МАТЭМАТЫКА

УДК 512.542

***Д.В. Грицук*[1], *А.А. Трофимук*[2], *Т.В. Бондарук*[3]**

[1]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования*
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. фундаментальной и прикладной математики*
Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины
[3]*магистрант физико-математического факультета*
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com[1]

ПРОИЗВОДНАЯ p-ДЛИНА p-РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ, У КОТОРОЙ НОРМАЛЬНЫЙ РАНГ СИЛОВСКОЙ p-ПОДГРУППЫ ОГРАНИЧЕН*

Установлена функциональная зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от значения нормального ранга ее силовской p-подгруппы. В частности, установлено, что если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга, не превышающего 2, то производная p-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2 (здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини). Если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга, не превышающего 3, то производная p-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в [1; 2].

В 1956 г. Ф. Холл и Г. Хигмэн предложили понятие p-длины p-разрешимой группы [3]. Напомним это определение. Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \qquad (1)$$

факторы которого являются либо p'-группами, либо p-группами. Наименьшее число p-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется p-длиной p-разрешимой группы G и обозначается $l_p(G)$.

Работа Ф. Холла и Г. Хигмена определила одно из основных направлений в изучении p-разрешимых групп – установление взаимосвязи между мерой сложности силовской p-подгруппы p-разрешимой группы G и ее p-длины. Разумно предположить, что чем больше p-длина группы G, тем сложнее должна быть устроена ее силовская p-подгруппа.

В 2006 г. В.С. Монахов [4] привел понятие производной p-длины p-разрешимой группы. Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо абелевой p-группой, либо p'-группой. Наименьшее число абелевых p-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной p-длиной p-разрешимой группы G и обозначается

**Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (грант № Ф17М-063).*

через $l_p^a(G)$. Простейшие свойства производной p-длины p-разрешимой группы приведены в лемме 1 настоящей работы. Получению оценок производной p-длины p-разрешимой группы в зависимости от строения подгрупп группы посвящены работы [5–7].

Напомним, что нормальный ранг $r_n(P)$ конечной p-группы P определяется следующим образом:

$$r_n(P) = \max_{X \lhd P} \log_p |X/\Phi(X)|,$$

где X пробегает все нормальные подгруппы группы P, в том числе и P. Здесь $\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X. Из теоремы Бернсайда о базисе (теорема III.3.15) [2] следует, что нормальный ранг $r_n(P)$ есть наименьшее натуральное число k такое, что любая нормальная подгруппа p-группы P порождается не более чем k элементами.

В.С. Монахов в [8] установил, что:

1) если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга ≤ 3, то p-длина не превышает 2;

2) если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга ≤ 2 для нечетного p, то p-длина не превышает 1.

Развитием результатов работы [8] является следующая

Теорема 1. *Пусть G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга $\leq k$. Тогда*

1) если $p \notin \{2,3\}$, то $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \dfrac{k^2+k+2}{4}$;

2) если $p \in \{2,3\}$, то $l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \dfrac{k^2+k+4}{4}$.

1. Вспомогательные результаты

Из определений p-длины и производной p-длины p-разрешимой группы следует, что $l_p(G) \leq l_p^a(G)$.

Лемма 1. *Пусть G – p-разрешимая группа. Тогда:*

1) если H – подгруппа группы G, то $l_p^a(H) \leq l_p^a(G)$;

2) если N – нормальная подгруппа группы G, то $l_p^a(G/N) \leq l_p^a(G)$ и $l_p^a(G) \leq l_p^a(G/N) + l_p^a(N)$;

3) если N – нормальная p'-подгруппа группы G, то $l_p^a(G/N) = l_p^a(G)$;

4) если G и V – p-разрешимые группы, то $l_p^a(G \times V) = \max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\}$;

5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G, то

$$l_p^a(G/(N_1 \cap N_2)) = \max\{l_p^a(G/N_1), l_p^a(G/N_2)\}.$$

Доказательство. Для p-разрешимой группы G зафиксируем субнормальный ряд

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G,$$

где G_{i+1}/G_i – либо абелева p-группа, либо p'-группа, причем число абелевых p-факторов совпадает с $t = l_p^a(G)$.

