УДК 513.82

А.А. Юдов[1], А.О. Волкова[2], Е.В. Арабчик[3], Д.С. Арабчик[4]

[1]*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

[2]*преподаватель-стажер каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

[3]*магистрантка каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

[4]*магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА ${}^2R_4$ И ИХ ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В работе классифицируется связанные подгруппы Ли группы Ли движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры – пространства ${}^2R_4$. Найдены инвариантные плоскости и прямые для таких подгрупп Ли и их образы стационарности.

В работе изучается геометрия однородных пространств. Анализ таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались В.И. Ведерников, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, Л.К. Тутаев, А.С. Феденко и др., а за рубежом – эстонский геометр Ю. Лумисте и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси. Ю. Лумисте показал применимость редуктивных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редуктивными однородными слоями. К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкие исследования редуктивных однородных пространств, в частности, исследовали свойства инвариантной связности в редуктивных однородных пространствах.

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается группа $G_0 = T_4 \cdot O(4,2)$ движений пространства ${}^2R_4$. Ставится задача классификации всех связных подгрупп Ли группы G_0 с точностью до внутренних автоморфизмов этой группы, то есть до сопряжённости. Для решения этой задачи будем применять тот же метод, который разработали И.В. Белько и А.С. Феденко для классификации связных подгрупп Ли группы движении пространства Минковского [1; 2]. Ниже кратко излагаются основы этого метода применительно к группе движений пространства ${}^2R_4$.

Как известно [3], задача классификации связных подгрупп группы Ли с точностью до внутренних автоморфизмов эквивалентна задаче классификации подалгебр алгебры Ли этой группы с точностью до присоединённого представления этой группы. Подалгебры, переводящиеся друг в друга элементами присоединённой группы, тоже будем называть сопряжёнными.

В настоящей работе решается задача классификации подалгебр Ли алгебры $\overline{G}_0$ с точностью до присоединённого представления Ad группы G_0. Присоединённая группа действует в $\overline{G}_0$ по формуле:

$$Ad\, B(C) = B^{-1} C\, B, \quad B \in G_0, C \in \overline{G}_0. \tag{1}$$

Следуя И. В. Белько [1], введем следующие определения:

Определение 1. Пусть $\overline{T} \oplus \hat{E}$ – полупрямая сумма идеала $\overline{T}$ и подалгебры K, $\overline{H}$ – подалгебра алгебры $\overline{T} \oplus \hat{E}$, $I_1 = \overline{I} \cap \overline{T}$, $I_2 = \partial r_2 \overline{I}$. Подалгебра $\overline{H}$ называется полупрямой, если $\overline{I} = I_1 \oplus I_2$, то есть $pr_1 \overline{I} = I_1$, $\overline{I} \cap \hat{E} = I_2$.

Определение 2. Подалгебра I алгебры $\overline{T} \oplus \hat{E}$ называется расширением полупрямой подалгебры $\overline{I} = I_1 \oplus I_2$, если $\overline{\mathrm{I}} \cap \overline{\mathrm{T}} = I_1$, $\partial r_2 \overline{\mathrm{I}} = I_2$.

Имеют место следующие леммы, первые две из которых доказаны в [2]

Лемма 1. Пусть $\overline{\mathrm{T}} \oplus K$ – полупрямая сумма идеала $\overline{\mathrm{T}}$ и подалгебры K, $\overline{H}$ – подалгебра алгебры $\overline{T} \oplus \hat{E}$. Тогда 1) $\overline{H} \cap \overline{\mathrm{T}} = I_1$ – подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}}$, 2) $\partial r_2 \overline{I} = I_2$ – подалгебра алгебры K, 3) если идеал $\overline{\mathrm{T}}$ абелев, то $I_1 \oplus I_2$ – подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}} \oplus \hat{E}$.

Лемма 2. Пусть $\overline{\mathrm{T}} \oplus \hat{E}$ – полупрямая сумма идеала $\overline{\mathrm{T}}$ и подалгебры K, $\overline{P}$ – подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}}$, $\overline{H}$ – подалгебра алгебры K. Подпространство $\overline{Đ} \oplus \overline{I}$ тогда и только тогда является подалгеброй алгебры $\overline{\mathrm{T}} \oplus \hat{E}$, когда подпространство $\overline{P}$ инвариантно относительно adX для любого $X \in \overline{I}$.

Лемма 3. Пусть $\overline{I} = I_1 \oplus I_2$ – полупрямая подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}}_4 \oplus \vartheta(4,2)$, I – произвольное расширение подалгебры $\overline{H}$, Adh – элемент присоединённой группы $Ad(O(4,2))$. Тогда $Adh(\overline{H})$ – полупрямая подалгебра, $Adh(\overline{I})$ – расширение полупрямой подалгебры $Adh(\overline{H})$.

