УДК 517.925

Е.В. Грицук[1], Н.А. Лукашик[2]
[1]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*
[2]*магистрант физико-математического факультета Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*
e-mail: lukashik92@inbox.ru[2]

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ АНАЛОГА ВТОРОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Исследуется решение уравнения шестого порядка иерархии второго уравнения Пенлеве в окрестности подвижного полюса. Методом резонансов найдены номера произвольных коэффициентов рядов Лорана, и с помощью системы компьютерной алгебры Maple подтверждено их соответствие числу положительных резонансов.

Введение

Свойства решений уравнений Пенлеве изучались с различных точек зрения, хотя первоначально они были открыты из классификации Пенлеве обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка без подвижных критических точек (свойство Пенлеве) [1–7]. Задача определения условий наличия свойства Пенлеве может рассматриваться и для ОДУ высших порядков. В окрестности стационарной особой точки уравнения ${}_{2n}\tilde{P}_2$ получены асимптотические разложения решения в работе [8]. В настоящей работе исследуются свойства решений уравнений иерархий ${}_{2n}\tilde{P}_2$ для n = 3 в окрестности подвижного полюса.

1. Структура уравнений ${}_{2n}\tilde{P}_2$, n ≥ 1

Иерархия уравнений ${}_{2n}\tilde{P}_2$ может быть записана в виде

$$\left(\frac{d}{dz}+2w\right)\tilde{L}_n\ [w' - w^2] = z\,w + \alpha_n\ ,\ n \ge 1, \qquad (1)$$

где последовательность $\tilde{L}_n(w)$ удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$D\,\tilde{L}_{n+1}[u] = (D^3 + 4uD + 2u_z + \beta_n)\,\tilde{L}_n\ [u],\ \tilde{L}_1[u] = u,\ D = \frac{d}{dz},\ n = 1, 2, \dots . \qquad (2)$$

Для n = 1, 2, 3 из (2) соответственно находим

$$L_2[u] = u^{(2)} + 3u^2 + \beta_1 u + \gamma_1,$$

$$L_3[u] = u^{(4)} + 10u^3 + 5\left(u'\right)^2 + 3\left(\beta_1+\beta_2\right)u^2 + \beta_1\beta_2 u + \left(10u+\beta_1+\beta_2\right)u'' + 2\gamma_1 u + \gamma_2,$$

$$\begin{aligned}L_4[u] = {} & u^{(6)} + 14u^{(4)}u + \left(\beta_1+\beta_2+\beta_3\right)u^{(4)}u + 28u^{(3)}u' + 21\left(u''\right)^2 + 10\left(\beta_1+\beta_2+\beta_3\right)u''u + \\ & + \left(\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3+2\gamma_1\right)u'' + 70u''u^2 + 5\left(\beta_1+\beta_2+\beta_3\right)\left(u'\right)^2 + 70\left(u'\right)^2 u + 35u^4 + \\ & + 10\left(\beta_1+\beta_2+\beta_3\right)u^3 + 3\left(\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\beta_2\beta_3+2\gamma_1\right)u^2 + \left(\beta_1\beta_2\beta_3+2\beta_3\gamma_1+2\gamma_2\right)u + \gamma_3.\end{aligned}$$

По формуле (1) вычисляем

$$w''-2w^3-zw-\alpha=0, \qquad \left(2\tilde{P}_2\right)$$

$$w^{(4)}+6w^5-10w\left(w'\right)^2-10w^2w''+\beta_1\left(w''-2w^3\right)-2\gamma_1 w-zw-\alpha=0, \qquad \left(4\tilde{P}_2\right)$$

$$\begin{aligned} &w^{(6)}-20w^7-56w'''w'w+140w^3\left(w'\right)^2+70w^4w''-14w^2w^{(4)}-42w\left(w''\right)^2-\\ &-70\left(w'\right)^2w''+\left(\beta_1+\beta_2\right)\left(6w^5-10w^2w''-10w\left(w'\right)^2+w^{(4)}\right)+ \qquad \left(6\tilde{P}_2\right)\\ &+\beta_1\beta_2\left(w''-2w^3\right)+\gamma_1\left(2w''-4w^3\right)+2\gamma_2 w-zw-\alpha=0.\end{aligned}$$

