УДК 517.927

И.М. Конет[1], К.Г. Геселева[2]

[1]д-р физ.-мат. наук, проф., проректор по научной работе
Каменец-Подольского национального университета имени И. Огиенко,
заслуженный деятель науки и техники Украины
[2]аспирант 3 года обучения каф. математики
Каменец-Подольского национального университета имени И. Огиенко
e-mail: geseleva1702@gmail.com

КОЛЛОКАЦИОННЫЙ И КОЛЛОКАЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрены приближенные методы решения интегро-функциональных уравнений. Исследован коллокационный и коллокционно-итеративные (стационарный и нестационарный) методы нахождения приближенных решений интегро-функциональных уравнений.

Введение

При исследовании различных задач теоретического и прикладного характера широкое применение имеют интегральные и интегро-функциональные уравнения. Поскольку построение точных решений таких уравнений возможно только в отдельных случаях, то большое значение приобретают методы построения приближенных решений этих уравнений. Одним из эффективных методов является коллокационный метод и одно из его обобщений – коллокационно-итеративный метод.

В статье рассматриваются вопросы возможности применения этих методов к некоторым типам интегро-функциональных уравнений.

Рассмотрим некоторые классы интегро-функциональных уравнений, приближенные решения которых можно построить коллокационным и коллокационно-итеративными методами.

Линейные интегро-функциональные уравнения

В пространстве $L_2(a;b)$ действительных и измеримых на промежутке $(a;b)$ функций, суммируемых с квадратом, рассмотрим интегро-функциональное уравнение вида

$$y(x)-p(x)y(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)\,dt, x\in(a;b), \tag{1}$$

$$y(x)=0, x\notin(a;b),$$

где $f(x)$ известная, а $y(x)$ – искомая функции в $L_2(a;b)$. Относительно функций $h(x), p(x), K(x;t)$ предполагаем, что они, соответственно, на промежутке $[a;b]$ и в квадрате $[a;b]^2=[a;b]\times[a;b]$ удовлетворяют условиям:

$$|p(x)|\le\overline{p}<\infty, \tag{2}$$

$h(x)$ – дифференцируема на $[a;b]$ и $h'(x)\ge l>0, x-h(x)\ge\sigma>0$, (3)

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x;t)\,dxdt=B^2<\infty. \tag{4}$$

Покажем, что уравнение (1) при выполнении условий (2) – (4) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма второго рода [3; 5]. Рядом с интегральным вполне непрерывным оператором K, который имеет вид

$$(Kv)(x)=\int_a^b K(x;t)v(t)\,dt, \forall v(x)\in L_2(a;b),$$

будем рассматривать оператор S такой, что

$$(Sv)(x)=\begin{cases} v(x), x\in\left[a,h^{-1}(a)\right],\\ v(x)-p(x)v(h(x)), x\in\left[h^{-1}(a),b\right],\end{cases} \tag{5}$$

где $v(x)$ – произвольная функция из $L_2(a;b)$.

Отметим, что этот оператор, как и оператор K, действует с $L_2(a;b)$ в $L_2(a;b)$. Легко показать, что оператор S линейный. Условия (2), (3) гарантируют его ограниченность. Действительно,

$$S=sup\frac{(Sv)(x)}{v(x)}\le 1+\left|\frac{p^2(x)}{h^{'}(x)}\right|^{1/2}\le 1+\frac{\overline{p}}{\sqrt{l}}<\infty,$$

где sup берется по $v(x)\in L_2(a;b), v(x)\ne 0$.

Эти же условия говорят о том, что оператор S обратимый. Обратный к нему оператор имеет вид

$$\left(S^{-1}v\right)(x)=\begin{cases} v(x), x\in\left[a,h^{-1}(a)\right],\\ v(x)+\sum\limits_{i=1}^{S}v(h^i(x)\prod\limits_{k=0}^{i-1}p\left(h^k(x)\right),\end{cases} \tag{6}$$

$$x\in\Delta s, s=\overline{1,m}.$$

Здесь, как и в дальнейшем,

$$\Delta s=\left[c_{s-1},c_s\right], c_0=a, c_s=h^{-1}\left(c_{s-1}\right), c_m=b, h^k(x)=h\left(h^{k-1}(x)\right), s=\overline{1,m}.$$

Иными словами, выражение (6) – это решение функционального уравнения

$$y(x)-p(x)y(h(x))=u(x), x\in[a;b],$$
$$y(x)=0, x\notin[a;b],$$

где $u(x)$ – известная, $y(x)$ – искомая функции, с помощью пошагового метода. Условие (3) гарантирует тот факт, что количество шагов m конечно и $m\le\frac{b-a}{\sigma}$.

