

УДК 513.82

**А.А. Юдов<sup>1</sup>, Е.В. Арабчик<sup>2</sup>, М.А. Кононюк<sup>3</sup>, Е.А. Сирисько<sup>4</sup>**  
<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического  
 моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина  
<sup>2</sup>магистрант физико-математического факультета  
 Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина  
<sup>3</sup>магистрант физико-математического факультета  
 Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина  
<sup>4</sup>магистрант физико-математического факультета  
 Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина  
 e-mail: modelmath@brsu.brest.by

### ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

Целью исследования является нахождение инвариантных подпространств, прямых и плоскостей для подгрупп Ли группы Ли  $H$  вращений пятимерного пространства Лоренца и классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пятимерного пространства Лоренца.

Изучение геометрии однородных пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л.К. Тутаев, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и др. В работе исследуются подгруппы Ли группы Ли движений пятимерного пространства Лоренца, находятся инвариантные прямые и  $K$ -плоскости для таких подгрупп и находятся редуктивные однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пятимерного пространства Лоренца.

#### Инвариантные подпространства подгрупп Ли

Рассмотрим пространство  $L_5$  пятимерное лоренцово пространство.

Выберем в пространстве  $L_5$  репер  $\mathcal{E} = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ , причем  $e_1^2 = -1, e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$ .

Произвольную точку  $M$  пространства  $L_5$ , в репере  $\mathcal{E}$  зададим координатами  $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ , которые будем записывать в виде  $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \equiv (X)_{\mathcal{E}}$ .

На множестве реперов пространства  $L_5$  действует группа Ли  $G$  движений, которая при заданном репере  $\mathcal{E}$  изоморфна группе матриц вида:

$$\bar{A} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^T$ ,  $A - (5 \times 5)$  – матрица, причем  $A^{T1}E_5A = {}^1E_5$ , где знак  $T$  означает транспонирование, а матрица  $E_5$  является единичной матрицей, причем первый элемент по главной диагонали равен  $-1$ , остальные элементы главной диагонали  $1$ , а прочие элементы – нули.

При движении, заданном матрицей (1), репер  $\mathcal{E}$  переходит в репер  $\mathcal{E}' = (0, e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5) = (0', e')$ , где  $e' = eA$ ,  $0'(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (T)_e$ , а точка  $M$  переходит в точку  $M'$ , имеющую в репере  $\mathcal{E}'$  такие же координаты, какие точка  $M$  имеет в репере  $\mathcal{E}$ .

Пусть  $M'(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (X)_{e'}$ ,  $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (X)_e$ . Тогда получим:  $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) = eA(X) = e((T) + A(X))$ . С другой стороны,  $\overline{OM'} = e(X')$ . Отсюда  $(X') = (T) + A(X)$ , т.е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^T = \overline{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T. \quad (2)$$

Таким образом, в пространстве  $L_5$  действует слева группа Ли  $G$ , которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства  $L_5$  по формуле (2). Алгебру Ли  $\overline{G}$  этой группы можно отождествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix} \right\},$$

где  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5)^T$ , а матрица  $B$  удовлетворяет условию:  $B^{T_1}E_5 + E_5B = 0$ .

Группа Ли  $H$  стационарности точки  $O$  и алгебра Ли  $\overline{H}$  этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\}, \quad \overline{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\}.$$

Рассмотрим в алгебре Ли  $\overline{G}$  базис:

$$\begin{aligned} i_1 &= E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{61}, i_7 = E_{23} + E_{32}, i_8 = E_{24} + E_{42}, \\ i_9 &= E_{25} + E_{52}, i_{10} = E_{26} + E_{62}, i_{12} = E_{34} - E_{43}, i_{13} = E_{35} - E_{53}, i_{14} = E_{36} - E_{63}, \\ i_{16} &= E_{45} - E_{54}, i_{17} = E_{46} - E_{64}, i_{19} = E_{56} - E_{65}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E_{\alpha\beta} - (6 \times 6)$  – матрицы, у которых в  $\alpha$  – й строке,  $\beta$  – м столбце стоит 1, а остальные элементы нули. При этом вектора  $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$  задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора  $i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}$ , задают базис алгебры Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$  вращений пространства  $L_5$ .