Теорема 1. Последовательность $\tilde{L}_{n+1}$[u], n ≥ 2 имеет структуру

$$\tilde{L}_{n+1}\,[u]=u_{2n}+\delta_n u_0^{n+1}+P_n(u_0, u_1,\ldots, u_{2n-2}), \tag{3}$$

где $u_m:=\dfrac{d^m u}{dz^m}$, P_n – полином от u_0, u_1, ..., u_{2n-2} степени n вида

$$P_n(u_0, u_1,\ldots, u_{2n-2}):=\sum_{\substack{\langle k\rangle\le 2n+2\\ k_0\le n-1}} a_{k_0k_1\ldots k_{2n-2}}u_0^{k_0}u_1^{k_1}\ldots u_{2n-2}^{k_{2n-2}}.$$

Через k обозначен мультииндекс k = (k_0, k_1,..., k_{2n-2}) с нормой $\langle k\rangle:=\sum\limits_{p=0}^{2n-2}(p+2)k_p$,

$a_{k_0k_1\ldots k_{2n-2}}$ – константы и $\delta_n=\dfrac{2^{2n+1}\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+2)\Gamma(1/2)}$.

Доказательство. Заметим, что рекурсивное соотношение (2) можно представить в виде

$$\tilde{L}_{n+1}\,[u_0]=(D^2+2u_0+\beta_n)\,\tilde{L}_n\,[u_0]+2\int u_0\frac{\partial\tilde{L}_n[u_0]}{\partial z}dz+\gamma_n,$$

причем выражение $u_0\dfrac{\partial\tilde{L}_n[u_0]}{\partial z}$ представляет собой производную некоторого полинома [9].

Применим метод математической индукции. По формуле (3) при n = 2 имеем

$$\begin{aligned}\tilde{L}_3\,[u_0]&=(D^2+2u_0+\beta_2)(u_2+3u_0^2+\beta_1u_0+\gamma_1)+2\int u_0(u_3+6u_0u_1+\beta_1u_1)dz+\gamma_2=\\ &=u_4+10u_0^3+5u_1^2+3\left(\beta_1+\beta_2\right)u_0^2+\beta_1\beta_2u_0+\left(10u_0+\beta_1+\beta_2\right)u_2+2\gamma_1u_0+\gamma_2.\end{aligned}$$

Пусть представление (3) верно при n = s. Докажем его истинность при n = s + 1. Вычислим:

$$\begin{aligned} &L_{s+2}[u_0]=D^2L_{s+1}[u_0]+2u_0L_{s+1}[u_0]+\\ &+\beta_n\tilde{L}_n[u_0]+2\int u_0\frac{\partial L_{s+1}[u_0]}{\partial z}dz=u_{2s+2}+(s+1)s\delta_s u_0^{s-1}u_1^2+(s+1)+\delta_s u_0^s u_2+D^2P_s+\\ &+2(u_0u_{2s}+\delta_s u_0^{s+2}+u_0P_s)+2\int u_0\left(u_{2s+1}+\delta_s(s+1)u_0^s u_1+DP_s\right)dz+\beta_n\tilde{L}_n[u_0]=\end{aligned}$$

$$=u_{2s+2}+2(2s+3)/(s+2)\delta_s u_0^{s+2}+P_{s+1}(u_0,u_1,...,u_{2n})=[\text{так как } \delta_{s+1}=2(2s+3)/(s+2)\delta_s]=$$
$$=u_{2s+2}+\delta_{s+1}u_0^{s+2}+P_{s+1}(u_0,u_1,...,u_{2n})=u_{2s+2}+\delta_{s+1}u_0^{(s+1)+1}+P_{s+1}(u_0,u_1,...,u_{2n}),$$

где

$$P_{s+1}(u_0, u_1,..., u_{2n}) = (s+1)s\delta_s u_0^{s-1}u_1^2 + (s+1)+\delta_s u_0^s u_2 + D^2P_s + 4(u_0u_{2s} + u_0P_s) +$$
$$+2\int u_0(u_{2s+1}+DP_s)dz=\sum_{\substack{\langle k\rangle\le 2s+4\\ k_0\le s}}\tilde{a}_{k_0k_1...k_{2s}}u_0^{k_0}u_1^{k_1}...u_{2s}^{k_{2s}}=\sum_{\substack{\langle k\rangle\le 2(s+1)+2\\ k_0\le (s+1)-1}}\tilde{a}_{k_0k_1...k_{2(s+1)-2}}u_0^{k_0}u_1^{k_1}...u_{2(s+1)-2}^{k_{2(s+1)-2}}.$$