1. Ряд $1 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots \subseteq H_m = H,$ где $H_i = G_i \cap H$ будет субнормальным рядом подгруппы H, причем факторы

$$H_{i+1}/H_i = (G_{i+1} \cap H)/(G_i \cap H) \cong (G_{i+1} \cap H)G_i/G_i$$

являются подгруппами фактор-групп G_{i+1}/G_i. Поэтому в построенном ряде подгруппы H каждый фактор либо p'-группа, либо абелева p-группа, и число абелевых p-факторов не превосходит числа t. Таким образом, $l_p^a(H) \le t = l_p^a(G)$.

2. Ясно, что ряд

$$1 = G_0N/N \subseteq G_1N/N \subseteq G_2N/N \subseteq \ldots \subseteq G_m/N = G/N,$$

будет субнормальным рядом группы G/N с факторами

$$(G_{i+1}N/N)/(G_iN/N) \cong G_{i+1}N/G_iN = G_{i+1}(G_iN)/G_iN \cong$$
$$\cong G_{i+1}/G_{i+1} \cap G_iN = G_{i+1}/G_i(G_{i+1} \cap N) \cong G_{i+1}/G_i/G_i(G_{i+1} \cap N)/G_i,$$

изоморфными фактор-группам групп G_{i+1}/G_i. Поэтому факторы построенного ряда для фактор-группы G/N будут либо p'-группами, либо абелевыми p-группами, и число абелевых p-факторов не превосходит числа t. Таким образом, $l_p^a(G/N) \le t = l_p^a(G)$.

Пусть N – нормальная p'-подгруппа группы G, и пусть

$$1 = X_0/N \subseteq X_1/N \subseteq X_2/N \subseteq \ldots \subseteq X_k/N = G/N,$$

субнормальный ряд фактор-группы G/N с факторами, являющимися p'-группами или абелевыми p-группами, причем число абелевых p-факторов совпадает с $l_p^a(G/N)$. Тогда ряд

$$1 \le N \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_k = G,$$

будет субнормальным для группы G, факторы этого ряда являются либо p'-группами или абелевыми p-группами, причем число абелевых p-факторов совпадает с $l_p^a(G/N)$. Из определения производной p-длины следует, что $l_p^a(G) \le l_p^a(G/N)$. Так как уже доказано, что $l_p^a(G/N) \le l_p^a(G)$, то $l_p^a(G/N) = l_p^a(G)$.

3. Пусть N – неединичная нормальная абелева p-подгруппа группы G и

$$1 = G_0/N \subseteq G_1/N \subseteq G_2/N \subseteq \ldots \subseteq G_m/N = G/N,$$

субнормальный ряд группы G/N, факторы которого являются либо p'-группами или абелевыми p-группами, причем число абелевых p-факторов совпадает с $l_p^a(G/N)$. Тогда

$$1 < N \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G,$$

такого же типа ряд группы G, в котором число абелевых p-факторов равно $1 + l_p^a(G/N)$. Из определения производной p-длины получаем, что $l_p^a(G) \le 1 + l_p^a(G/N)$. По пункту (2) доказываемой леммы $l_p^a(G/N) \le l_p^a(G)$, поэтому $l_p^a(G) \le i + l_p^a(G/N)$, где $i \in \{0,1\}$.

4. Так как G и V – подгруппы группы $G \times V$, то из пункта (1) доказываемой леммы следует, что $\max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\} \le l_p^a(G \times V)$. Покажем, используя индукцию по $|G| + |V|$, обратное утверждение. Пусть

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m \subseteq G, \qquad (2)$$

$$1 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_n \subseteq V, \qquad (3)$$

субнормальные ряды p-разрешимых групп G и V, в которых число абелевых p-факторов равно $l_p^a(G)$ и $l_p^a(V)$ соответственно. Предположим, что одна из подгрупп G/G_m, V/V_n является p'-подгруппой. Пусть, например, G/G_m – p'-подгруппа. Тогда $l_p^a(G) = l_p^a(G_m)$, а по индукции $l_p^a(G_m \times V) = \max\{l_p^a(G_m), l_p^a(V)\}$. Поскольку $(G \times V)/(G_m \times V) \cong G/G_m$ является p'-группой, то $l_p^a(G \times V) = l_p^a(G_m \times V)$ и утверждение 4 справедливо.