Согласно формуле

$$[A, B] = AB - BA, \quad (4)$$

где  $A, B \in \overline{G}$ , получим формулы для коммутаторов базисных векторов  $i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}$ :

$$\begin{aligned}
 [i_7; i_8] &= i_{12} & [i_8; i_{16}] &= i_9 & [i_7; i_{14}] &= i_{10} & [i_9; i_{10}] &= i_{19} & [i_{13}; i_{10}] &= 0 \\
 [i_7; i_9] &= i_{13} & [i_9; i_{12}] &= 0 & [i_7; i_{17}] &= 0 & [i_9; i_{14}] &= 0 & [i_{13}; i_{14}] &= -i_{19} \\
 [i_7; i_{12}] &= i_8 & [i_9; i_{13}] &= -i_6 & [i_7; i_{19}] &= 0 & [i_9; i_{17}] &= 0 & [i_{13}; i_{17}] &= 0 \\
 [i_7; i_{13}] &= i_9 & [i_9; i_{16}] &= -i_8 & [i_8; i_{10}] &= i_{17} & [i_9; i_{19}] &= i_{10} & [i_{13}; i_{19}] &= i_{14} \\
 [i_7; i_{16}] &= 0 & [i_{12}; i_{13}] &= -i_{16} & [i_8; i_{17}] &= i_{10} & [i_{12}; i_{10}] &= 0 & [i_{16}; i_{10}] &= 0 \\
 [i_8; i_9] &= i_{16} & [i_{12}; i_{16}] &= i_{13} & [i_8; i_{14}] &= 0 & [i_{12}; i_{14}] &= -i_{17} & [i_{16}; i_{14}] &= 0 \\
 [i_8; i_{12}] &= -i_7 & [i_{13}; i_{16}] &= -i_{12} & [i_8; i_{19}] &= 0 & [i_{12}; i_{17}] &= i_{14} & [i_{16}; i_{17}] &= -i_{19} \\
 [i_8; i_{13}] &= 0 & [i_7; i_{10}] &= i_{14} & [i_{10}; i_{18}] &= -i_9 & [i_{14}; i_{17}] &= -i_{12} & [i_{16}; i_{19}] &= i_{17} \\
 [i_{14}; i_{19}] &= -i_{13} & [i_{10}; i_{17}] &= -i_8 & [i_8; i_{19}] &= 0 & [i_{12}; i_{19}] &= 0 & [i_{17}; i_{19}] &= -i_{16} \\
 [i_{10}; i_{14}] &= -i_7.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Всего получено 29 подгрупп Ли  $G_1, \dots, G_{29}$  группы Ли вращений, которые в базисе (3) задаются своими алгебрами Ли  $G_1, \dots, G_{29}$  в виде (причем группа  $G_{29}$  совпадает с группой Ли всех вращений пространства  $L_5$ ):