Доказательство. Пусть $h \in O(4,2)$. Из определения действия присоединённой группы AdG_0 (1) получаем, что выполняются равенства:

$$\partial r_1 \circ Adh = Adh \circ \partial r_1,\ \partial r_2 \circ Adh = Adh \circ \partial r_2, \tag{2}$$

где ∂r_i – проекция на $i-e$ слагаемое в сумме $\overline{\mathrm{T}}_4 \oplus \vartheta$ (4.2). Так как $\overline{H}$ – полупрямая подалгебра, то $\partial r_1 \overline{I} = \overline{I} \cap \overline{\mathrm{T}}_4$, $\partial r_2 \overline{I} = \overline{I} \cap \vartheta$ (4.2). Рассмотрим $Adh(\overline{I}) = Adh(I_1 \oplus I_2)$. Из (2) следует, что $\partial r_1(Adh(\overline{I})) = Adh \circ \partial r_1(\overline{I}) = Adh(I_1)$. С другой стороны, поскольку $\overline{\mathrm{T}}_4$ инвариантно относительно Adh, то $Adh(\overline{I}) \cap \overline{\mathrm{T}}_4 = Adh(I_1)$. Таким образом, $\partial r_1(Adh(\overline{I})) = Adh(\overline{I}) \cap \overline{\mathrm{T}}_4 = Adh(I_1)$.

Аналогично доказывается равенство $\partial r_2(Adh(\overline{I})) = Adh(\overline{I}) \cap \vartheta(4,2) = Adh(I_2)$. Таким образом, алгебра $Adh(\overline{I}) = Adh(I_1) \oplus Adh(I_2)$ – полупрямая.

Подалгебра $\overline{\mathrm{I}}$ – расширение полупрямой подалгебры $\overline{H}$, значит, $\overline{\mathrm{I}} \cap \overline{\mathrm{T}}_4 = I_1$, $\partial r_2 \overline{\mathrm{I}} = I_2$. Рассмотрим соотношения: $Adh(\overline{\mathrm{I}}) \cap \overline{\mathrm{T}}_4 = Adh(\overline{\mathrm{I}}) \cap Adh(\overline{\mathrm{T}}_4) = Adh(\overline{\mathrm{I}} \cap \overline{\mathrm{T}}_4) = Adh(H_1)$, $\partial r_2 \circ Adh(\overline{\mathrm{I}}) = Adh \circ \partial r_2(\overline{\mathrm{I}}) = Adh(I_2)$.

Значит, $Adh(\overline{\mathrm{I}})$ – расширение полупрямой подалгебры $Adh(\overline{I})$. Лемма доказана.

Имеет место следующая основная теорема:

Теорема. Всякая подалгебра алгебры $\overline{\mathrm{T}}_4 \oplus \vartheta(4,2)$ с помощью Adh, $h \in O(4,2)$ сопряжена некоторому расширению подалгебры $\overline{\mathrm{I}}_1 \oplus \overline{\mathrm{I}}_2$, где – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\vartheta(4,2)$, I_1 – подпространство пространства $\overline{\mathrm{T}}_4$, инвариантное относительно adI_2.

Доказательство. Пусть $\bar{\mathrm{I}}$ – произвольная подалгебра алгебры $\bar{\mathrm{T}}_4 \oplus \vartheta(4,2)$, $\bar{\mathrm{I}}_1 = \bar{\mathrm{I}} \cap \bar{\mathrm{T}}_4$, $\bar{\mathrm{I}}_2 = \partial r_2 \bar{\mathrm{I}}$.

В силу леммы 1, $\bar{\mathrm{I}}_2$ – подалгебра алгебры $\vartheta(4,2)$. Значит, существует элемент $h \in O(4,2)$, такой, что $Adh(\bar{\mathrm{I}}_2)I_2$, где $\acute{I}_2$ – один из представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\vartheta(4,2)$. В силу определения 2, $\bar{\mathrm{I}}$ является расширением полупрямой подалгебры $\bar{\mathrm{I}}_1 \oplus \bar{\mathrm{I}}_2$. В силу леммы 3, $Adh(\bar{\mathrm{I}})$ является расширением полупрямой подалгебры $\bar{\mathrm{I}}_1 \oplus \bar{\mathrm{I}}_2$. В силу леммы 3, $Adh(\bar{\mathrm{I}})$ является расширением полупрямой подалгебры $Adh(\bar{\mathrm{I}}_1) \oplus Adh(\bar{\mathrm{I}}_2) = Adh(\bar{\mathrm{I}}_1) \oplus I_2$. В силу леммы 2, подпространство $Adh(\bar{\mathrm{I}}_1)$ инвариантно относительно AdX для любого $X \in I_2$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что классификация подалгебр алгебры $\bar{G}_0$ должна проводиться с использованием классификации подалгебр алгебры $\vartheta(4,2)$. В настоящей работе используется классификация с точностью до сопряжённости подалгебр алгебры Ли $\vartheta(4,2)$, приведённая Р.Н. Хабибуллиной и А.П. Широковым [4].

