УДК 517+518.948

В.М. Мадорский
канд. физ.-мат. наук, доц.,
доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: priclmath@brsu.brest.by

О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Рассматриваются линейные и нелинейные периодические и почти периодические оптимизационные задачи с квадратичным критерием качества. Даются способы получения оптимальных управлений регулярных оптимизационных задач, задач с вырождающейся платой управляющего воздействия, а также нелинейных оптимизационных задач.

Ниже мы будем рассматривать оптимизационные задачи с квадратным критерием качества, которым посвящена обширная литература (см. [1] и приведенную там библиографию). Тем не менее периодический и почти периодический случай (почти периодические колебания – это наложение простых гармонических колебаний с несоизмеримыми частотами) изучены в меньшей степени [2; 3].

Синтез оптимального управления периодических задач с квадратным критерием качества подробно исследован в [4] для случая, когда в функционале стоит положительно определенная матрица платы за управляющее воздействие, то есть критерий качества является невыраженным. Рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u)=\int_0^T (u^*Ku+u^*L^*x+x^*Lu+x^*Mx)dt \tag{1}$$

на траекториях системы

$$dx/dt=A(t)x+B(t)u+f(t), \tag{2}$$

где $f(t)$ – непрерывная T-периодическая функция, $x(t)$ – T-периодический n-мерный вектор, $u(t)$ – T-периодический m-мерный вектор ($m<n$), $x\in R^n, u\in R^m$, $A(t),B(t),K(t),L(t),M(t)$ – T-периодические непрерывные матрицы соответствующих размерностей, M – симметричная, K – симметричная и положительно определённая матрица (* – знак транспонирования). К классу допустимых будем относить такие управления $u\in U$, для которых уравнение (2) имеет решение и функционал (1) конечен. Допустимое управление $\overline{u}$ будем называть оптимальным, если для $\forall u\in U$ имеет место соотношение

$$J(u)\equiv J(u,x)\ge J(\overline{u},\overline{x})\equiv J(\overline{u}).$$

Вводим вспомогательные уравнения типа Риккати и линейное

$$\begin{gathered} dN/dt=NBK^{-1}B^*N^*+N(BK^{-1}L^*-A)+ \\ +(LK^{-1}B^*-A^*)N^*+LK^{-1}L^*-M; N(0)=N(T), \end{gathered} \tag{3}$$

$$dr/dt=(LK^{-1}B^*-A^*+NBK^{-1}B^*)r+Nf; r(0)=r(T). \tag{4}$$

Полагаем, что уравнение (3) имеет T-периодическое решение и соответствующее этому решению существует T-периодическое решение уравнения (4).

Имеет место

Теорема 1 [4]. Пусть уравнение $dy/dt=(A-BK^{-1}L^{*}-BK^{-1}B^{*}N)y$ не имеет T-периодических решений, кроме нулевого. Тогда оптимальная пара $(\overline{u},\overline{x})$ находится из соотношений

$$\overline{u}=-K^{-1}\left[(L^{*}+B^{*}N)x-B^{*}r\right], \tag{5}$$

$$dx/dt=(A-BK^{-1}L-BK^{-1}B^{*}N)x+BK^{-1}B^{*}r+f, x(0)=x(T),$$

при этом N, r являются T-периодическими решениями задач (3) – (4).

Пример. Оптимизационная задача

$$dx/dt=-x+u+\sin t; x(0)=x(2\pi);$$

$$J(u,x)=\int_{0}^{2\pi}(u^{2}(t)+x^{2}(t))dt\to\min$$

описывает процесс в электрической цепи переменного тока с индуктивностью и сопротивлением, в цепи действует электродвижущая сила $E=\sin t$, x – сила тока, u – управляющее воздействие. Решаем задачу, используя принцип максимума Л.С. Понтрягина.