$$\begin{aligned}
 \overline{G_1} &= \{i_{19}\}, \quad \overline{G_2} = \{i_{19} + \beta i_{12}\}, \quad \overline{G_3} = \{i_7\}, \quad \overline{G_4} = \{i_{13} + i_9\}, \quad \overline{G_5} = \{i_{16} + \beta i_7\}, \\
 \overline{G_6} &= \{i_{13} + i_9 + \beta i_{17}\}, \quad \overline{G_7} = \{i_{19}, i_{12}\}, \quad \overline{G_8} = \{i_{16}, i_7\}, \quad \overline{G_9} = \{i_{13} + i_9, i_{17}\}, \\
 \overline{G_{10}} &= \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9\}, \quad \overline{G_{11}} = \{i_{13} + i_9, i_7\}, \quad \overline{G_{12}} = \{i_{19}, i_{17}, i_{16}\}, \\
 \overline{G_{13}} &= \{i_{19} + i_{12}, i_{17} - i_{13}, i_{14} + i_{16}\}, \quad \overline{G_{14}} = \{i_{12}, i_8, i_7\}, \\
 \overline{G_{15}} &= \{i_{10} + i_{14}, i_9 + i_{13}, i_7\}, \quad \overline{G_{16}} = \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{19}\}, \\
 \overline{G_{17}} &= \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8 + \lambda i_{19}\}, \quad \overline{G_{18}} = \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
 \overline{G_{19}} &= \{i_{12}, i_8, i_7, i_{19}\}, \quad \overline{G_{20}} = \{i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_7\}, \quad \overline{G_{21}} = \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_7\}, \\
 \overline{G_{22}} &= \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{19}\}, \quad \overline{G_{23}} = \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_7, i_{19}\}, \\
 \overline{G_{24}} &= \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{19}, i_7\}, \quad \overline{G_{25}} = \{i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
 \overline{G_{26}} &= \{i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_{14}, i_{13}, i_{12}\}, \quad \overline{G_{27}} = \{i_{16}, i_{13}, i_9, i_{12}, i_8, i_7\}, \\
 \overline{G_{28}} &= \{i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_7\}, \quad \overline{G_{29}} = \{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}\}.
 \end{aligned}$$

В данной статье для каждой из групп  $G_1 \dots G_{28}$  находятся все инвариантные одно- двух- трех- и четырехмерные подпространства, а также инвариантные прямые, 2-плоскости, 3-плоскости, 4-плоскости.

Рассмотрим группу  $G_1$  с алгеброй Ли  $\overline{G_1} = \{i_{19}\}$ .

$$\{i_{19}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Необходимо найти все инвариантные одномерные пространства

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, -a_5, a_4) = \lambda \cdot (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).$$

Отсюда следует система:

$$\begin{cases} 0 = \lambda a_1, \\ 0 = \lambda a_2, \\ 0 = \lambda a_3, \\ -a_5 = \lambda a_4, \\ a_4 = \lambda a_5. \end{cases}$$

Из четвертого и пятого уравнений системы следует:

$$-a_5 = \lambda^2 a_5.$$

Рассмотрим два случая:

1.  $\lambda \neq 0$

Если  $\lambda \neq 0$ , то следует, что  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = 0$ ,

$-a_5 = \lambda^2 a_5 \Rightarrow a_5 = 0$ , иначе  $\lambda^2 = -1$ , значит, и  $a_4 = 0$ .

**Вывод:** нет ненулевых решений.

2.  $\lambda = 0 \Rightarrow a_4 = 0, a_5 = 0$ .

Итог:  $(a_1, a_2, a_3, 0, 0) \{a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3\}$ .

**Теорема 1.** Относительно группы  $G_1$  инвариантны одномерные подпространства  $\{a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3\}$ , двумерные подпространства  $\{\bar{e}_1 + a_3 \bar{e}_3, \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_3\}$ ,  $\{\bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ,  $\{\bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 + a_5 \bar{e}_5, \bar{e}_4 + b_5 \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ,  $\{\bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3, \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_2 + a_3 \bar{e}_3 + a_4 \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_3 + a_5 \bar{e}_5, \bar{e}_4\}$ ,  $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{a_3 \bar{e}_1 - b_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ ,  $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_4 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_3 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_1, a_4 \bar{e}_2 - b_4 \bar{e}_3, -a_5 \bar{e}_2 - b_5 \bar{e}_5 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_1, -a_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, -a_5 \bar{e}_2 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_1, -a_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, -a_4 \bar{e}_2 + \bar{e}_4\}$ ,  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, a_5 \bar{e}_3 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$  и  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ , четырехмерные подпространства  $\{a_3 \bar{e}_1 + a_1 \bar{e}_3, a_3 \bar{e}_2 - a_2 \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ .

Находя инвариантные подпространства для остальных подгрупп Ли  $G_2 \dots G_{28}$ , аналогично получаем следующие теоремы.

**Теорема 2.** Относительно группы  $G_2$  инвариантны одномерные подпространства  $\{a_3 \bar{e}_3 + a_4 \bar{e}_4 + a_5 \bar{e}_5\}$ , двумерные подпространства  $\{\bar{e}_1 + a_3 \bar{e}_5, \bar{e}_2 + b_3 \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2 + a_4 \bar{e}_4 + a_5 \bar{e}_5, \bar{e}_3 + a_5 \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2, \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_2, \bar{e}_5\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{a_3 \bar{e}_1 - b_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_2 + \bar{e}_4, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_4 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_3 + \bar{e}_5\}$ ,

$\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 + \bar{e}_4\}$ ,  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_5 \bar{e}_3 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$   
и  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4\}$ .

**Теорема 3.** Относительно группы  $G_3$  инвариантны одномерные подпространства  $\{a_1 \bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2\}$ ,  $\{a_3 \bar{e}_3 + a_4 \bar{e}_4 + a_5 \bar{e}_5\}$ , двумерные подпространства  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ,  $\{\bar{e}_1 \pm \bar{e}_2 + a_5 \bar{e}_5, \bar{e}_3 + a_5 \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_1 \pm \bar{e}_2, \bar{e}_4 + b_5 \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_1 \pm \bar{e}_2, \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_2, \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_3 + a_5 \bar{e}_5, \bar{e}_4 + b_5 \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{a_3 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_2 + \bar{e}_4; a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_4 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4; a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_3 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 + \bar{e}_4\}$ ,  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_5 \bar{e}_3 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4\}$ .

**Теорема 4.** Относительно группы  $G_5$  инвариантны одномерные подпространства  $\{a_1 \beta \bar{e}_1 + a_2 \beta \bar{e}_2 + a_3 \beta \bar{e}_3 + a_4 \bar{e}_4\}$ , двумерные подпространства  $\{\bar{e}_2, \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{\bar{e}_1, -a_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, -a_4 \bar{e}_2 + \bar{e}_4\}$ ,  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_5 \bar{e}_3 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ .

**Теорема 5.** Относительно группы  $G_6$  инвариантных одномерных подпространств нет, инвариантны двумерные подпространства  $\{\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_4 + b_5 \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_3, \bar{e}_5\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, a_5 \bar{e}_3 + b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, -a_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4\}$ .

**Теорема 6.** Относительно группы  $G_7$  инвариантных одномерных подпространств нет, инвариантны двумерные подпространства  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ ,  $\{\bar{e}_3 + a_4 \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$  трехмерные инвариантные подпространства  $\{\bar{e}_1, -a_3 \bar{e}_2 + \bar{e}_3, -a_4 \bar{e}_2 + \bar{e}_4\}$ .

**Теорема 7.** Относительно группы  $G_8$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства  $\{\bar{e}_1 + a_2 \bar{e}_2, \bar{e}_5\}$ ,  $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ , трехмерных инвариантных подпространств нет.

**Теорема 8.** Относительно группы  $G_9$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство  $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{\bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ .

**Теорема 9.** Относительно группы  $G_{10}$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство  $\{\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_5\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_2 \bar{e}_1 - b_4 \bar{e}_3 + \bar{e}_4, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_3 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 + \bar{e}_4\}$ .

**Теорема 10.** Относительно группы  $G_{11}$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство  $\{\bar{e}_1 - \bar{e}_2, \bar{e}_5\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_5 \bar{e}_1 - b_5 \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}$ ,  $\{a_2 \bar{e}_1 + \bar{e}_2, a_3 \bar{e}_1 + \bar{e}_3, a_4 \bar{e}_1 + \bar{e}_4\}$ .