Нетрудно убедиться в том, что оператор S^{-1}, как и оператор S, линейный и ограниченный. Таким образом, учитывая вышесказанное, мы можем рассматривать уравнение (1) как операторное уравнение

$$(Sy)(x)=f(x)+(Ky)(x), \tag{7}$$

где $f(x)$ – известная, $y(x)$ – искомая функции в $L_2(a;b)$.

Пусть $(Sy)(x)=u(x)$, тогда $y(x)=(S^{-1}u)(x)$, и мы от уравнения (7) приходим к уравнению

$$u(x)=f(x)+(Tu)(x). \tag{8}$$

Оператор $T=KS^{-1}$ Фредгольмов как суперпозиция Фредгольмового и линейного ограниченного операторов. Иными словами, применив упомянутую выше замену, мы превращаем интегро-функциональное уравнение (1) в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x)=f(x)+\int_a^b T(x;t)u(t)\,dt \tag{9}$$

с вполне непрерывным интегральным оператором T, ядро которого

$$T(x;t)=\begin{cases} K(x;t)+\sum\limits_{i=1}^{m-s} K\left(x;\left(h^{-1}\right)^k(t)\right)\prod\limits_{k=1}^{i} p\left[(h^{-1})^k(t)\right], t\in\Delta s,\\ K(x;t), t\in(c_{m-1};b), s=\overline{1,m-1}, x\in(a;b),\end{cases}$$

где $\left(h^{-1}\right)^k(t)=h^{-1}\left(\left(h^{-1}\right)^{k-1}(t)\right)$.

Метод коллокации решения интегро-функционального уравнения

Рассмотрим уравнения

$$y(x)-p(x)y(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)y(t)\,dt, x\in(a;b); y(x)=0, x\notin(a;b). \tag{10}$$

Идея метода относительно уравнения (10) заключается в том, что приближенное решение $y_m(x)$ ищем в виде

$$y_m(x)=\sum_{j=1}^{m} a_j\varphi_j(x)$$

и определяем из функционального уравнения

$$\begin{gathered} y_m(x)-p(x)y_m(h(x))=f(x)+\int_a^b K(x;t)y_m(t)\,dt,\\ y_m(x)=0, x\notin[a;b], \end{gathered} \tag{11}$$

$\{\varphi_j(x)\}$ – система линейно независимых на $[a;b]$ функций $j=\overline{1,m}$, а неизвестные параметры $a_j=a_j(n)$ находим из условия

$$\gamma_m(x_i)=0,\ x_i=a+i\frac{b-a}{n}, i=\overline{0,n}, \tag{12}$$

$$\gamma_m(x)=y_m(x)-p(x)y_m(h(x))-f(x)-\int_a^b K(x;t)y_m(t)\,dt. \tag{13}$$

Для нахождения параметров a_j получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}a_j = b_i, i=\overline{1,n}, \tag{14}$$

в которой β_{ij} вычисляются по формуле

$$\beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - T_j(x_i), b_i = f(x_i), i = \overline{1,n}. \tag{15}$$

Систему уравнений (14) целесообразно записать в векторном виде $\Lambda a_k = b_k$.

Коллокационно-итеративный метод решения интегро-функционального уравнения

Применим коллокационно-итеративный метод к уравнению (10). Приближенное решение $y_k(x)$ определяем согласно формул

$$y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt, x\in(a;b), \tag{16}$$

$$\begin{gathered} y_k(x) = 0, x \notin [a;b], \\ z_k(x) = y_{k-1}(x) + \omega_k(x), \\ \omega_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \eta_j(x), \\ \eta_j(x) = \left(S^{-1}\varphi_j\right)(x). \end{gathered} \tag{17}$$

Неизвестные параметры $a_j^k = a_j^k(n)$ находим из условия $\gamma_k(x_i) = 0$, где $x_i \in [a;b]$, $i=\overline{1,n}$ узлы коллокации и

$$\gamma_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)z_k(t)dt - y_k(x) + p(x)y_k(h(x)), x\in(a;b). \tag{18}$$

Введя обозначения $\mathcal{E}_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)y_{k-1}(t)dt - y_{k-1}(x) + p(x)y_{k-1}(h(x))$ и подставляя функцию $z_k(x)$, определенную формулой (17), в выражение (18) для поиска параметров a_j^k , получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}a_j^k = b_i^k, i=\overline{1,n}, \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered} \beta_{ij} = \varphi_j(x_i) - K_j(x_i), b_i^k = \mathcal{E}_k(x_i), \\ K_j(x) = \int_a^b K(x;t)\eta_j(t)dt, j=\overline{1,n}, \\ \eta_j(x) = \left(S^{-1}\varphi_j\right)(x), \\ b_i^k = \mathcal{E}_k(x_i). \end{gathered}$$

Систему уравнений (19) можно записать в виде $\Lambda a_k = b_k$, где b_k, a_k записаны в векторном виде и Λ – матрица, составленная из элементов β_{ij}.

