpha-4E^2Lm\mu-4A^3B-5\mu EA^2+4ABj^2+4AB\mu\alpha+$$

$$+8AEL\mu-AEj\mu-16ALm\alpha-2B^2E\mu+4B^2m\alpha+16BELm-2m\mu\alpha^2+12A^2B+4ABj+$$

$$+6\mu EA-4j^2B-6\mu\alpha B-8EL\mu+16m\alpha L-8AB-8BL-4jB]+$$

$$+\frac{1}{r^6}[A^3\mu\alpha-3A^2BE\mu-Aj^2\mu\alpha+BEj^2\mu-2Bm\mu\alpha^2-8ELm\mu\alpha-8A^3L+6A^2B^2-8\mu\alpha A^2+$$

$$+13ABE\mu+8ALj^2+8AL\mu\alpha-Aj\mu\alpha-2B^2j^2-2B^2\mu\alpha-8BEL\mu+BEj\mu+16BLm\alpha+16EL^2m+$$

$$+j^2\mu\alpha+36A^2L-18AB^2+8ALj+19A\mu\alpha-2B^2j-12BE\mu-12Lj^2-16L\mu\alpha+j\mu\alpha-52AL+$$

$$+12B^2-8L^2-12Lj-12\mu\alpha+24L]+$$

$$+\frac{1}{r^7}[-3A^2B\mu\alpha-6A^2EL\mu+3AB^2E\mu+Bj^2\mu\alpha+2ELj^2\mu-4Lm\mu\alpha^2+24A^2BL-4AB^3+$$

$$+19AB\mu\alpha+32AEL\mu-8B^2E\mu-8BLj^2-8BL\mu\alpha+Bj\mu\alpha-8EL^2\mu+2ELj\mu+16L^2m\alpha-96ABL+$$
$$+8B^3-8BLj-28\mu\alpha B-40EL\mu+96BL]+$$
$$+\frac{1}{r^8}[-6A^2L\mu\alpha+3AB^2\mu\alpha+12ABEL\mu-B^3E\mu+2Lj^2\mu\alpha+24A^2L^2-24AB^2L+44AL\mu\alpha+$$
$$+B^4-11B^2\mu\alpha-38BEL\mu-8L^2j^2-8L^2\mu\alpha+$$
$$+2Lj\mu\alpha-120AL^2+60B^2L-8L^2j-78L\mu\alpha+156L^2]+$$
$$+\frac{12ABL\mu\alpha+12AEL^2\mu-B^3\mu\alpha-6B^2EL\mu-48ABL^2+8B^3L-50BL\mu\alpha-44EL^2\mu+144BL^2}{r^9}+$$
$$+\frac{12AL^2\mu\alpha-6B^2L\mu\alpha-12BEL^2\mu-32AL^3+24B^2L^2-56L^2\mu\alpha+112L^3}{r^{10}}+$$
$$+\left.\frac{-12BL^2\mu\alpha-8EL^3\mu+32BL^3}{r^{11}}+\frac{-8L^3\mu\alpha+16L^4}{r^{12}}\right)f=0. \qquad (6.3)$$

Коэффициент при r^{-12} приравняем к нулю, в результате находим 4 значения для L:

$$-8L^3\mu\alpha+16L^4=0 \quad\Rightarrow\quad L_1=\frac{1}{2}\mu\alpha, \quad L_{2,3,4}=0. \qquad (6.4)$$

Пусть $L_1=\frac{1}{2}\mu\alpha$, тогда, приравнивая к нулю коэффициент при r^{-11}, находим

$$-12BL^2\mu\alpha-8EL^3\mu+32BL^3=0\Rightarrow B_1=E\mu. \qquad (6.5a)$$

Пусть

$$L_1=\frac{1}{2}\mu\alpha, \qquad B_1=E\mu,$$

тогда, приравнивая к нулю коэффициент при r^{-10}, находим

$$-A\mu^3\alpha^3=0 \quad\Rightarrow\quad A_1=0. \qquad (6.5b)$$

Для варианта L_1, B_1, A_1 уравнение (6.3) примет вид (для краткости приводим только его общую структуру)

$$f'''' + \left(\frac{a_1}{r}+\ldots+\frac{a_3}{r^3}\right)f''' + \left(b+\frac{b_1}{r}+\ldots+\frac{b_6}{r^6}\right)f'' +$$
$$+\left(\frac{c_1}{r}+\ldots+\frac{c_8}{r^9}\right)f' + \left(d+\frac{d_1}{r}+\ldots+\frac{d_8}{r^8}\right)f=0. \qquad (6.6)$$

