УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик[1], С.В. Сидак[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

[2]ассистент каф. ИиПМ Брестского государственного технического университета, магистрант специальности «Математика» Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: priclmath@brsu.brest.by

О СХОДИМОСТИ НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРАВИЛОМ ОСТАНОВА ПО ПОПРАВКАМ

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений с положительным ограниченным и несамосопряженным оператором предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по поправкам, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В исходной норме гильбертова пространства доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным несамосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный метод:

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^2\right)x_n + 2\alpha\left(A^*A\right)\,A^*y\right],\ x_0 = 0. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод итераций (2) примет вид:

$$\begin{gathered} z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left[\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)z_n + 2\alpha\left(A^*A\right)\,A^*y_\delta\right] + \\ + \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}u_n,\ z_0 = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причем $\|u_n\| \le \beta.$ Обозначим через

$$C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^2\right),\ B = 2\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^2\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)\,A^*.$$

Тогда метод (3) примет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n.$$

Для метода (2) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешности [1]. Эта априорная оценка погрешности оптимизирована, и найден априорный момент останова.

В статье [2] изучен случай неединственного решения операторного уравнения (1) и исследована сходимость метода (3) в энергетической («ослабленной») норме гильбертова пространства.

В [3; 4] для метода (3) обоснована возможность применения правила останова по малости невязки и решена численная модельная задача.

Правило останова по поправкам. В том случае, когда истокопредставимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по поправкам [5–7].

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим неравенствами

$$\left.\begin{aligned} &\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \\ &\|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (4) сходится. Аналогично [6; 7] доказываются леммы.

Лемма 1. *Пусть приближение* ω_n *определяется условиями*

$$\omega_0 = z_0, \ \omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n, \ n \ge 0. \tag{5}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2.$$

Лемма 2. *При* $\forall \omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство*

$$\varliminf_{n\to\infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$$

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова m определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|\beta\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценк* $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)}$;

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0} \|z_m - x\| = 0$.

Доказательство.

1. По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{6}$$

При $n=1$ из $z_n = Cz_{n-1} + By_\delta + Cu_{n-1}$ имеем $z_1 = Cz_0 + By_\delta + Cu_0$, из (6) получим то же самое, т.е. при $n=1$ формула (6) верна.

Предположим, что (6) верна при $n = p$, т.е.

$$z_p = C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right),$$

и докажем ее справедливость при $n = p+1$. Имеем

$$z_{p+1} = C^p z_p + By_\delta + Cu_p = C\left(C^p z_0 + C\sum_{k=0}^{p-1} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)\right) + By_\delta + Cu_p =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C^2\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-1} + By_\delta + Cu_{p-2} + CBy_\delta + C^2u_{p-3} + \ldots +\right.$$

$$\left. + C^{p-2}By_\delta + C^{p-1}u_0\right) + By_\delta + Cu_p = C^{p+1}z_0 + C\left(By_\delta + Cu_{p-1} + \right.$$

$$\left. + CBy_\delta + C^2u_{p-2} + \ldots + C^{p-1}By_\delta + Cu_o + C^{-1}By_\delta + u_p\right) =$$

$$= C^{p+1}z_0 + C\sum_{k=0}^{p} C^k \left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (6) доказана. Отсюда

$$\omega_n = C^n\omega_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1}By + u_{n-k-1}) = C^n\omega_0 + (E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1})By +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + (E - C^n)(E-C)^{-1}(A^*A)^{-1}(E-C)A^*y +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0 = \omega_0$, получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n z_0 + A^{-1}(E - C^n)y_\delta + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}z_0 + A^{-1}(E - C^{n+1})y_\delta - C\sum_{k=0}^{n} C^k u_{n-k} =$$

$$= C^n\omega_0 + A^{-1}(E - C^n)y - A^{-1}(E - C^n)y + A^{-1}(E - C^n)y_\delta +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1}\omega_0 - A^{-1}(E - C^{n+1})y + A^{-1}(E - C^{n+1})y - A^{-1}(E - C^n)y_\delta -$$

$$- C\sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k} = \omega_n - \omega_{n+1} + A^{-1}(E - C)(y_\delta - y) = \omega_n - \omega_{n+1} + C^n B(y - y_\delta).$$

Следовательно,

$$\left\|z_n - z_{n+1}\right\| \le \left\|\omega_n - \omega_{n+1}\right\| + \left\|C^n B(y - y_\delta)\right\|. \tag{7}$$

Обозначим $\sigma = B(y - y_\delta)$, тогда

$$\left\|C^n B(y - y_\delta)\right\| = \left\|C^n \sigma\right\| = \left\| \int_0^{\|A^*A\|} \left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda \sigma \right\| \le \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda \sigma \right\| +$$

$$+\left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A^*A\|} \left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n dE_\lambda \sigma \right\| \le \left\|E_{\varepsilon_0}\sigma\right\| + q^n \|\sigma\| \to 0,\, n \to \infty,\, \varepsilon_0 \to 0,$$