Доказанная теорема сводит задачу классификации подалгебр алгебры $\bar{\mathrm{T}}_4 \oplus \vartheta(4,2)$ *к трём* следующим *задачам:*

1) нахождение всех полупрямых подалгебр вида $I_1 \oplus I_2$, где I_2 прибегает множество представителей классов сопряжённых подалгебр алгебры $\vartheta(4,2)$;

2) нахождение всех расширений полученных полупрямых подалгебр;

3) классификация полученных расширений с точностью до сопряжённости.

Покажем, как для подалгебры $I_2 \in \vartheta(4,2)$ находятся подпространства пространства $\bar{\mathrm{T}}_4$, инвариантные относительно AdH_2.

Пусть $A \in \bar{\mathrm{T}}_4,\ B \in \vartheta(4,2)$. Тогда

$$ad\ B\,(A) = AB - BA = AB. \tag{3}$$

Таким образом, для нахождения инвариантных одномерных подпространств, необходимо решить следующее матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in R$ – произвольное число, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ – произвольный элемент из I_2. Аналогично для нахождения инвариантных двумерных подпространств необходимо решить систему:

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \nu\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & O_4 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & O_4 \end{pmatrix},$$

где $\lambda, \mu, \nu, \delta$ – произвольные числа, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ – произвольный элемент из I_2. Для нахождения инвариантных трёхмерных подпространств воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого опускаем. Пусть I_2 – алгебра Ли связной группы Ли I_2.

Тогда из $AdH_2(K)\subset K$ следует $adH_2(K)\subset K$ и обратно, где K – подпространство алгебры Ли G_0. Из формулы (1.8) и (1) заключаем, что присоединённая группа $AdO(4,2)$ сохраняет метрику в пространстве $\overline{\mathrm{T}}_4$ (изоморфном V_4). Таким образом, если $Adh(\overline{P})\subset\overline{P}$, то $Adh(\overline{P}_0)\subset\overline{P}_0$, где $h\in O(4,2)$, $\overline{P}_0$ – ортогональное дополнение пространства $\overline{P}$. Значит, из $adK(\overline{P})\subset\overline{P}$ следует, что $adK(\overline{P}_0)\subset\overline{P}_0$. Таким образом, инвариантные трёхмерные пространства находим как ортогональные дополнения к инвариантным одномерным подпространствам.

Чтобы найти расширения полупрямой подалгебры $I_1\oplus I_2$, необходимо из множества $\{\bar{\mathrm{I}}\}$ всех векторных подпространств алгебры $\overline{\mathrm{T}}_4\oplus\mathcal{G}(4,2)$, удовлетворяющих условию $\bar{\mathrm{I}}\cap\overline{\mathrm{T}}=I_1,\ \partial r_2\bar{\mathrm{I}}=I_2$, выбрать подалгбры, для чего надо потребовать замкнутость операции коммутирования.

Замечание. Для нахождения полупрямых подалгебр, соответствующих подалгебре $I_2\subset\mathcal{G}(4,2)$, подпространства I_1 пространства $\overline{\mathrm{T}}_4$, инвариантные относительно adI_2, нужно искать с точностью до преобразований $Adh,\ h\in O(4,2)$, таких, что $Adh(I_2)=I_2$.

Для приведения найденных инвариантных подпространств к минимальному числу, согласно замечанию, будем использовать следующие элементы группы $O(4,2)$:

$$h_1=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad h_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},\quad h_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$h_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & ch\varphi & 0 & sh\varphi\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & sh\varphi & 0 & ch\varphi\end{pmatrix},\quad h_5=\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 0 & \lambda\\ \lambda & 1-\lambda^2/2 & 0 & \lambda^2/2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \lambda & -\lambda^2/2 & 0 & 1+\lambda^2/2\end{pmatrix},$$

$$h_6=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1+\lambda^2/2 & -\lambda & -\lambda^2/2\\ 0 & -\lambda & 1 & \lambda\\ 0 & \lambda^2/2 & -\lambda & 1-\lambda^2/2\end{pmatrix},\quad h_7=\begin{pmatrix}1 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 0\\ \lambda/2 & 1 & 0 & -\lambda/2\\ -\lambda/2 & 0 & 1 & \lambda/2\\ 0 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 1\end{pmatrix},\quad h_8=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$h_9=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad h_{10}=\begin{pmatrix}ch\varphi & 0 & sh\varphi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ sh\varphi & 0 & ch\varphi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad h_{11}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad h_{12}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$h_{13}=\begin{pmatrix}1+\lambda^2/2 & -\sin\varphi & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & 0 & 0\\ 1+\lambda^2/2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad h_{14}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad h_{15}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad h_{16}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

2. Полупрямые подалгебры алгебры $\overline{G}_0 = \overline{T}_4 \oplus \vartheta(4,2)$

Приведём некоторые сведения о k-плоскостях пространства ${}^2R_4$. В зависимости от метрики, которая индуцируется на k-плоскостях, все k-плоскости пространства ${}^2R_4$ разделяются на действительные (евклидовы), «мнимые» (мнимоевклидовы), полуевклидовы и изотропные.