**Теорема 11.** Относительно группы  $G_{12}$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерное подпространство  $\{\bar{e}_4, \bar{e}_5\}$ , трехмерное инвариантное подпространство  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ .

**Теорема 12.** Относительно группы  $G_{13}$  инвариантных одномерных подпространств нет, двумерных подпространств нет, трехмерных инвариантных подпространств нет.

**Теорема 13.** Относительно группы  $G_{14}$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства  $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$ , трехмерное инвариантное подпространство  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ .

**Теорема 14.** Относительно группы  $G_{15}$  инвариантны одномерные подпространства  $\{\overline{a_1 e_1} + \overline{a_2 e_2}\}$ ,  $\{\overline{a_1 e_1} - \overline{a_1 e_2} + \overline{a_3 e_3} + \overline{a_5 e_5}\}$ , двумерные подпространства,  $\{\overline{e_1} - \overline{e_2} + \overline{a_4 e_4} + \overline{a_5 e_5}, \overline{e_3} + \overline{b_4 e_4} + \overline{b_5 e_5}\}$ ,  $\{\overline{e_1} + \overline{a_2 e_2} + \overline{a_3 e_3} + \overline{a_5 e_5}, \overline{e_4} - \overline{a_5 e_5}\}$ ,  $\{\overline{e_1} - \overline{e_2}, \overline{e_5}\}$ ,  $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{\overline{a_2 e_1} + \overline{e_2}, \overline{a_2 e_1} - \overline{b_4 e_3} + \overline{e_4}; \overline{a_5 e_1} - \overline{b_5 e_3} + \overline{e_5}\}$ ,  $\{\overline{a_2 e_1} + \overline{e_2}, \overline{a_3 e_1} + \overline{e_3}, \overline{a_5 e_1} - \overline{b_5 e_4} + \overline{e_5}\}$ ,  $\{\overline{a_2 e_1} + \overline{e_2}, \overline{a_3 e_1} + \overline{e_3}, \overline{a_4 e_1} + \overline{e_4}\}$ ,  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ ,  $\{\overline{a_2 e_1} + \overline{a_1 e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}, \overline{e_5}\}$ .

**Теорема 15.** Относительно группы  $G_{16}$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства  $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ .

**Теорема 16.** Относительно группы  $G_{17}$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства  $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$ , трехмерное инвариантное подпространство  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ .

**Теорема 17.** Относительно группы  $G_{18}$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства  $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ .

**Теорема 18.** Относительно группы  $G_{19}$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства  $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ .

**Теорема 19.** Относительно группы  $G_{20}$  инвариантных одномерных подпространств нет, есть двумерные подпространства  $\{\overline{e_4}, \overline{e_5}\}$ , трехмерные инвариантные подпространства  $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\}$ .

**Теорема 20.** Относительно группы  $G_{21} - G_{28}$  инвариантных одномерных подпространств нет, двумерных подпространств нет, трехмерных инвариантных подпространств нет.

### Образы стационарности групп Ли

**Определение 1.** Образом стационарности подгруппы  $K$  группы  $G$  называется совокупность  $D$  фигур пространства  $L_5$  и ему соответствующего векторного про-

пространства  ${}^1E_5$  таких, что группе  $K$  принадлежат те и только те преобразования, при которых каждая из фигур совокупности  $D$  инвариантна.

**Определение 2.** Упорядоченная совокупность фигур пространства  $L_5$  называется флагом, если все фигуры этой совокупности являются  $k$ -плоскостями ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) пространства  $L_5$ , причем каждая последующая плоскость содержится в предыдущей.