Дадим некоторые пояснения. Слагаемое u_0P_s дает степень $s+1$ полинома P_{s+1}, а замена k_0+1 на k_0 приводит к требованию $k_0 \le s$. Для нормы мультииндекса k' мономов полинома DP_s имеет место равенство $\langle k' \rangle = \langle k \rangle +1$, где $\langle k \rangle$ норма мультииндекса мономов полинома P_s. Норма мультииндекса мономов подынтегрального полинома равна $\langle k \rangle + 3$. После интегрирования норма мультииндекса мономов уменьшается на единицу и равна $\langle k \rangle + 2 = 2s + 2 + 2 = 2(s + 1) + 2$. Аналогично для нормы мультииндекса k'' мономов полинома D^2P_s имеет место равенство $\langle k'' \rangle = \langle k' \rangle + 1 = \langle k \rangle + 2 = = 2s + 2 + 2 = 2(s + 1) + 2$. Для остальных слагаемых полинома P_{s+1} непосредственно убеждаемся, что норма мультииндекса мономов меньше либо равна $2(s + 1) + 2$. Это значит, что представление (3) верно при $n = s + 1$. По методу математической индукции получаем, что представление (3) верно при любом натуральном n. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Уравнение $\left({}_{2n}\tilde{P}_2\right)$ имеет структуру

$$w_{2n} = \beta_n w_0^{2n+1} + P_{2n-1}(w_0, w_1,..., w_{2n-2}) + z\, w_0 + \alpha_n, \tag{4}$$

где $w_m := \dfrac{d^m w}{dz^m}$, P_{2n-1} – полином от $w_0, w_1, ..., w_{2n-2}$ степени $2n-1$ вида

$$P_{2n-1}(w_0, w_1,..., w_{2n-2}) := \sum_{\substack{\langle k\rangle\le 2n+1\\ k_0\le 2n-1}} b_{k_0k_1...k_{2n-2}} w_0^{k_0}w_1^{k_1}...w_{2n-2}^{k_{2n-2}}. \tag{5}$$

Через k обозначен мультииндекс $k = (k_0, k_1,..., k_{2n-2})$ с нормой $\langle k\rangle := \sum_{p=0}^{2n-2}(p+1)k_p$,

$b_{k_0k_1...k_{2n-2}}$ – константы и $\beta_n = \dfrac{(-1)^{n+1}2^n(2n-1)!!}{n!}$.

Доказательство. Истинность утверждения следует из теоремы 1 и формулы (1).

2. Порядок подвижного полюса решения уравнения (4)

Лемма 1. Если решение уравнения (4) имеет подвижный полюс, то только первого порядка.

Доказательство. Для определения порядка q подвижного полюса в уравнении (4) произведем замену $w \sim c_0 (z - z_0)^{-q}$, $z \to z_0$. Ведущими членами уравнения (4) являются w_{2n}, некоторые слагаемые полинома (5) и, возможно, слагаемое $\beta_n w_0^{2n+1}$.

В первом случае имеем

$$q + 2n = qk_0 + (q+1)k_1 + ... + (q + 2n - 2)k_{2n-2}$$

или

$$q + 2n = (q - 1)(k_0 + k_1 + ... + k_{2n-2}) + \langle k \rangle.$$

Так как $\langle k \rangle = 2n + 1$, то имеем

$$(q - 1)(k_0 + k_1 + ... + k_{2n-2} - 1) = 0.$$

Условие

$$k_0 + k_1 + ... + k_{2n-2} = 1$$

вступает в противоречие с ограничением $\langle k \rangle = 2n + 1$. Значит, $q = 1$.