Пусть дана плоскость $\beta = \left\{0, \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k\right\}$, где $O \in {}^2R_4$, $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_k$ – попарно ортогональные векторы из V_4, определяющие k-плоскость β. Произвольный вектор $\vec{a} = \lambda^\alpha \vec{a}_2,\ \alpha = 1, \ldots, k$ имеет длину $\left|\vec{a}\right|$, определяемую по формуле:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\lambda^1\right)^2 \vec{a}_1^{\,2} + \left(\lambda^2\right)^2 \vec{a}_2^{\,2} + \ldots + \left(\lambda^k\right)^2 \vec{a}_k^{\,2}}.$$

Если $\vec{a}_1^{\,2} > 0, \vec{a}_2^{\,2} > 0, ..., \vec{a}_k^{\,2} > 0,$ то k-плоскость β называется евклидовой, если $\vec{a}_1^{\,2} > 0, \vec{a}_2^{\,2} > 0, \ldots, \vec{a}_k^{\,2} > 0,$ – мнимоевклидовой. Если $\vec{a}_1^2 > 0, ..., \vec{a}_e^2 > 0,$ $\vec{a}_{e+1}^2 < 0, ..., \vec{a}_{e+p}^2 < 0,$ $\vec{a}_{e+p+1}^2 = 0, ..., \vec{a}_k^2 = 0,$ то $k-$ плоскость β называется полуевклидовой k-плоскостью индекса l дефекта $k - (l + p)$. Если все $\vec{a}_i^2 = 0 \quad i = 1,2,...,k$, то k-плоскость β называется изотропной k-плоскостью.

Евклидову k-плоскость будем обозначать R_k, мнимоевклидову k-плоскость будем обозначать ${}^kR_k$, полуевклидову k-плоскость индекса l дефекта r будем обозначать ${}^eR_k^r$, изотропную k-плоскость будем обозначать R_k^k.

В пространстве ${}^2R_4$ существуют все возможные виды 1-плоскостей (т.е. прямых): $R_1 = \{0, \vec{e}_1\},\quad {}^1R_1 = \{0, \vec{e}_3\},\quad R_1^1 = \{0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3\}$ – и все возможные виды 2-плоскостей: $R_2 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\},\ {}^1R_2 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_3\},\ {}^2R_2 = \{0, \vec{e}_3, \vec{e}_4\},\ R_2^1 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2 + \vec{e}_3\},\ {}^1R_2^1 = \{0, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4\},$ $R_2^2 = \{0, \vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4\}.$

В пространстве ${}^2R_4$ существует только три типа 3-плоскостей: ${}^1R_3 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\},\ {}^2R_3 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4\},\ {}^1R_3^1 = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_4\}.$

3-плоскостей $R_3^1,\ {}^2R_3^1,\ R_3,\ {}^3R_3,\ {}^1R_3^2,\ R_3^2,\ R_3^3$ в пространстве ${}^2R_4$ не существует.

Это следует из того, что существует только три типа прямых, а 3-плоскости являются ортогональными дополнениями соответствующих прямых. Если при движениях пространства ${}^2R_4$ прямые переходят друг в друга, то и их ортогональные дополнения также переходят друг в друга. Значит, они несут на себе метрику одного типа.

Перечислим теперь подалгебры алгебры $O(4,2)$ [4] ,обозначая каждую подалгебру буквой. Это обозначение будет применяться во всей работе.

$\overline{G}_1 = \{i_{10}\}$, $\overline{G}_2 = \{i_5\}$, $\overline{G}_3 = \{i_6\}$, $\overline{G}_4 = \{i_8 - i_{10}\}$, $\overline{G}_5 = \{i_5 - i_7\}$, $\overline{G}_6 = \{i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}$
$\overline{G}_7 = \{i_5 + i_{10}\}$, $\overline{G}_8 = \{i_6 - i_9\}$, $\overline{G}_9 = \{i_5 + \lambda i_{10}\}$, $\lambda \neq 0, \pm 1$, $\overline{G}_{10} = \{i_6 + \lambda i_9\}$ $\lambda \neq 0, \pm 1$,
$\overline{G}_{11} = \{i_5 - i_7 + i_8 - i_{10} + 2i_6 - 2i_9\}$, $\overline{G}_{12} = \{i_6 - i_9 + \lambda(i_5 - i_7)\}$ $\lambda \neq 0$, $\overline{G}_{13} = \{i_5 + i_7 + i_8 - 3i_{10}\}$,
$\overline{G}_{14} = \{3i_5 - i_7 - i_8 - i_{10}\}$, $\overline{G}_{15} = \{i_5 , i_{10}\}$, $\overline{G}_{16} = \{i_6, i_9\}$, $\overline{G}_{17} = \{i_9, i_8 - i_{10}\}$, $\overline{G}_{18} = \{i_9, i_5 - i_7\}$,
$\overline{G}_{19} = \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$, $\overline{G}_{20} = \{i_6, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}$, $\overline{G}_{21} = \{i_6 - i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}$,
$\overline{G}_{22} = \{i_6 - i_9, i_5 - i_7 + i_{10}\}$, $\overline{G}_{23} = \{i_6 + \lambda i_9, i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}\}$, $\lambda \neq 0, \pm 1,$