Гамильтонианин имеет вид

$$H(x,u,\varphi)=\varphi_0(u^{2}+x^{2})+\varphi(-x+u+\sin t),$$

$$d\varphi_0/dt=0, d\varphi/dt=-2\varphi_0 x+\varphi; \varphi(0)=\varphi(2\pi),$$

из последних соотношений следует, что $\varphi_0\neq 0$, так как в противном случае и $\varphi\equiv 0$. Пусть $\varphi_0=-1$. Тогда необходимые условия оптимальности дают

$$\partial H/\partial u=-2u+\varphi=0, \begin{cases} dx/dt=-x+\varphi/2+\sin t, \\ d\varphi/dt=2x+\varphi. \end{cases}$$

Решением системы будет вектор $(x,\varphi)=((\sin t-\cos t)/3;-2(\sin t)/3$. Подозрительным на оптимальность будет управление $u=-(\sin t)/3$. Для решения задачи применим описанную в [4] методику, дающую достаточные условия оптимальности. В нашем случае

$$A=-1; D=1; f(t)=\sin t; K=1; L=0; M=1; T=2\pi.$$

Уравнения (3), (4) и (2) имеют вид

$$dN/dt=N^{2}+2N-1;\ N(0)=N(2\pi).$$

$$dr/dt=(1+N)r+N\sin t;\ r(0)=r(2\pi). \tag{6}$$

$$dx/dt=(-1-N)x+r+\sin t;\ x(0)=x(2\pi).$$

Система (6) имеет 2π –периодические решения

$$N_1=-1+\sqrt{2}; N_2=-1-\sqrt{2}.$$

а) 2π – периодическому решению $N=-1+\sqrt{2}$ соответствуют 2π –периодические решения

$$r=((\sqrt{2}-2)\sin t+(1-\sqrt{2})\cos t)/3 \text{ и } \overline{x}=(\sin t-\cos t)/3.$$

По формуле (5) находим $u=-(\sin t)/3$.

б) 2π –периодическому решению $N=-1-\sqrt{2}$ соответствуют 2π –периодические решения

$$r=((-2-\sqrt{2})\sin t+(\sqrt{2}+1)\cos t)/3 \text{ и } \overline{x}=(\sin t-\cos t)/3.$$

Из формулы (5) следует, что $\overline{u}=-(\sin t)/3$.

Задача оптимального управления линейной системой с квадратичным критерием достаточно хорошо исследована для случая, когда в функционале стоит положительно-определенная матрица платы за управляющее воздействие [4; 7], то есть критерий качества является невырожденным. Но в некоторых задачах автоматического регулирования, например, при синтезе следящих систем высокой точности [8] или при синтезе системы инвариантной по отношению к некоторому классу входных воздействий, критерий качества может быть вырождающимся, то есть матрица платы за управляющее воздействие становиться лишь положительной (неотрицательной) в некоторые моменты или на некоторых отрезках времени.

Способ нахождения оптимального управления, описанный в работах [4; 6], оказывается некорректным, так как управления, содержащие обращение положительной матрицы, теряют смысл. В настоящей работе изучается линейная краевая задача с периодическими коэффициентами и сингулярной квадратичной формой и синтезируются субоптимальные в некотором смысле, а также оптимальные управления.

Постановка задачи

Рассматривается задача минимизации функционала

$$I(u)=\int_0^T\left(u^*Ku+x^*Mx\right)dt \tag{7}$$

на траекториях системы

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bx+f(t),\; x(0)=x(T), \tag{8}$$

где $f(t)\in R^n$ – непрерывная T-периодическая вектор-функция, $x(t)\in R^n$, $u(t)\in R^m$ – соответственно T-периодические n- и m-мерные вектор-функции ($m < n$), $A(t)$, $B(t)$, $K(t)$, $M(t)$ – T-периодические непрерывные матрицы соответствующих размерностей, M – симметричная, K – симметричная неотрицательная матрица (* – знак транспонирования). Заметим, что мы не требуем неотрицательной определенности матрицы M, как это традиционно делается [4; 7].