Заметим, что в качестве приближения к искомому решению можно взять как функцию $y_k(x)$, так и функцию $z_k(x)$. Следует обратить внимание на то, что на основе анализа формул (16) – (18) при $\omega_k(x) = 0, k = 1,2,3,\ldots$ приближения $y_k(x)$ находятся методом последовательных приближений.

Алгоритмы (11) – (13) и (16) – (18) сводят рассматриваемую задачу к коллокационному и коллокационно-итеративному методу решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, для которых получены условия сходимости [2]. В частности, имеет место теорема.

Теорема 1. Пусть соблюдается условие

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^b \left| T(x,t) - T(x_0,t) \right| dt = 0, \forall x_0 \in [a,b]$$

и единица – регулярное значение интегрального уравнения (9). Пусть система функций $\{\varphi_i(x)\}$ и узлы $\{x_i\}, i = \overline{1,n}$ выбраны таким образом, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left| T(x,t) - H_n(x,t) \right| dt = 0,$$

где функция H_n выражается формулой $H_n(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) T(x_i,t).$

Тогда $q_n \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. существует такой номер n_0, что для всех фиксированных $n \ge n_0$ последовательность $\{y_k(x)\}$ согласно методу (17) – (19) строится однозначно и равномерно сходится к решению $y^*(x)$ уравнения (9).

Нестационарный коллокационно-итеративный метод

Пусть, как и раньше, $\{\varphi_i(x)\}$ – заданная ортогональная и полная в $L_2(a;b)$ система, а $\{P_k\}$ – последовательность проектирующих операторов, определяемых посредством формулы

$$\left(P_k v\right)(x) = \int_a^b P_k(x,t) v(t) dt, \forall v(x) \in L_2(a,b), \tag{20}$$

в которой

$$P_k(x,t) = \sum_{i=1}^{n_k} \mu_i \varphi_{i(x)} \varphi_{i(t)}, \mu_i^{-1} = \int_a^b \varphi_i^2(x) dx, \tag{21}$$

где $k = 1,2,3,\ldots, n_k > n_0 = n \ge 1, n_{k_1} \le n_{k_2}$ при $k_1 < k_2$.

Очевидно, проекционные операторы (20) ортогонально проектируют пространство $L_2(a;b)$ на его подпространство $L_2^k(a;b)$, причем $L_2^{k-1}(a;b) \subset L_2^k(a;b), k = 1,2,3,\ldots$.

Суть предлагаемого метода применительно к уравнению (10) состоит в следующем. Пусть, исходя из начального приближения $y_0(x) \in L_2(a,b)$ и функции $s_0(x)$ такой, что

$$y_0(x) - p(x)y_0(h(x)) = s_0(x), x \in (a,b), \qquad (22)$$
$$y_0(x) = 0, x \notin (a,b),$$

мы нашли приближение $y_{k-1}(x)$ и функцию $s_{k-1}(x)$.

Вычисляем функцию

$$\tilde{s}_{k-1}(x) = \int_a^b P_{k-1}(x,t) s_{k-1}(t)dt,$$

где $P_{k-1}(x,t)$ имеет вид (21). Решаем уравнения:

$$\begin{gathered} \tilde{y}_{k-1}(x) - p(x)\tilde{y}_{k-1}(h(x)) = s_{k-1}(x), x \in (a,b), \\ \tilde{y}_{k-1}(x) = 0, x \notin (a,b). \end{gathered} \qquad (23)$$

Приближение $y_k(x)$ определяем как решение уравнения

$$\begin{gathered} y_k(x) - p(x)y_k(h(x)) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\tilde{z}_k(t)dt, x \in (a,b), \\ y_k(x) = 0, x \notin (a,b), \end{gathered} \qquad (24)$$

в котором

$$\tilde{z}_k(x) = \tilde{y}_{k-1}(x) + \omega_k(x), \omega_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \eta_j(x), x \notin (a,b). \qquad (25)$$

Неизвестные параметры a_j^k находим из условия

$$\tilde{r}_k(x_i) = 0, i = \overline{1,n}, \qquad (26)$$

где

$$\tilde{r}_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\tilde{z}_k(t)dt - \tilde{z}_k(x) + p(x)\tilde{z}_k(h(x)), \qquad (27)$$

система функций $\{\eta_i(x)\}$ в выражениях (25), (26) определяются из уравнений, которые в нашем случае принимают вид

$$\begin{gathered} \eta_i(x) - p(x)\eta_i(h(x)) = \varphi_i(x), x \in (a,b), \\ \eta_i(x) = 0, x \notin (a,b); \end{gathered} \qquad (28)$$

где система функций $\{\varphi_i(x)\}$, как уже отмечалось, ортогональная и полная в пространстве $L_2(a;b)$.