Пусть

$$L_{2,3,4}=0, \qquad (6.7a)$$

тогда убеждаемся, что коэффициенты при r^{-11}, r^{-10} также равны нулю. Приравняв к нулю коэффициент при r^{-9}, находим

$$-B^3\mu\alpha=0 \quad\Rightarrow\quad B_{2,3,4}=0. \qquad (6.7b)$$

Коэффициенты при r^{-8}, r^{-7} также обращаются в ноль. Приравняв коэффициент при степени r^{-6} к нулю

$$A^3\mu\alpha - Aj^2\mu\alpha - 8A^2\mu\alpha - Aj\mu\alpha + j^2\mu\alpha + 19A\mu\alpha + j\mu\alpha - 12\mu\alpha = 0,$$

найдем три значения для $A_{2,3,4}$:

$$A_2 = 1, \quad A_3 = 3 - j, \quad A_4 = 4 + j. \tag{6.7c}$$

Для описания связанных состояний (их должно быть два типа) подходят случаи $A_2 = 1,\ A_4 = 4 + j$, поскольку соответствующие решения стремятся к нулю при $r \to 0$. Все три последних уравнения для $A = A_1,\ A_2,\ A_3$ имеют одну и ту же общую структуру

$$g'''' + \left(\frac{a_1}{r} + \ldots + \frac{a_3}{r^3}\right)g''' + \left(b + \frac{b_1}{r} + \ldots + \frac{b_4}{r^4}\right)g'' +$$
$$+\left(\frac{c_1}{r} + \ldots + \frac{c_5}{r^5}\right)g' + \left(d + \frac{d_1}{r} + \ldots + \frac{d_5}{r^5}\right)g = 0; \tag{6.7}$$

их решения строятся в виде степенных рядов 7-членными рекуррентными соотношениями.

Анализ задачи нельзя считать законченным. Построенные решения Фробениуса являются хотя и точными, но формальными. Пока неизвестны правила, позволяющие выделить из них те, которые могли бы описывать связанные состояния в этой системе. Также представляет интерес более детальный анализ случая нейтральной частицы с поляризуемостью.

Авторы признательны В.М. Редькову за интерес к работе, полезные советы и помощь.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров, Ф. И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца / Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1969. – № 6. – С. 81–88.
2. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 0 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85.
3. Федоров, Ф. И. Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин / Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 78–83.
4. Плетюхов, В. А. Волновое уравнение с кратными представлениями для частицы со спином 1 / В. А. Плетюхов, Ф. И. Федоров // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.
5. Об описании поляризуемости скалярных частиц в теории релятивистских волновых уравнений / А. А. Богуш [и др.] // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теории относительности. – Минск : Ин-т физики АН БССР, 1981. – С. 81–90.
6. Кисель, В. В. Электрическая поляризуемость частиц со спином 1 в теории релятивистских волновых уравнений / В. В. Кисель // Вес. АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1982. – № 3. – С. 73–78.

7. О теории скалярной частицы в пространствах с расширенным набором представлений группы Лоренца / А. А. Богуш [и др.] // Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2001. – № 3. – С. 65–71.

8. Exact solutions for a quantum-mechanical particle with spin 1 and additional intrinsic characteristic in a homogeneous magnetic field / V. V. Kisel [et al] // Acta Physica Polonica. B. – 2010. – Vol. 41, № 11. – P. 2347–2363.

9. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.

10. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 495 с.

11. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2011. – 328 с.

12. Slavyanov, S. Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford : Oxford University Press, 2000.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 24.04.2018

Voynova Ya.A., Veko O.V., Ovsiyuk E.M. **A Vector Particle with Polarizability in the Coulomb Field, Nonrelativistic Approximation**

The quantum mechanical equation for a particle of spin 1 and with an additional electromagnetic characteristic – polarizability is investigated in presence of the external Coulomb field. From the 15-dimensional relativistic Proca-like tensor system, a corresponding nonrelativistic equation is derived for a 3-dimensional wave function. First, the problem of separation of the variables in the presence of an external Coulomb field is solved for a 15-dimensional equation. In the system of 15 radial equations, by using diagonalization of the spatial inversion operator, two subsystems are derived: of 5 and 10 equations, respectively. The system of 5 equations reduces to an equation known in the theory of the ordinary scalar particle in an external Coulomb field. In this case, the polarizability does not manifest itself in the energy spectrum. In the system of 10 equations, the non-relativistic approximation is performed. A system of two 2-nd order equations for two functions is derived, from which it follows a radial 4-th order equation. The equation has two irregular singular points $r = 0$ and $r = \infty$ of the rank 3. The case of the minimum value $j = 0$ of the conserved total angular momentum is considered separately. In the nonrelativistic approximation, the problem reduces to a single equation of 2-nd equation with two irregular singular points $r = 0$ and $r = \infty$ of the rank 2. Frobenius solutions of the 2-nd and 4-th order radial equations are constructed. The solutions that would describe the bound states in the system are indicated.