Во втором случае получаем условие $q + 2n = q(2n + 1)$. Откуда находим $q = 1$. Теперь в уравнении произведем подстановку $w \sim c_0 (z - z_0)^{-1}$. При $(z - z_0)^{-7}$ получим уравнение на $c_0 \neq 0$:

$$-20c_0 \prod_{j=1}^{3} \left(c_0^2 - j^2\right) = 0. \tag{6}$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Уравнение $\left({}_6\tilde{P}_2\right)$ имеет симметрию

$$S: w(z, \alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) \to \tilde{w}(z, \alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) = -w(z, -\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2).$$

Доказательство. В уравнении (4) положим $w \sim c_0 t^{-1}$. После деления на $c_0\beta_n \neq 0$ получаем уравнение на c_0:

$$\frac{(2n)!}{\beta_n} = c_0^{2n} + \frac{1}{\beta_n} \sum_{\substack{\langle k \rangle = 2n+1 \\ k_0 \le 2n-1}} b_{k_0 \ldots k_{2n-2}} c_0^{k_0 + \ldots + k_{2n-2} - 1} (-1)^{k_1 + \ldots + k_{2n-1}} (2!)^{k_2} \ldots ((2n-2)!)^{k_{2n-2}}. \tag{7}$$

Из условия (6) имеем, что уравнение (7) содержит только четные степени c_0. Следовательно, при условии $k_0 + k_1 + k_2 + ... + k_{2n-2} = 2m$, $m \in N$ соответствующий коэффициент $b_{k_0 k_1 \ldots k_{2n-2}} = 0$. Лемма 2 доказана.

3. Исследование решений уравнения ${}_6\tilde{P}_2$ в окрестности подвижного полюса

В окрестности точки z_0 уравнение $({}_6\tilde{P}_2)$ принимает вид:

$$\begin{aligned} &w^{(6)} - 20w^7 - 56w'''w'w + 140w^3\left(w'\right)^2 + 70w^4w'' - 14w^2w^{(4)} - 42w\left(w''\right)^2 - 70\left(w'\right)^2 w'' + \\ &+\left(\beta_1 + \beta_2\right)\left(6w^5 - 10w^2w'' - 10w\left(w'\right)^2 + w^{(4)}\right) + \beta_1\beta_2\left(w'' - 2w^3\right) + \gamma_1\left(2w'' - 4w^3\right) + \\ &+2\gamma_2 w - tw - z_0 w - \alpha = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Осуществим подстановку $w \sim c_0 (z - z_0)^{-1}$ в уравнение (8), при наименьшей степени $z - z_0$ получим условие на коэффициент c_0

$$-20c_0\left(c_0^2 - 1\right)\left(c_0^2 - 2^2\right)\left(c_0^2 - 3^2\right) = 0.$$

Рассмотрим первый случай. Пусть $c_0 = 1$. Применим подстановку

$$w \sim c_0(z-z_0)^{-1} + \beta(z-z_0)^{r-1},$$

тогда при $\beta(z-z_0)^{r-7}$ получаем резонансный многочлен

$$R_6(r, c_0) = (r+1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)(r-8).$$

Т.е., имеем один отрицательный резонанс $r_1 = -1$ и пять положительных резонансов $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $r_4 = 4$, $r_5 = 5$, $r_6 = 8$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w(t,c_0) = t^{-1} + h_1t^1 + h_2t^2 + h_3t^3 + h_4t^4 + c_6t^5 + c_7t^6 + h_5t^7 + c_9t^8 + \sum_{j=10}^{\infty} c_j t^{j-1}, \qquad (9)$$

где

$$c_1 = 0,\ c_2 = h_1,\ c_3 = h_2,\ c_4 = h_3,\ c_5 = h_4,\ c_8 = h_5,$$

$$c_6 = \frac{25}{168}\beta_1h_1^2 - \frac{1}{56}\beta_1\beta_2h_1 - \frac{5}{84}\beta_2h_3 + \frac{25}{168}\beta_2h_1^2 + \frac{1}{168}\gamma_2 + \frac{3}{2}h_1h_3 + \frac{1}{3}h_2^2 - \frac{1}{28}\gamma_1h_1 - \frac{5}{84}\beta_1h_3 - \frac{5}{4}h_1^3,$$

$$c_7 = -\frac{1}{960} - \frac{7}{12}h_2h_1^2 - \frac{\alpha}{960} - \frac{1}{120}\gamma_1h_2 + \frac{1}{16}h_1h_2\beta_1 - \frac{3}{80}\beta_1h_4 - \frac{3}{80}\beta_2h_4 +$$
$$+\frac{7}{8}h_1h_4 + \frac{7}{12}h_2h_3 - \frac{1}{240}\beta_1\beta_2h_2 + \frac{1}{16}h_1h_2\beta_2,$$