Вводя обозначение

$$\varepsilon_k(x) = f(x) + \int_a^b K(x;t)\,\tilde{y}_k(t)\,dt - \tilde{y}_{k-1}(x) + p(x)\tilde{y}_{k-1}(h(x))$$

и подставляя функцию $\tilde{z}_k(x)$, определяемую формулой (25), в выражение (27), а затем полученный результат – в условие (26) для нахождения параметров a_j^k, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, i = \overline{1,n}, \tag{29}$$

в которой β_{ij} вычисляются по формуле

$$\beta_{ij} = \int_a^b \{\varphi_j(x) - K_j(x)\}\psi_i(x)dx, i, j = \overline{1,n}, \tag{30}$$

и

$$b_i^k = \varepsilon_k(x), i = \overline{1,n}. \tag{31}$$

Как и раньше, систему уравнений (29) будем записывать в векторном виде $\Lambda a_k = b_k$.

Заметим, что в качестве приближения к искомому решению можно брать любую из функций $y_k(x), \tilde{y}_k(x), \tilde{z}_k(x)$.

Следует обратить внимание на то, что на основе анализа формул (22) – (27) при $s_0(x) = 0$ приближение $\tilde{z}_1(x)$ совпадает с приближением, построенным по колокационному методу, приближение $y_1(x)$ – с приближением, построенным по улучшенному колокационному методу, а при $\omega_k(x) = 0, k = 1,2,3,...$ приближение $y_k(x)$ находится по нестационарному методу последовательных приближений.

Алгоритм (22) – (27) можно свести к нестационарному колокационно-итеративному методу решения интегро-функционального уравнения (1). В самом деле, формулы (22) – (24) и (27) можно записать в виде:

$$(S\tilde{y}_{k-1})(x) = (P_{k-1}S_{k-1})(x),$$
$$(Sy_k)(x) = f(x) + (K\tilde{y}_{k-1})(x) + (K\omega_k)(x),$$
$$\tilde{r}_k = f(x) + (K\tilde{y}_{k-1})(x) + (K\omega_k)(x) - (S\tilde{y}_{k-1})(x) - (S\omega_k)(x).$$

С помощью этих формул условие (26) легко преобразуется к виду:

$$(Sy_k - S\tilde{y}_{k-1} - S\omega_k)(x_i) = 0, i = \overline{1,n}.$$

Теперь положим

$$u_k(x) = s_k(x) = \left(Sy_k\right)(x), \alpha_k(x) = \left(S\omega_k\right)(x), \tag{32}$$

откуда следует

$$y_k(x) = \left(S^{-1}u_k\right)(x), \omega_k(x) = \left(S^{-1}\alpha_k\right)(x). \tag{33}$$

На основании формул (32), (33) и соотношения (28) получаем:

$$u_k(x) = f(x) + \left(TP_{k-1}u_{k-1}\right)(x) + \left(T\alpha_k\right)(x), \tag{34}$$

$$\alpha_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j(x), k = 1, 2, 3, ..., \tag{35}$$

$$\int_a^b \left\{u_k(x) - \left(P_{k-1}u_{k-1}\right)(x) - \alpha_k(x)\right\}\varphi_i(x)dx = 0, i = \overline{1, n}. \tag{36}$$

Теперь видно, что соотношения (34) – (36) – это нестационарный колокационно-итеративный метод решения интегро-функционального уравнения (1). В работах [1; 3] установлены различные достаточные условия сходимости и оценки погрешности этого метода для интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Из изложенных там результатов, в частности, следует утверждение.

Теорема 2. Если единица не является точкой спектра интегрального оператора T, при $k \to \infty$, и система функций $\{\varphi_i(x)\}$ полна в пространстве $L_2^k(a;b)$, то существует такой номер n, при котором нестационарный колокационно-итеративный метод (22) – (27) сходится, причем быстрота сходимости увеличивается с ростом n.

Заключение

Рассмотрены приближенные методы решения интегро-функциональных уравнений. Исследован коллокационный и коллокционно-итеративные (стационарный и нестационарный) методы нахождения приближенных решений интегро-функциональных уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайникко, Г. М. О сходимости и устойчивости метода коллокации / Г. М. Вайникко // Диференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 2. – С. 244–254.

2. Лучка, А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А. Ю. Лучка. – Киев : Наук. думка, 1980. – 264 с.

3. Лучка, А. Ю. Быстрота сходимости одного проекционно-итеративного метода, основанного на тригонометрической колокации, для линейных интегральных уравнений / А. Ю. Лучка, Е. М. Луцев // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 3. – С. 10–13.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 26.10.2017

Konet I., Geseleva K. **Collocation and Collocation-Iterative Methods of Solving Integrally-Functional Equations**

Approximatemethodsforsolving integral-functional equations are considered in the article. Collocation and collocation-iterative (stationary and non-stationary) methods for finding approximate solutions of integral-functional equations are investigated.