К классу допустимых управлений U будем относить такие управления u, для которых уравнение (8) имеет решение. Допустимое управление $\bar{u}$ будем называть оптимальным, если выполняется соотношение $I(u)\equiv I(x,u)\geq I(\bar{x},\bar{u})\equiv I(\bar{u})\;\;\forall u\in U$.

При сделанных выше предположениях оптимальное управление может не существовать.

В связи с этим рассмотрим вспомогательные ε – задачи (10), (12) и (11), (13) с функционалом (9)

$$I_\varepsilon(u)=\int_0^T\left[u^*(K+\varepsilon\;E)u+x^*Mx\right]dt \tag{9}$$

$\varepsilon>0$, E – единичная матрица.

Вводим уравнение типа Рикатти

$$\frac{dN_\varepsilon}{dt}=N_\varepsilon B(K+\varepsilon\;E)^{-1}B^*N_\varepsilon^*-N_\varepsilon^*A-A^*N_\varepsilon-M, \tag{10}$$

$$N_\varepsilon(0)=N_\varepsilon(T).$$

$$\frac{dN}{dt}=NBK^+B^*N^*-N^*A-A^*N\;-M, \tag{11}$$

$$N(0)=N(T)$$

и линейные уравнения

$$\frac{dr_\varepsilon}{dt}=(N_\varepsilon B(K+\varepsilon\ E)^{-1}B^*-A^*)r_\varepsilon+N_\varepsilon\ f, \tag{12}$$

$$r_\varepsilon(0)=r_\varepsilon(T).$$

$$\frac{dr}{dt}=(NBK^+B^*-A^*)r+Nf\ ,\ r(0)=r(T). \tag{13}$$

Полагая, что уравнения (10) и (12) и соответствующие им уравнения (11), (13) имеют по крайней мере одно T-периодическое решение (вопрос существования T-периодических решений рассматривается в работах [9; 10]), и используя симметрию матриц $N_\varepsilon(t)$, следуя методике работы [4], проводим преобразование подынтегрального выражения: выразим M из (10), N_ε, f из (12), Ax из (8) и подставляя в подынтегральное выражение (9), получим соотношение

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(u)=\int_0^T&\left\{u^*+x^*N_\varepsilon B(K+\varepsilon\ E)^{-1}-r_\varepsilon^*B(K+\varepsilon\ E)^{-1}\right\}(K+\varepsilon\ E)\times\\ &\times\left\{u+(K+\varepsilon\ E)^{-1}xN_\varepsilon B-(K+\varepsilon\ E)^{-1}r_\varepsilon B^*\right\}dt-\\ &-\int_0^T\left[r_\varepsilon^*B(K+\varepsilon\ E)^{-1}B^*r_\varepsilon+f^*r_\varepsilon+r_\varepsilon^*f\right]dt. \end{aligned} \tag{14}$$

Из неотрицательности матрицы K и независимости последнего интеграла от управления следует, что оптимальное управление ε – задачи имеет вид

$$U_\varepsilon^{опт}=-(K+\varepsilon\ E)^{-1}\left[B^*N_\varepsilon x-B^*r_\varepsilon\right] \tag{15}$$

Определение. Пусть существует конечный инфимум $I^0=\inf I,$ а функционалы I_ε таковы, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\inf\limits_u I_\varepsilon=I^0$. Если для последовательности $\{u_\varepsilon\}$ справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\inf\limits_u I_\varepsilon=I^0$, то назовём $\{u_\varepsilon\}$ последовательностью субоптимальных управлений (это не совпадает с определением субоптимальных управлений в [7]). Если для задачи (7), (8) инфимум I^0 конечен (а для этого достаточно сделанные ранее предположения дополнить требованием не отрицательности матриц $M(t)$), то стандартными рассуждениями нетрудно проверить, что построенные $\{U_\varepsilon^{опт}\}$ образуют последовательность субоптимальных управлений. Действительно, в нашем случае $I_\varepsilon(u)\ge I(u)\ \ \forall u\in U,$ так что $\inf\limits_u I_\varepsilon\ge\inf\limits_u I$. Далее, $\inf\limits_u I_\varepsilon\le I_\varepsilon(u)=I(u)+\varepsilon\ \ \|u\|^2\ \ \forall u\in U$, поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\inf\limits_u I_\varepsilon\le\inf\limits_u I.$