$\overline{G}_{24}=\{i_5-i_7-i_8+i_{10},\, i_8-i_{10}\pm i_6\pm i_9\}$, $\overline{G}_{25}=\{i_5-i_{10},\, i_5-i_7-i_8+i_{10}\}$,
$\overline{G}_{26}=\{i_6-i_9+\lambda(i_5-i_{10}),\, i_5-i_7-i_8+i_{10}\}$ $\lambda\neq 0,\pm 1$, $\overline{G}_{27}=\{i_5-i_{10},\, i_6-i_9\}$, $\overline{G}_{28}=\{i_8,\, i_9,\, i_{10}\}$,
$\overline{G}_{29}=\{i_5,\, i_7,\, i_9\}$, $\overline{G}_{30}=\{i_6,\, i_5-i_7,\, i_8-i_{10}\}$, $\overline{G}_{31}=\{i_6,\, i_9,\, i_5-i_7-i_8+i_{10}\}$,
$\overline{G}_{32}=\{i_5+i_{10},\, i_6-i_9,\, i_7+i_8\}$, $\overline{G}_{33}=\{i_5-i_7,\, i_6-i_9,\, i_8-i_{10}\}$, $\overline{G}_{34}=\{i_5-i_7,\, i_8-i_{10},\, i_6+\lambda i_9\}$
$\lambda\neq 0,\pm 1$, $\overline{G}_{35}=\{i_5-i_{10},\, i_6-i_9,\, i_5-i_7-i_8+i_{10}\}$, $\overline{G}_{36}=\{i_9,\, i_5-i_7,\, i_8-i_{10}\}$,
$\overline{G}_{37}=\{i_6,\, i_9,\, i_5-i_7,\, i_8-i_{10}\}$, $\overline{G}_{38}=\{i_6,\, i_9,\, i_5-i_{10},\, i_7-i_8\}$,
$\overline{G}_{39}=\{i_5-i_7,\, i_5-i_{10},\, i_6+i_9,\, i_7-i_8\}$, $\overline{G}_{40}=\{i_5,\, i_{10},\, i_6+i_9,\, i_7+i_8\}$,
$\overline{G}_{41}=\{i_6,\, i_9,\, i_5-i_7,\, i_5-i_{10},\, i_8-i_{10}\}$, $\overline{G}_{42}=\{i_5,\, i_6,\, i_7,\, i_8,\, i_9,\, i_{10}\}$.

Перечислим теперь полупрямые подалгебры. Для этого будем находить подпространства пространства $\overline{T}_4$, инвариантные относительно присоединенного представления подалгебр алгебры $O(4,2)$. Элементы пространства $\overline{T}_4=V_4$ будем записывать в виде: $a=(0,a^1,a^2,a^3,a^4)$. Инвариантность подпространства $K\subset\overline{T}_4$ относительно присоединенного представления некоторой алгебры $\overline{G}_i$, $i=1,\dots,42$ эквивалентна инвариантности этого пространства относительно присоединенного представления базиса этой алгебры. Заметим, что присоединенное представление adi, $i\in J$ в нашем случае определяется формулой

$$adi(a)=ai. \qquad \text{(I)}$$

Подпространства $\overline{K}$, инвариантные относительно adG_i, достаточно искать с точностью до Adh, где $Adh(G_i)$, $h\subset O(4,2)$.

Для приведения подпространств, инвариантных относительно подалгебры adG_i, будем пользоваться матрицами h_1-h_{16}. Чтобы каждый раз не проверять инвариантность базиса данной алгебры относительно Adh, выпишем формулы действия Adh_i на базисы данных алгебр.