Пусть теперь G/G_m и V/V_n являются p-подгруппами. Из выбора рядов (2) и (3) следует, что $l_p^a(G_m) = l_p^a(G) - 1$, $l_p^a(V_n) = l_p^a(V) - 1$. Действительно, у ряда

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_m$$

число абелевых p-факторов равно $l_p^a(G) - 1$, поэтому $l_p^a(G_m) \le l_p^a(G) - 1$. Но если $l_p^a(G_m) < l_p^a(G) - 1$, то у ряда (2) число абелевых p-факторов равно $l_p^a(G_m) + 1 < l_p^a(G)$, что противоречит выбору этого ряда. Поэтому $l_p^a(G_m) = l_p^a(G) - 1$. Аналогично, $l_p^a(V_n) = l_p^a(V) - 1$. Отсюда следует, что

$$\max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\} = 1 + \max\{l_p^a(G_m), l_p^a(V_n)\}.$$

Используя индукцию, получаем: $l_p^a(G_m \times V_n) = \max\{l_p^a(G_m), l_p^a(V_n)\}$. Так как $(G \times V)/(G_m \times V_n) \cong G/G_m \times V/V_n$ является абелевой p-группой, то

$$l_p^a(G \times V) \le 1 + l_p^a(G_m \times V_n) = \max\{l_p^a(G), l_p^a(V)\}.$$

Утверждение 4 доказано.

5. Пусть N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G. По лемме Ремака, группа $G / N_1 \cap N_2$ является подгруппой группы $G / N_1 \times (G / N_2)$, поэтому из пунктов (1) и (4) доказываемой леммы следует, что $l_p^a(G/(N_1 \cap N_2)) = \max\{l_p^a(G/N_1), l_p^a(G/N_2)\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G – p-разрешимая группа и t – натуральное число. Предположим, что $l_p^a(G/N) \le t$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G, но $l_p^a(G) > t$. Тогда:*

1) $O_{p'}(G) = 1$;

2) в группе G существует только одна минимальная нормальная подгруппа;

3) $F(G) = O_p(G) = F(O_p(G))$;

4) $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$.

Доказательство. Лемма вытекает из [5, лемма 4] при $\pi = \{p\}$.

Здесь $O_{p'}(G)$ – наибольшая нормальная p'-подгруппа группы G, $F(G)$ – подгруппа Фиттинга, т.е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G.

Лемма 3. [7, теорема 3.1]. *Пусть G – p-разрешимая группа, G_p – силовская p-подгруппа порядка p^n. Тогда:*

1) если $p \notin \{2,3\}$, то $l_p^a(G) \le \frac{n+1}{2}$;

2) если $p \in \{2,3\}$, то $l_p^a(G) \le 1 + \frac{n}{2}$.

Лемма 4. [8, леммы 7–8]. *Пусть P – p-группа и N – нормальная подгруппа группы P. Тогда:*

1) $\log_p |N/\Phi(N)| \le r_p(P)$;

2) $r_p(G/N) \le r_p(G)$ $r_p(G/N) \le r_p(G)$.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга $\le k$. Тогда*

1) если $p \notin \{2,3\}$, то $l_p^a(G/\Phi(G)) \le \frac{k^2+k+2}{4}$;

2) если $p \in \{2,3\}$, то $l_p^a(G/\Phi(G)) \le \frac{k^2+k+4}{4}$

Доказательство. Пусть $\overline{G} = G/\Phi(G)$, т.е. $\Phi(G) \ne 1$. Очевидно, что силовская p-подгруппа $\overline{G}_p$ группы $\overline{G}$ имеет $r_n(\overline{G}_p) \le k$. Действительно,

$$\overline{G}_p = (G/\Phi(G))_p = G_p\Phi(G)/\Phi(G) = P\Phi(G)/\Phi(G) \cong P/(P \cap \Phi(G)).$$

Так как по лемме 4 $r_n(G/N) \le r_n(G)$, то

$$r_n(\overline{G}_p) \le r_n(P/(P \cap \Phi(G))) \le r_n(G) \le k.$$

Значит, фактор-группа $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условию теоремы. Поэтому для $p \notin \{2,3\}$ получим

$$l_p^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G))) \le \frac{k^2+k+2}{4},$$

а для $p \in \{2,3\}$

$$l_p^a((G/\Phi(G))/\Phi(G/\Phi(G))) \le \frac{k^2+k+4}{4}.$$

Так как $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$, то справедливо заключение теоремы. Поэтому в дальнейшем считаем, что $\Phi(G) = 1$.

Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой оценки производной p-длины не выполняются. Очевидно, что все фактор-группы G/N удовлетворяют условию теоремы. По лемме 2, в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа

$$N = F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G).$$

Очевидно, что $N \lhd P$. Если $|N| = p^\alpha$, то, по лемме 4 1), $\alpha \le k$, так как $\Phi(N) = 1$. Поэтому G/N изоморфна подгруппе группы $GL(\alpha, p)$. Так как

$$|GL(\alpha, p)| = (p^\alpha - 1)(p^\alpha - p)\cdot \ldots \cdot (p^\alpha - p^{\alpha-1}) = p^{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-2} \cdot \ldots \cdot p^1 \cdot s,$$

где $НОД(s, p) = 1$. Тогда

$$|P| = p^\alpha \cdot p^{\alpha-1} \cdot p^{\alpha-2} \cdot \ldots \cdot p^1 = p^{\frac{1+\alpha}{2}\cdot\alpha} = p^t.$$

По лемме 3 $l_p^a(G/\Phi(G)) \le \frac{t+1}{2}$ при $p \notin \{2,3\}$ и $l_p^a(G/\Phi(G)) \le 1 + \frac{t}{2}$ при $p \in \{2,3\}$.

Тогда для $p \notin \{2,3\}$

$$l_p^a(G/\Phi(G)) \le \frac{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\alpha + 1}{2} = \frac{\alpha^2+\alpha+2}{4} \le \frac{k^2+k+2}{4}$$

и для $p \in \{2,3\}$

$$l_p^a(G/\Phi(G)) \le 1 + \frac{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\alpha}{2} = 1 + \frac{\alpha^2+\alpha}{4} \le \frac{k^2+k+4}{4}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает ряд следствий.

Следствие 1. *Если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга ≤ 2, то производная p-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 2.*

Доказательство. Так как $r_n(G_p) \leq 2 = k$, то, по теореме 1,

$$l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \max\left\{\frac{k^2+k+2}{4}, \frac{k^2+k+4}{4}\right\} = \frac{k^2+k+4}{4} = \frac{2^2+2+4}{4} = \frac{5}{2},$$

т.е. $l_p^a(G) \leq 2$. Следствие доказано.

Следствие 2. *Если G – p-разрешимая группа с силовской p-подгруппой нормального ранга ≤ 3, то производная p-длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ не превышает 4.*

Доказательство. Так как $r_n(G_p) \leq 3 = k$, то, по теореме 1,

$$l_p^a(G/\Phi(G)) \leq \max\left\{\frac{k^2+k+2}{4}, \frac{k^2+k+4}{4}\right\} = \frac{k^2+k+4}{4} = \frac{3^2+3+4}{4} = 4,$$

т.е. $l_p^a(G) \leq 4$. Следствие доказано.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Высш. шк., 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967.
3. Hall, P. The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, № 7. – P. 1–42.
4. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – Р. 573–581.
5. Грицук, Д. В. О производной π-длине π-разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
6. Грицук, Д. В. О конечных π-разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.
7. Грицук, Д. В. Зависимость производной p-длины p-разрешимой группы от порядка ее силовской p-подгруппы / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3 (20). – С. 58–60.
8. Монахов, В. С. О разрешимых конечных группах с силовскими подгруппами малого ранга / В. С. Монахов // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 2. – С. 25–28.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 27.03.2018

Gritsuk D.V., Trofimuk A.A., Bondaruk T.V. **The Derived p-Length of a p-Solvable Group with Limited Normal Rank of Sylow p-Subgroup**

The functional dependence of the derived p-length of a p-solvable group on the value of the normal rank of its Sylow p-subgroup is established. In particular, the following results are proved: if G is a p-solvable group and the normal rank of Sylow p-subgroup of G is at most 2, then the derived p-length of the quotient $G/\Phi(G)$ is at most 2 (here $\Phi(G)$ is the Frattini subgroup); if G is a p-solvable group and the normal rank of Sylow p-subgroup of G is at most 3, then the derived p-length of the quotient $G/\Phi(G)$ is at most 4.