Зафиксируем  $\overline{e_5}$ . Рассмотрим вектор  $(0,0,0,0,1)$  и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(0, 0, 0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & 0 & \omega & \varepsilon & \varphi \\ \beta & -\omega & 0 & \psi & \rho \\ \gamma & -\varepsilon & -\psi & 0 & \eta \\ \delta & -\varphi & -\rho & -\eta & 0 \end{pmatrix} = (\delta; -\varphi; -\rho; -\eta; 0) = \lambda \cdot \overline{e_5} = \lambda (0, 0, 0, 0, 1).$$

Из этого следует, что  $\lambda = 0, \delta = 0, -\varphi = 0, -\rho = 0, -\eta = 0$ .

При этом получаем алгебру Ли группы Ли  $\overline{G_{27}} = \{i_7, i_8, i_9, i_{12}, i_{13}, i_{16}\}$ . Таким образом, группа Ли  $G_{27}$  имеет в качестве образа стационарности флаг  $\{R_0, R_1\}$ .

Аналогично получаем следующие образы стационарности, результаты запишем в виде следующих теорем:

**Теорема 21.** Образом стационарности для подгруппы Ли  $G_{26}$  является флаг  $\{R_0, {}^1R_1\}$ .

**Теорема 22.** Образом стационарности для подгруппы Ли  $G_{28}$  является флаг  $\{R_0, R_1^1\}$ .

**Теорема 23.** Если  $\lambda = 0$ , то образом стационарности для подгруппы Ли  $G_{25}$  является флаг  $\left\{ R_0, \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ R_0, & R_1 \end{smallmatrix} \right\}$ .

**Теорема 24.** Образом стационарности для подгруппы Ли  $G_{20}$  является флаг  $\{R_0, R_2\}$ .

**Теорема 25.** Если  $\eta = 0$ , то образом стационарности для подгруппы Ли  $G_{14}$  получим флаг  $\left\{ R_0, \begin{smallmatrix} 0 \\ R_0, & R_2 \end{smallmatrix} \right\}$ .

**Теорема 26.** Образом стационарности для подгруппы Ли  $G_{19}$  является флаг  $\{R_0, {}^1R_2\}$ .

**Теорема 27.** Если  $\alpha = 0$ , то образом стационарности для подгруппы Ли  $G_{12}$  получим флаг  $\left\{ R_0, \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ R_0, & R_2 \end{smallmatrix} \right\}$ .

Используя геометрические характеристики подгрупп Ли, мы получаем цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства  $L_5$ .

Цепочки:

$$H \supset G_{28}; G_{27}, G_{26}, G_{25}; G_{24}; G_{23}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{19}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{15}, G_{14}, G_{13}, G_{12}; G_{11}, G_{10}, G_9, G_8, G_7; G_6, G_5, G_4, G_3, G_2, G_1.$$

$$G_{27} \supset G_{25}; G_{22}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{12}; G_{10}, G_9; G_6, G_4, G_1.$$

$$G_{26} \supset G_{14}; G_{11}, G_8; G_5, G_4, G_3.$$

$$G_{25} \supset G_{13}, G_{12}; G_7; G_2, G_1.$$

$$G_{24} \supset G_{22}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{12}; G_{10}, G_9; G_6, G_4, G_1.$$

$$G_{23} \supset G_{22}, G_{21}; G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{15}; G_{11}, G_{10}; G_4, G_3, G_2, G_1.$$

$$G_{22} \supset G_{16}, G_{15}; G_{11}, G_{10}; G_4, G_3, G_2, G_1.$$

$$G_{21} \supset G_{18}, G_{17}, G_{16}; G_{10}; G_4, G_1.$$

$$G_{20} \supset G_{14}; G_7; G_3, G_2, G_1.$$

$$G_{19} \supset G_{12}; G_8; G_3, G_1.$$

$$G_{18} \supset G_{10}; G_4.$$

$$G_{17} \supset G_{10}; G_4.$$

$$G_{16} \supset G_{10}; G_4, G_1.$$

$$G_{15} \supset G_{11}, G_{10}; G_4, G_3.$$

$$G_{14} \supset G_3.$$

$$G_{13} \supset G_2.$$

$$G_{12} \supset G_1.$$

$$G_{11} \supset G_4, G_3.$$

$$G_{10} \supset G_4.$$

$$G_8 \supset G_5, G_3.$$

$$G_7 \supset G_2, G_1.$$

Пусть  $G$  группа Ли  $H_1, H_2$  ее подгруппы Ли, причем  $H_1 \subset H_2$ . Каноническим морфизмом однородного пространства  $G/H_1$  в однородное пространство  $G/H_2$  называется морфизм  $f$  вида:

$$f: G/H_1 \rightarrow G/H_2: aH_1 \rightarrow aH_2 \text{ для любого } a \in G.$$

Таким образом, полученная выше классификация цепочек подгрупп Ли группы вращений пространства  $L_5$  приводит к классификации всех канонических морфизмов однородных пространств со структурной группой  $H$  – группой всех вращений пространства  $L_5$ .

Классификация всех связных подгрупп Ли группы Ли  $G$  с точностью до сопряженности имеется в [1]. Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой  $H$ . Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства.



В данной главе найдены редуктивные однородные пространства вида  $H / G_i$ , где  $G_i$  – связные подгруппы Ли группы Ли  $H$  вращений пространства  $L_5$ . Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства  $H / G_i$  рассматриваются соответствующие алгебры Ли  $\overline{H}$  и  $\overline{G}_i$ , затем находятся все  $(\dim H - \dim G_i)$ -мерные подпространства алгебры Ли  $\overline{H}$ , инвариантные относительно  $\text{ad } \overline{G}_i$ . Среди таких пространств находятся дополнительные к  $\overline{G}_i$ . Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства  $H / G_i$ . Поскольку пространство  $G / H$  редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства  $G / G_i$ .

**Определение 1.** Однородное пространство  $H / G_i$  называется редуктивным, если алгебра Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$  распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{G} = m + \overline{G}_i \tag{6}$$

причем подпространство  $m$  инвариантно относительно  $\text{ad } \overline{G}_i$ , где  $\text{ad } \overline{G}_i$  – присоединенное представление алгебры Ли  $\overline{G}$ .

Рассмотрим однородное пространство  $H / G_{14}$ ,  $\overline{G}_{14} = \{i_7, i_8, i_{12}\}$ ,  $a = \{i_7\}$ ,  $\overline{H} = \{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}\}$ .

1<sup>0</sup> случай:

$x_1$	1		$q$	$a$	$z$	$x_1 = i_8 + qi_{16} + ai_{17} + zi_{19}$					
$x_2$	1		$w$	$s$	$x$	$x_2 = i_9 + wi_{16} + si_{17} + xi_{19}$					
$x_3$		1	$e$	$d$	$c$	$x_3 = i_{10} + ei_{16} + di_{17} + ci_{19}$					
$x_4$			1	$r$	$f$	$v$	$x_4 = i_{12} + ri_{16} + fi_{17} + vi_{19}$				
$x_5$				1	$t$	$g$	$b$	$x_5 = i_{13} + ti_{16} + gi_{17} + bi_{19}$			
$x_6$					1	$y$	$h$	$n$	$x_6 = i_{14} + yi_{16} + hi_{17} + ni_{19}$		
$x_7$						1	$u$	$j$	$m$	$x_7 = i_7 + ui_{16} + ji_{17} + mi_{19}$	
	$i_8$	$i_9$	$i_{10}$	$i_{12}$	$i_{13}$	$i_{14}$	$i_7$	$i_{16}$	$i_{17}$	$i_{19}$	

Используя таблицу коммутаторов, получим

$$[a, x_1] = i_{12}, [a, x_2] = i_{13}, [a, x_3] = i_{14}, [a, x_4] = i_8, [a, x_5] = i_9, [a, x_6] = i_{10}, [a, x_7] = 0. \tag{7}$$