так как при $\alpha > 0$, $\lambda \in \left(0, \left\|A^*A\right\|\right]$ имеем $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right| \le q < 1.$

Поэтому (см. лемму 2) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \underline{\lim}_{n\to\infty} \|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых $y_\delta, \|y - y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

2. Рассмотрим последовательность (5) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned} &\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,\ (n < m'),\\ &\|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из (7) следует, что $m \le m'$. Из леммы 1 при $n = m'$ получим неравенство

$$\sum_{k=0}^{m'} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2,$$

поэтому справедливо записать

$$\sum_{k=0}^{m'-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Так как по (8) при $n < m'$ имеем

$$\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,$$

то $m'\left(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\right)^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2.$

Учитывая, что $\omega_0 = z_0$ и $m \le m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова

$$m \le m' \le \|z_0 - x\|^2 \left((\varepsilon - \|\beta\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)\right)^{-1}.$$

3. Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \tag{9}$$

Предположим, что (9) верно, тогда

$$x - C^n x = B\left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right)y,$$

$$(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1} y, \quad (E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1} Ax,$$

$$(E - C^n)x = (E - C^n)x.$$

Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (9) доказана.

Из (6) вычтем (9), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \tag{10}$$

Отсюда

$$\Delta_n = C^n \Delta_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right], \text{ где } \Delta_n = z_n - x \text{ и } \Delta_0 = z_0 - x.$$

Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n \Delta_0\right\| + \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)n. \tag{11}$$

В частности, (11) справедливо и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m \Delta_0\right\| \to 0,\ m \to \infty.$

Поэтому для доказательства

$$\|z_m - x\| \to 0, \delta \to 0, \beta \to 0$$

достаточно показать, что

$$m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0, \ \ m \to \infty, \delta \to 0, \beta \to 0.$$

Из (10) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n(E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1}. \tag{12}$$

Так как спектр оператора

$$C = \left(E + \alpha\left(A^* A\right)^2\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^* A\right)^2\right)$$

принадлежит [0,1], то можно доказать, что

$$\left\|C^n (E - C)\right\| \le \frac{1}{n+1}. \tag{13}$$

Поэтому из (12) получим при $n = m - 1$

$$\|z_{m-1} - z_m\| \le \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x) \right\| + \left\| C^{m-1} B(y_\delta - y) \right\| + \|Cu_{m-1}\| +$$

$$+ \left\| C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C) u_{m-k-2} \right\| \le \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E - C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta +$$

$$+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \le \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \le 1 + \ln m$ ([8]).

Так как по условию теоремы

$$\varepsilon(\delta, \beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right), d > 1, p \in (0,1),$$

то при всех достаточно малых δ, β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из 2) получим

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}.$$

Поскольку

$$\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon, \text{ то } \varepsilon \le \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$$

Отсюда получим, что $m \le \dfrac{2\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}$. Умножим обе части последнего равенства на $\|B\|\delta + \|C\|\beta$, получим

$$m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \le \frac{2\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}.$$ При $m \to \infty$ множитель

$2\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| \to 0$, а $\dfrac{2(\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}$

ограничена при $\delta, \beta \to 0$. Поэтому $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0$, при $m \to \infty$, δ, $\beta \to 0$. Отсюда и из неравенства (11) при $m \to 0$

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\|\Delta_m\| = \lim_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = \lim_{\delta,\beta\to 0}\left(\|C^m \Delta_0\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta)\right) = 0.$$

Итак, доказано, что $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$ при $m \to \infty$, т.е. метод (3) с правилом останова (4) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного итерационного процесса решения некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2016. – № 2. – С. 71–76.

2. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач I рода в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Весн. Брэсц. тэхн. ун-та. Сер. Фізіка. Матэматыка. Выліч. тэхніка. – 2016. – № 5. – С. 13–21.

3. Матысик, О. В. Регуляризация операторных уравнений первого рода при помощи неявного метода итераций в случае применения правила останова по малости невязки / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 1. – С. 67–73.

4. Матысик, О. В. Программная реализация нахождения приближенного решения модельной некорректной задачи с помощью неявной итерационной процедуры в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Весн. Брэсц. тэхн. ун-та. Сер. Фізіка. Матэматыка. Выліч. тэхніка. – 2016. – № 5. – С. 62–67.

5. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

6. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.

7. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.

8. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.08.2017

O.V. Matysik, S.V. Sidak. **About of Convergence the Implicite Iteration Method with a Rule of Neighboring Approximations for Solving Incorrect Problems**

In the Hilbert space for solving linear operator equations with affirmative limited and non self–conjugate operator the non-explicit iteration method is proposed. The application of a rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. In its initial norm of Gilbert space the convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.