$$c_9 = \frac{1}{50400}\beta_1 + \frac{1}{50400}\beta_2 - \frac{3}{140}h_2h_3\beta_1 - \frac{17}{33600}h_1 - \frac{9}{400}h_1\beta_1h_4 - \frac{17}{1680}\beta_1\beta_2h_1h_2 +$$
$$+\frac{1}{6300}\gamma_1h_2\beta_2 - \frac{3}{140}\beta_2h_2h_3 + \frac{1}{50400}\beta_2\alpha + \frac{1}{1400}\beta_2^2h_4 + \frac{1}{50400}\beta_1\alpha + \frac{1}{1400}\beta_1^2h_4 -$$
$$-\frac{9}{400}\beta_2h_1h_4 + \frac{3}{10}h_3h_4 + \frac{51}{560}\beta_2h_2h_1^2 - \frac{3}{4}h_2h_1^3 - \frac{1}{840}h_1h_2\beta_1^2 +$$
$$+\frac{1}{1400}\beta_1\beta_2h_4 + \frac{1}{9}h_2^3 + \frac{3}{4}h_1h_2h_3 - \frac{13}{840}h_1\gamma_1h_2 + \frac{1}{12600}\beta_2\beta_1^2h_2 + \frac{1}{6300}\beta_1\gamma_1h_2 +$$
$$+\frac{51}{560}\beta_1h_1^2h_2 - \frac{1}{840}h_1h_2\beta_2^2 + \frac{1}{12600}\beta_1\beta_2^2h_2 - \frac{1}{1600}h_1\alpha + \frac{3}{8}h_1^2h_4 - \frac{1}{700}h_4\gamma_1 + \frac{1}{504}h_2\gamma_2,$$

$h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ h_5$ – произвольные параметры. Коэффициенты c_j, $j > 9$ однозначно определяются через произвольные параметры z_0, h_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$. В силу теоремы 2 [10] ряд (9) является сходящимся.

Рассмотрим второй случай. Пусть $c_0 = 2$. Применим подстановку

$$w \sim c_0(z-z_0)^{-1} + \beta(z-z_0)^{r-1},$$

тогда при $\beta(z-z_0)^{r-7}$ получаем резонансный многочлен

$$R_6(r, c_0) = (r+1)(r+3)(r-2)(r-5)(r-8)(r-10).$$

Т.е., имеем два отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -3$ и четыре положительных $r_3 = 2$, $r_4 = 5$, $r_5 = 8$, $r_6 = 10$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид

$$w(t,c_0)=2t^{-1}+h_1t^1+c_4t^3+h_2t^4+c_6t^5+c_7t^6+h_3t^7+c_9t^8+h_4t^9+c_{11}t^{10}+\sum_{j=12}^{\infty}c_jt^{j-1}, \qquad (10)$$