Приравнивая правые части равенств (7) линейным комбинациям векторов  $x_1 \dots x_7$ :

$$\alpha_k i_8 + \beta_k i_9 + \gamma_k i_{10} + \delta_k i_{12} + \omega_k i_{13} + \varepsilon_k i_{14} + \rho_k i_{17} + i_{16} (\alpha_k q + \beta_k w + \gamma_k e + \delta_k r + \omega_k t + \varepsilon_k y + \rho_k u) + i_{17} (\alpha_k a + \beta_k s + \gamma_k d + \delta_k f + \omega_k g + \varepsilon_k h + \rho_k j) + i_{19} (\alpha_k z + \beta_k x + \gamma_k c + \delta_k v + \omega_k b + \varepsilon_k n + \rho_k m)$$

где  $k = 1 \dots 7$ , и проводя соответствующие вычисления, получим:

- 1)  $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 1, \omega_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \rho_1 = 0,$   
 $r = 0, f = 0, v = 0$
- 2)  $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 1, \varepsilon_2 = 0, \rho_2 = 0,$   
 $t = 0, g = 0, b = 0$

- 3)  $\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, \delta_3 = 0, \omega_3 = 0, \varepsilon_3 = 1, \rho_3 = 0,$   
 $y = 0, h = 0, n = 0$
- 4)  $\alpha_4 = 1, \beta_4 = 0, \gamma_4 = 0, \delta_4 = 0, \omega_4 = 0, \varepsilon_4 = 0, \rho_4 = 0,$   
 $q = 0, a = 0, z = 0$
- 5)  $\alpha_5 = 0, \beta_5 = 1, \gamma_5 = 0, \delta_5 = 0, \omega_5 = 0, \varepsilon_5 = 0, \rho_5 = 0,$   
 $w = 0, s = 0, x = 0$
- 6)  $\alpha_6 = 0, \beta_6 = 0, \gamma_6 = 1, \delta_6 = 0, \omega_6 = 1, \varepsilon_6 = 0, \rho_6 = 0,$   
 $e = 0, d = 0, c = 0.$

Из равенств 1–6 можно сделать вывод, что относительно оператора  $i_7$  инвариантно следующее пятимерное подпространство:

$$i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_7 + ui_{16} + ji_{17} + mi_{19}.$$

**Теорема 28.** Однородное пространство  $H/G_8$  является редуکتивным. Редуکتивными дополнениями для него являются пространства  $m = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{17}, i_{19}\}.$

**Теорема 29.** Однородное пространство  $H/G_{14}$  является редуکتивным. Редуکتивными дополнениями для него являются пространства  $m = \{i_9, i_{10}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}, i_{19}\}.$

**Теорема 30.** Однородное пространство  $H/G_{19}$  является редуکتивным. Редуکتивными дополнениями для него являются пространства  $m = \{i_9, i_{10}, i_{13}, i_{14}, i_{16}, i_{17}\}.$

**Теорема 31.** Однородное пространство  $H/G_{20}$  является редуکتивным. Редуکتивными дополнениями для него являются пространства  $m = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}.$

**Теорема 32.** Однородное пространство  $H/G_{26}$  является редуکتивным. Редуکتивным дополнением для него является пространства  $m = \{i_7, i_8, i_9, i_{10}\}.$

**Теорема 33.** Однородное пространство  $H/G_{27}$  является редуکتивным. Редуکتивным дополнением для него является пространства  $m = \{i_{10}, i_{14}, i_{17}, i_{19}\}.$

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – Т. 126, № 1. – С. 13–22.
2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.03.2018

*Yudov A.A., Arabchik E.V., Kononyuk M.A., Sirisko E.A. Invariant Characteristics of Lie Subgroup of Lie Group of Motions of the Five-Dimensional Lorentz Space*

*The aim of the study is to find invariant subspaces, lines, and planes for Lie subgroups of the Lie group  $H$  of rotations of the five-dimensional Lorentz space and the classification of homogeneous reductive spaces with a fundamental group-the Lie group of motions of the five-dimensional Lorentz space.*