Вместе с предыдущим это дает равенство $\inf\limits_u I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\inf\limits_u I_\varepsilon$, и так как по определению $I_\varepsilon(U_\varepsilon^{опт})=\inf\limits_u I_\varepsilon$, то последовательность $\{U_\varepsilon^{опт}\}$ субоптимальна в определенном выше смысле.

Хотя субоптимальные управления существуют и могут быть определены по формуле (15), однако без дополнительных условий нельзя утверждать существование решения задач (10), (12) при $\varepsilon \to 0$, как ничего нельзя сказать и о существовании оптимального управления в исходной задаче (7), (8), а следовательно, и о сходимости к нему субоптимальных управлений. Такие дополнительные требования указаны в следующих пунктах.

Построение оптимального управления для сингулярного случая

Пусть для матриц *К* и *B,* определенных выше, выполняется соотношение

$$sp\int_0^T B(t)K^+(t)B^*(t)dt < +\infty\,. \tag{16}$$

Система с такими матрицами рассматривались в работах Б.М. Миллера, А.П. Серебровского [8] для задач, исследуемых в монографии А.М. Летова [11]. Как показано в [8], при выполнении условия (16) существует единственное решение уравнения Рикатги вида (10).

При невыполнении условия (16) проверяем выполнимость условий, предложенных работе [10], и при выполнении этих условий будет следовать единственность решения задачи (10) и, следовательно, единственность решения редуцированной к ней задачи Коши.

Пусть при всех t совместна система алгебраических уравнений относительно y

$$K(t)y + B^*(t) = 0\,. \tag{17}$$

Здесь $K^+(t)$ – псевдообратная матрица относительно матрицы *K(t)*.

Из совместимости (17) следует, что

$$B^*(t) = K(t)K^*(t)B^*(t)\,. \tag{18}$$

Условие (18) вместе с соотношением

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(K^{\frac{1}{2}}(t)\right)^*\left[K^{\frac{1}{2}}(t)\left(K^{\frac{1}{2}}(t)\right)^* + \varepsilon\ E\right]^{-1} = K^+(t) \tag{19}$$

дает

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(K + \varepsilon\ E\right)^{-1}B^*(t) = K^+(t)B^*(t). \tag{20}$$

Поскольку выполняется условие теоремы о предельном переходе по параметру, становится законным предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в (10), (12), (14). Правые части предельных соотношений (10), (12) существуют и равны правым частям (11), (13), следовательно, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{dN_\varepsilon}{dt} = \dfrac{dN}{dt}$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{dr_\varepsilon}{dt} = \dfrac{dr}{dt}$. Таким образом, *N(t), r(t)* находим как решение задач

$$\frac{dN}{dt} = NBK^+B^*N^* - N^*A - A^*N\ ,\ N(0) = N(T), \tag{21}$$

$$\frac{dr}{dt} = (NBK^+B^* - A^*)r + Nf\ ,\ r(0) = r(T), \tag{22}$$

а *I(u)* получаем как предел

$$
\begin{gathered}
I(u) = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \int_0^T \left\{u + K^+B^*Nx - K^+B^*r\right\}^* K^+\left(u + K^+B^*Nx - K^+B^*r\right)dt - \\
-\int_0^T \left(r^*BK^+B^*r + f^*r + r^*f\right)dt.
\end{gathered} \tag{23}
$$

Из неотрицательности K следует, что

$$
u^{опт} = -K^+(B^*Nx - B^*r). \tag{24}
$$

Поскольку $u^{опт} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon^{опт}$ и при этом $I^0 = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon^0$, то последовательности субоптимальных управлений $\left\{u_\varepsilon^{опт}\right\}$ сходятся к $u^{опт}$ задачи (7), (8) точечно. Таким образом, доказана

Теорема 2. Пусть для задачи (7), (8) с вырождающейся платой за управляющее воздействие выполняются условие (16), соотношение (17) и существует хотя бы одно T-периодическое решение задачи (21) и соответствующее ему T-периодическое решение задачи (22). Тогда существуют оптимальные управления исходной задачи, одно из которых определяется по формуле (24).