где

$$c_1=0,\ c_2=h_1,\ c_3=0,\ c_5=h_2,\ c_8=h_3,\ c_{10}=h_4,$$
$$c_4=-\frac{1}{140}\beta_1\beta_2-\frac{1}{70}\gamma_1-\frac{11}{2}h_1^2+\frac{3}{14}\beta_2h_1+\frac{3}{14}h_1\beta_1,$$
$$c_6=\frac{1}{1008}\beta_2\beta_1^2+\frac{1}{504}\beta_1\gamma_1-\frac{5}{168}h_1\beta_1^2+\frac{1}{1008}\beta_1\beta_1^2+\frac{1}{504}\beta_2\gamma_1-\frac{5}{168}h_1\beta_2^2-\frac{1}{504}\gamma_2-$$
$$-\frac{67}{2}h_1^3+\frac{57}{28}h_1^2\beta_1+\frac{57}{28}\beta_2h_1^2-\frac{8}{105}\gamma_1h_1-\frac{41}{420}\beta_1\beta_2h_1,$$
$$c_7=\frac{1}{1200}-\frac{3}{50}\beta_2h_2+\frac{\alpha}{2400}-\frac{3}{50}\beta_1h_2+\frac{14}{5}h_1h_2,$$
$$c_9=-\frac{1}{50400}\beta_1-\frac{\alpha}{100800}\beta_2+\frac{1}{700}h_2\beta_2^2-\frac{1}{50400}\beta_2-\frac{9}{350}h_1h_2\beta_2+\frac{1}{1600}h_1\alpha-$$
$$-\frac{9}{350}h_1\beta_1h_2-\frac{1}{1400}\beta_1\beta_2h_2+\frac{9}{20}h_1^2h_2-\frac{1}{140}\gamma_1h_2+\frac{1}{700}\beta_1^2h_2-\frac{1}{100800}\beta_1\alpha+\frac{h_1}{1050},$$
$$c_{11}=-\frac{313}{381024000}\alpha\beta_1\beta_2-\frac{44}{3675}h_1h_2\beta_2^2+\frac{1287}{1400}\beta_2h_2h_1^2+\frac{23}{23625}\beta_2h_2\gamma_1+\frac{569}{1323000}\beta_2^2h_2\beta_1$$
$$-\frac{22}{525}h_2h_1\gamma_1-\frac{44}{3675}\beta_1^2h_2h_1+\frac{1287}{1400}\beta_1h_2h_1^2+\frac{23}{23625}\beta_1h_2\gamma_1+\frac{569}{1323000}\beta_1^2h_2\beta_2+\frac{11}{604800}\alpha h_1\beta_1-$$
$$+\frac{11}{604800}\alpha\beta_2h_1-\frac{463}{95256000}\gamma_1-\frac{121}{63504000}\beta_2\beta_1+\frac{1}{7620480}\beta_2^2\alpha-\frac{1}{52990}\beta_2^3h_2-$$
$$-\frac{11}{245}\beta_2h_2h_1\beta_1+\frac{1}{3810240}\beta_2^2+\frac{17}{352800}\beta_2h_1-\frac{11}{28800}\alpha h_1^2+\frac{1}{7620480}\beta_1^2\alpha-\frac{77}{5}h_2h_1^3-$$
$$-\frac{59}{27216000}\alpha\gamma_1-\frac{1}{52920}\beta_1^3h_2+\frac{1}{3810240}\beta_1^2-\frac{361}{302400}h_1^2+\frac{17}{352800}h_1\beta_1-\frac{1}{1512}h_2\gamma_2,$$

h_1, h_2, h_3, h_4 – произвольные параметры. Коэффициенты c_j, $j > 11$ однозначно определяются через произвольные параметры z_0, h_i, $i = 1, 2, \ldots, 4$. В силу теоремы 2 [10] ряд (10) является сходящимся.

Рассмотрим третий случай. Пусть $c_0=3$. Применим подстановку

$$w\sim c_0(z-z_0)^{-1}+\beta(z-z_0)^{r-1},$$

тогда при $\beta(z-z_0)^{r-7}$ получаем резонансный многочлен

$$R_6(r, 3) = (r + 1)(r + 3)(r + 5)(r - 8)(r - 10)(r - 12).$$

Т.е., имеем три отрицательных резонанса $r_1 = -1$, $r_2 = -3$, $r_3 = -5$ и три положительных $r_4 = 8$, $r_5 = 10$, $r_6 = 12$. Формальный ряд, удовлетворяющий уравнению (8), имеет вид:

$$w(t,c_0)=3t^{-1}+c_2t^1+c_4t^3+c_6t^5+c_7t^6+h_1t^7+c_9t^8+h_2t^9+c_{11}t^{10}+c_{12}t^{11}+\sum_{j=13}^{\infty}c_jt^{j-1}, \qquad (11)$$

где

$$c_1 = 0,\; c_3 = 0,\; c_5 = 0,\; c_8 = h_1,\; c_{10} = h_2, c_{12} = h_3,$$

$$c_2 = \frac{1}{70}(\beta_1 + \beta_2),\; c_4 = -\frac{1}{630}\gamma_1 - \frac{4}{11025}\beta_1\beta_2 + \frac{19}{88200}\beta_2^2 + \frac{19}{88200}\beta_1^2,$$

$$c_6 = \frac{1}{5544}\gamma_2 + \frac{23}{7546000}\beta_2^3 + \frac{23}{7546000}\beta_1^3 - \frac{31}{970200}\beta_2\gamma_1 - \frac{29}{4244625}\beta_1\beta_2^2 -$$
$$-\frac{29}{4244625}\beta_1\beta_2^2 - \frac{29}{4244625}\beta_2\beta_1^2 - \frac{31}{970200}\beta_1\gamma_1,$$