Имеют место формулы:

$Adh_1(i_{10})=i_{10}$, $Adh_1(i_5+i_{10})=i_5+i_{10}$, $Adh_2(i_5)=i_5$, $Adh_3(i_6)=-i_6$, $Adh_3(i_6-i_9)=i_9-i_6$, $Adh_3(i_6+\lambda i_9)=-i_6-\lambda i_9$, $Adh_3(i_9)=-i_9$, $Adh_3(i_5-i_{10})=i_5-i_{10}$, $Adh_3(i_7-i_8)=i_8-i_7$, $Adh_4(i_6)=i_6$, $Adh_4(i_5-i_7-i_8+i_{10})=(chJ+shJ)(i_5-i_7-i_8+i_{10})$, $Adh_4(i_6-i_9)=i_6-i_9$, $Adh_5(i_8-i_{10})=i_8-i_{10}$, $Adh_6(i_5-i_7)=i_5-i_7$, $Adh_7(i_5-i_7-i_8+i_{10})=i_5-i_7-i_8+i_{10}$, $Adh_7(i_6-i_9)=i_6-i_9$, $Adh_8(i_6)=-i_9$, $Adh_8(i_9)=-i_6$, $Adh_8(i_5+i_{10})=i_5+i_{10}$, $Adh_8(i_6+i_8)=i_7+i_8$, $Adh_9(i_6)=i_9$, $Adh_9(i_9)=i_6$, $Adh_9(i_6-i_9)=i_6-i_9$, $Adh_9(i_5-i_7+i_8-i_{10})=i_5-i_7+i_8-i_{10}$, $Adh_{10}(i_5-i_7)=chJ(i_5-i_7)+shJ(i_8-i_{10})$, $Adh_{10}(i_8-i_{10})=shJ(i_5-i_7)+chJ(i_8-i_{10})$, $Adh_{11}(i_5+i_{10})=i_5+i_{10}$, $Adh_{11}(i_7+i_8)=i_9-i_6$, $Adh_{11}(i_6-i_9)=i_7+i_8$, $Adh_{12}(i_6)=-i_6$, $Adh_{12}(i_9)=i_9$, $Adh_{12}(i_8-i_{10})=-i_8+i_{10}$, $Adh_{12}(i_5-i_7)=i_5-i_7$, $Adh_{13}(i_6-i_9)=i_6-i_9$, $Adh_{13}(i_5-i_7-i_8+i_{10})=i_5-i_7-i_8+i_{10}$, $Adh_{14}(i_5-i_7+i_8-i_{10}+2i_6-2i_9)=-i_5+i_7-i_8+i_{10}-2i_6+2i_9$, $Adh_5(i_6)=i_6$, $Adh_{15}(i_9)=-i_9$, $Adh_{16}(i_6+\lambda i_9)=i_6+\lambda i_9$, $Adh_{16}(i_6-i_9)=i_6-i_9$, $Adh_{16}(i_5-i_7)=chJ(i_5-i_7)+shJ(i_8-i_{10})$, $Adh_{16}(i_8-i_{10})=shJ(i_5-i_7)+chJ(i_8-i_{10})$, $Adh_{16}(i_5-i_7-i_8+i_{10})=-i_5+i_7+i_8-i_{10}$, $Adh_{16}(i_5-i_7+i_8-i_{10})=-i_5+i_7-i_8+i_{10}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{14}$. Относительно adG_{14} инвариантны подпространства: $\{i_1+i_3,\, i_2-i_4\}$, $\{i_1,\, i_2,\, i_3,\, i_4\}$.

Рассмотрим двумерную подалгебру $\overline{G}_{15} = \{i_5, i_{10}\}$. Подпространства, инвариантные относительно adG_{15}, находятся как такие подпространства, которые инвариантны одновременно относительно adi_5 и относительно adi_{10}. Получаем, что таковыми будут только подпространства $\{i_1, i_2\}$, $\{i_3, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{16}$. Поступая, как в предыдущем случае, получим, что инвариантными относительно adG_{16} будут подпространства: $\{i_1 \pm i_3\}$, $\{i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_3\}$, $\{i_2, i_4\}$, $\{i_1 \pm i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2 \pm i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

При помощи Adh_9 подпространства $\{i_1 + i_3\}$ и $\{i_2 + i_4\}$, $\{i_1, i_3\}$ и $\{i_2, i_4\}$ сопряжены. При помощи Adh_3 подпространства $\{i_1 + i_3\}$ и $\{i_1 - i_3\}$, $\{i_2 + i_4\}$ и $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1 - i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. При помощи Adh_{15} подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены. При этом $\overline{G}_{16}$ инвариантна относительно Adh_3, Adh_9, Adh_{15} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{i_1, i_3\}$, $\{i_1 - i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{17}$. Относительно adG_{17} инвариантны подпространства $\{i_1\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{18}$. Относительно adG_{18} инвариантны подпространства $\{i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}^{\perp}$, $\{i_1, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{19}$. Относительно adG_{19} инвариантны подпространства $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{10} пространство $\{i_2 - i_4, \lambda i_1 + \mu i_3\}$ переводится в пространство $\{i_2 - i_4, i_1\}$, $\{i_2 - i_4, i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_3\}$ или $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$. При помощи Adh_{12} пространства $\{i_2 - i_4, i_1 + i_3\}$ и $\{i_2 - i_4, i_1 - i_3\}$ сопряжены. При этом подалгебра $\overline{G}_{19}$ инвариантна относительно Adh_{10}, Adh_{12} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1, i_2 - i_4\}$, $\{i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$, $\{i_2 - i_4\}^{\perp}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{20}$. Относительно adG_{20} инвариантны подпространства $\{i_1 + i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