Замечание 1. Подставляя (24) в (8), получим уравнение для определения $x^{опт}$, через которое выражается $u^{опт}$.

Замечание 2. Аналогичные результаты получаются, если в функционале I имеются дополнительные слагаемые $u^*Lx + x^*Lu$, *где* $L = L(t)$ есть Т-периодическая непрерывная $(n \times m)$- матрица. Задачи (21), (22) принимают при этом вид

$$
\frac{dN}{dt} = NBK^+B^*N^* + \left(LK^+B^* - A^*\right)N + N^*\left(BK^+L^* - A\right) + LK^+L^* - M, \quad N(0)=N(T),
$$

$$
\frac{dr}{dt} = \left(LK^+B^* - A^* + NBK^+B^*\right)r + Nf, \quad r(0)=r(T).
$$

Подобным же образом изменятся задачи (10), (12), а вид функционалов (14), (23), субоптимальных управлений (15) и оптимального управления (24) остается неизменным.

Регуляризация задачи с приближенными данными

В дополнении к условиям, рассмотренным выше, предположим, что при всех t матрицы $M = M(t) = M^*(t)$ неотрицательны. Пусть вместо точных матриц $K = K(t)$ заданы их симметричные (но не обязательно неотрицательные) δ-приближения $K = K_\delta(t) = K_\delta^*(t)$, $\left\|K_{\delta(t)} - K(t)\right\| \le \delta \quad \forall t$ и требуется построить субоптимальные управления исходной задачи (7), (8). В силу линейности дифференциальной системы (8) и неотрицательности матриц K и M исходный точный дифференциал (7) выпукл и, следовательно, ввиду рефлексивности гильбертова пространства L_2^m, слабо полунепрерывен, снизу в этом пространстве [12, с. 107]. Из последнего свойства функционала (7) и его выпуклости очевидным образом вытекает выпуклость и замкнутость множества оптимальных управлений задачи (7), (8). Поскольку гильбертово пространство L_2^m рефлексивно и строго выпукло, то в этом множестве оптимальных управлений имеется и притом ровно одно оптимальное управление u^0 минимальной нормы, именуемое нормальным.

Рассмотрим приближенный сглаживающий функционал А.Н. Тихонова

$$I_\delta(u) = \int_0^T \left(u^*\left(K_\delta + \alpha\ (\delta)E\right)u + x^* Mx\right)dt \tag{25}$$

на траекториях системы (8) при $\alpha\ (\delta) > \delta$. Поскольку матрицы $K_\delta + \alpha(\delta)E$ положительно определены, то для задачи (25), (8), как показано выше в формуле (15), можно синтезировать оптимальное управление u_δ. Для этих управлений оказывается справедливой

Теорема 3. В условиях теоремы 1 при неотрицательных матрицах *M*, приближенных симметричных матрицах K_δ и соотношениях

$$\alpha(\delta) > \delta,\ \lim_{\delta\to 0}\alpha(\delta) = 0,\ \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta}{\alpha(\delta)} = 0 \tag{26}$$

регуляризованные оптимальные управления задач (25), (8) субоптимальны для исходной задачи (7), (8) и сильно (по L_2^m-норме) сходятся при $\delta \to 0$ ее нормальному оптимальному управлению u^0.