$$c_7 = -\frac{\alpha}{14400} - \frac{1}{4800},\; c_9 = -\frac{1}{7056000}\beta_1 - \frac{1}{7056000}\beta_2 - \frac{1}{1008000}\beta_2\alpha - \frac{1}{1008000}\beta_1\alpha,$$

$$c_{11} = \frac{23}{63504000}\gamma_1 + \frac{71}{1111320000}\beta_1\beta_2 + \frac{1}{18144000}\alpha\gamma_1 - \frac{37}{2540160000}\alpha\beta_1^2 - \frac{521}{8890560000}\beta_2^2 -$$
$$-\frac{1}{635040000}\alpha\beta_1\beta_2 - \frac{37}{2540160000}\alpha\beta_2^2 - \frac{521}{8890560000}\beta_1^2,$$

$$c_{13} = -\frac{1}{104781600}\gamma_2 - \frac{59}{279417600000}\beta_2^3\alpha - \frac{11861}{61611580800000}\beta_2^3 - \frac{11861}{61611580800000}\beta_1^3 +$$
$$+\frac{821}{440082720000}\beta_2\gamma_1 + \frac{21887}{61611580800000}\beta_1\beta_2^2 + \frac{21887}{61611580800000}\beta_1^2\beta_2 +$$
$$+\frac{821}{440082720000}\beta_1\gamma_1 + \frac{1}{654885000}\beta_2\gamma_1\alpha + \frac{109}{838252800000}\beta_1\beta_2^2\alpha + \frac{109}{838252800000}\beta_1^2\beta_2\alpha +$$
$$+\frac{1}{654885000}\beta_1\gamma_1\alpha - \frac{59}{279417600000}\beta_1^3\alpha - \frac{1}{239500800}\gamma_2\alpha,$$

h_1, h_2, h_3 – произвольные параметры. Коэффициенты c_j, $j > 13$ однозначно определяются через произвольные параметры z_0, h_i, $i = 1, 2, 3$. В силу теоремы 2 [10] ряд (11) является сходящимся.

Следует отметить, что вместе с рядами (9) – (11), согласно лемме 2, уравнению $({}_6\tilde{P}_2)$ удовлетворяют ряды $-w(z, -\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2)$.

Теорема 3. Уравнение $({}_6\tilde{P}_2)$ имеет полярные решения, представимые рядами (9), (10) и (11) сходящиеся в области $0 < |z - z_0| < \rho$, $\rho > 0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Painlevé, P. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme / P. Painlevé // Bull. Soc. Math. France. – 1900. – Vol. 28. – P. 201–261.
2. Painlevé, P. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre superieur dont l'intégrale générale est uniforme / P. Painlevé // Acta Math. – 1902. – Vol. 25. – P. 1–85.
3. Gambier, B. Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degre don't l'intégrale générale est a points critiques fixes / B. Gambier // Acta Math. – 1909. – Vol. 33. – P. 1–55.
4. Ince, E. L. Ordinary Differential Equations / E. L. Ince. – New York : Dover, 1956. – 719 p.
5. Голубев, В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
6. Громак, В. И. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В. И. Громак, Н. А. Лукашевич. – Минск : Университетское, 1990. – 157 с.

7. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н. А. Кудряшов. – М. : Ин-т комплекс. исслед., 2004. – 360 с.

8. Громак, В. И. О дискретных уравнениях Пенлеве высших порядков / В. И. Громак // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2000. – Т. 6. – С. 65–74.

9. Lax, P. D. Almost periodic solutions of the KdV equation / P. D. Lax // SIAM Review. – 1976. – Vol. 18, № 3. – P. 351–375.

10. Грицук, Е. В. К теории нелинейных дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве / Е. В. Грицук, В. И. Громак // Дифференц. уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1371–1380.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.04.2018

Gricuk E.V., Lukashik N.A. **On Local Properties of Solutions of the Analogue of the Second Painlevé Equation of Sixth Order**

In this paper we investigate the solution of the sixth-order equation of the hierarchy of the second Painlevé equation in the neighborhood of a moving pole. By the method of resonances, the numbers of arbitrary coefficients of the Laurent series were found and using the computer algebra system Maple, their correspondence to the number of positive resonances was confirmed.