При помощи Adh_4 подпространство $\{i_1 + i_3, \lambda i_2 + \mu i_4\}$ переводится в одно из подпространств $\{i_1 + i_3, i_2\}$, $\{i_1 + i_3, i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 - i_4\}$. Подалгебра $\overline{G}_{20}$ инвариантна относительно Adh_4 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1 + i_3\}$, $\{i_2 - i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2\}$, $\{i_1 + i_3, i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 \pm i_4\}$, $\{i_1 + i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2 - i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{21}$. Относительно adG_{21} инвариантны подпространства: $\{\lambda(i_1 + i_3) + \mu(i_2 - i_4)\}$, $\{i_1 \pm i_4, i_2 \pm i_3\}$, $\{i_2 - i_4, i_1 \pm i_3\}$, $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$, $\{\lambda(i_1 + i_3) + \mu(i_2 - i_4)\}^{\perp}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_7 подпространство $\{\lambda(i_1 + i_3) + \mu(i_2 - i_4)\}$ переводится в $\{i_1 + i_3\}$ или $\{i_1 + i_2 + i_3 - i_4\}$. При помощи Adh_{13} пространства $\{i_1 + i_3\}$ и $\{i_1 + i_2 + i_3 - i_4\}$ сопряжены. При помощи Adh_8 подпространства $\{i_1 + i_3, i_2 + i_4\}$ и $\{i_1 - i_3, i_2 - i_4\}$ сопряжены, а при помощи Adh_{16} сопряжены пространства $\{i_1 + i_4, i_2 - i_3\}$ и $\{i_1 - i_4, i_2 + i_3\}$. Подалгебра

$\overline{G}_{21}$ инвариантна относительно Adh_7, Adh_8, Adh_{13}, Adh_{16} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1+i_3\}$, $\{i_1+i_4, i_2-i_3\}$, $\{i_2-i_4, i_1\pm i_3\}$, $\{i_1+i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{22}$. Относительно adG_{22} инвариантны подпространства: $\{i_1-i_3\}$, $\{i_2-i_4\}$, $\{i_1\pm i_3, i_2\mp i_4\}$, $\{i_1-i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1-i_3\}^{\perp}$, $\{i_2-i_4\}^{\perp}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_9 подпространства $\{i_1-i_3\}$ и $\{i_2-i_4\}$, $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$ и $\{i_1-i_3, i_2+i_4\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G_{22}}$ инвариантна относительно Adh_9 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1-i_3\}$, $\{i_1-i_3, i_2\pm i_4\}$, $\{i_1-i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{23}$. Относительно adG_{23} инвариантны подпространства $\{i_1-i_3\}$, $\{i_2-i_4\}$, $\{i_1-i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1\pm i_3, i_2\mp i_4\}$, $\{i_1-i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{16} подпространства $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$ и $\{i_1-i_3, i_2+i_4\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{23}$ инвариантна относительно Adh_{16} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1-i_3\}$, $\{i_2-i_4\}$, $\{i_1-i_3, i_2\pm i_4\}$, $\{i_1-i_3, i_2-i_4\}^{\perp}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $\overline{G}_{24}$ инварианты подпространства: $\{i_2-i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1\pm i_3\}$, $\{i_2-i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $\overline{G}_{25}$ инварианты подпространства: $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $\overline{G}_{26}$ инварианты подпространства: $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $\overline{G}_{27}$ инвариантно только одно подпространство: $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{28}=\{i_8, i_9, i_{10}\}$. Относительно $ad\overline{G}_{28}$ инвариантны те и только те подпространства, которые инвариантны относительно adi_8, adi_9 и adi_{10}. Таковыми являются только подпространства $\{i_1\}$, $\{i_2, i_3, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{29}$ и, как в предыдущем случае, устанавливаем, что относительно $\overline{G}_{29}$ инвариантны подпространства $\{i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{30}$. Относительно $ad\overline{G}_{30}$ инвариантны подпространства $\{i_2-i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1\pm i_3\}$, $\{i_2-i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{12} подпространства $\{i_2-i_4, i_1+i_3\}$ и $\{i_2-i_4, i_1-i_3\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{30}$ инварианта относительно Adh_{12} (2). Таким образом, инвариатные подпространства приводятся к виду: $\{i_2-i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1+i_3\}$, $\{i_2-i_4\}^{\perp}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{31}$. Относительно $ad\overline{G}_{31}$ инвариантны подпространства $\{i_1+i_3\}$, $\{i_2-i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1\pm i_3\}$, $\{i_1+i_3, i_2+i_4\}$, $\{i_1+i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_8 подпространства $\{i_1+i_3\}$, $\{i_2-i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1-i_3\}$, $\{i_2+i_4, i_1+i_3\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{31}$ инвариантна относительно $Adhg$ (2).

Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1+i_3\}$, $\{i_1+i_3, i_2\pm i_4\}$, $\{i_1+i_3, i_2, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{32}$. Относительно $ad\overline{G}_{32}$ инвариантны подпространства: $\{i_1+i_3, i_2\pm i_4\}$, $\{i_1\pm i_4, i_2\mp i_3\}$, $\{i_1+i_3, i_2+i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_8 подпространства $\{i_1+i_3, i_2+i_4\}$, $\{i_1-i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1+i_4, i_2-i_3\}$, $\{i_1-i_4, i_2-i_3\}$ сопряжены.

При помощи Adh_{11} подпространства $\{i_1+i_4, i_2-i_3\}$, $\{i_1-i_3, i_2-i_4\}$ сопряжены. Подалгеба $\overline{G}_{32}$ инварианты относительно Adh_8 и Adh_{11} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводя к виду: $\{i_1+i_3, i_2+i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{33}$. Относительно $ad\overline{G}_{33}$ инвариантны подпространства: $\{i_2-i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1\pm i_3\}$, $\{i_2-i_4\}^{\perp}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{34}$ инвариантны подпространства: $\{i_2-i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1\pm i_3\}$, $\{i_2-i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{35}$ инвариантны подпространства: $\{i_2-i_4, i_1+i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{36}$ инвариантны подпространства: $\{i_2-i_4\}$, $\{i_2-i_4, \lambda i_1+\mu i_2\}$, $\{i_2-i_4, i_1, i_3\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{37}$. Относительно $ad\overline{G}_{37}$ инварианты подпространства: $\{i_2-i_4\}$, $\{i_2-i_4, i_1\pm i_3\}$, $\{i_2-i_4\}^{\perp}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_{12} подпространства $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$ и $\{i_1-i_3, i_2-i_4\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{36}$ инвариантна относительно Adh_{12} (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_2-i_4\}$, $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1, i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Рассмотрим подалгебру $\overline{G}_{38}$. Относительно $ad\overline{G}_{38}$ инвариантны подпространства: $\{i_1\pm i_3, i_2\mp i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. При помощи Adh_3 подпространства $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$ и $\{i_1-i_3, i_2-i_4\}$ сопряжены. Подалгебра $\overline{G}_{38}$ инвариантна относительно Adh_3 (2). Таким образом, инвариантные подпространства приводятся к виду: $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{39}$ инварианты подпространства: $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{40}$ инварианты подпространства: $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{41}$ инварианты подпространства: $\{i_1+i_3, i_2-i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Относительно $ad\overline{G}_{42}$ инварианты подпространства: $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$.

Предположим теперь, что мы хотим выписать все полупрямые подалгебры $H_1\oplus H_2$ алгебры $G_0=\tau_4\oplus\vartheta(4,2)$. Рассмотрим некоторую подалгебру $G_i, i\in\overline{1,42}$. Выпишем все (с точностью до сопряжённости) такие полупрямые подалгебры H, что $\partial r_2 H=G_i$. Пусть $i=1$. Инвариантные подпространства τ_4 относительно $ad\overline{G}_1$ приводятся (п. 4) к виду: $\{i_1\}$, $\{i_1, i_2\}$, $\{i_3, i_4\}$, $\{i_2, i_3, i_4\}$, $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}$. Тогда все полупрямые подалгебры H со свойством $\partial r_2 H=G_i$ с точностью до сопряжённости запишутся в виде $\{i_{10}, i_1\}$, $\{i_{10}, i_1, i_2\}$, $\{i_{10}, i_3, i_4\}$, $\{i_{10}, i_2, i_3, i_4\}$, $\{i_{10}, i_1, i_2, i_3, i_4\}$. Аналогично выписываются полупрямые подалгебры для любой подалгебры $G_i, i\in\overline{1,42}$. Таким образом, нами классифицированы с точностью до сопряжённости все полупрямые подалгебры алгебры G_0.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца / И. В. Белько, А. С. Феденко // Докл. АН БССР. – 1970. – Т. XIV, № 5. – С. 393–395.
2. Белько, И. В. Подгруппы группы Лоренца – Пуанкаре / И. В. Белько // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1971. – № 1. – С. 5–13.
3. Понтрягин, Л. С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. – М. : Наука, 1973. – 519 с.
4. Хабибулина, Р. Н. Классификация групп движений биаксиального пространства гиперболического типа / Р. Н. Хабибулина, А. П. Широков // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1968. – Т. 128, кн. 3, вып. 3. – С. 154–163.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 23.03.2017

Yudov A.A., Volkova A.O., Arabchik E.V., Arabchik D.S. **Classification of Lie Subgroup of a Group of Movements Spaces $^{2}R_4$ and their Invariant Characteristics**

In this paper, the related Lie subgroups of the Lie group of motions of the four-dimensional pseudo-Euclidean space of the zero signature-space $^{2}R_4$. *Invariant planes and lines for such Lie subgroups and their images of stationarity are found.*