Доказательство. По определению имеем

$$I_\delta(u) = \min_u I_\delta \le I_\delta(u^0) \le I(u^0) + \left(\alpha\ (\delta) - \delta\right)\left\|u^0\right\|^2$$

С другой стороны, $I_\delta(u_\delta) \ge I(u_\delta) + \left(\alpha\ (\delta) - \delta\right)\left\|u_\delta\right\|^2$. Так что

$$I(u_\delta) + \left(\alpha\ (\delta) - \delta\right)\left\|u_\delta\right\|^2 \le\ I(u^0) + \left(\alpha\ (\delta) - \delta\right)\left\|u^0\right\|^2. \tag{27}$$

По определению оптимального правления $I(u^0) \le I(u_\delta)$ и из неравенства (27) получаем, что

$$\left(\alpha\ (\delta) - \delta\right)\left\|u_\delta\right\|^2 \le \left(\alpha\ (\delta) - \delta\right)\left\|u^0\right\|^2,\ \left\|u_\delta\right\|^2 \le \left(1 + \frac{2\delta}{\alpha\ (\delta) - \delta}\right)\left\|u^0\right\|^2,$$

откуда в силу условий (26)

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\left\|u_\delta\right\| \le \left\|u^0\right\|. \tag{28}$$

Поскольку пространство L_2^m рефлексивно, то ограниченность последовательности $\{u_\delta\}$ влечёт наличие слабых предельных её точек при $\delta \to 0$. Возьмём какую-либо из этих слабых предельных точек u_0 и слабо сходящуюся к ней подпоследовательность, которую ради простоты обозначений тоже запишем как $\{u_\delta\}$. Тогда из (26) и (27) следуют соотношения

$$0 \le I(u_\delta) - I(u^0) \le \left(\alpha\ (\delta) + \delta\right)\left\|u^0\right\|^2 \to 0,\ \ \delta \to 0.$$

Так что

$$u_\delta \to u_0\ (\text{слабо}), I(u_\delta) \to I(u^0) = \min_u I, \delta \to 0. \tag{29}$$

Ввиду слабой полунепрерывности функционала I снизу из соотношений (29) вытекает, что $I(u_0) = \min_u I$, откуда u_0 – оптимальное управление. Кроме того, поскольку $I_\delta(u) - I(u) \le (\alpha(\delta) + \delta)\|u\|$ и последовательность $\{u_\delta\}$ ограничена в силу (28), то из (29) видно, что $\{u_\delta\}$ – субоптимальная последовательность управлений.

По свойству слабой сходимости,

$$\|u_0\| \le \underline{\lim}_{\delta \to 0} \|u_\delta\|,$$

что вместе с неравенством (28) даёт неравенства

$$\|u_0\| \le \underline{\lim}_{\delta \to 0} \|u_\delta\| \le \overline{\lim}_{\delta \to 0} \|u_\delta\| \le \left\|u^0\right\|. \tag{30}$$

Поскольку u_0 и u^0 – оптимальные управления исходной задачи, u^0 – единственное управление с минимальной нормой, то неравенства (30) возможны лишь при совпадении $u_0 = u^0$, так что все слабые предельные точки последовательности $\{u_\delta\}$ совпадают с управлением u^0, и поэтому вся последовательность $\{u_\delta\}$ (а не только её подпоследовательность) слабо сходится к управлению u^0. Теперь из соотношения (30) вытекают равенства

$$\underline{\lim}_{\delta \to 0} \|u_\delta\| = \overline{\lim}_{\delta \to 0} \|u_\delta\| = \lim_{\delta \to 0} \|u_\delta\| = \left\|u^0\right\|,$$

а это вместе со слабой сходимостью $u_\delta \to u^0$ (слабо), $\delta \to 0$ ввиду гильбертовости пространства L_2^m даёт сильную сходимость в L_2^m-норме: $\left\|u_\delta - u^0\right\| \to 0,\ \delta \to 0.$

Теорема доказана.

Замечание 3. Поскольку предельное равенство (19) сохраняет силу при замене единичной матрицы E на любую симметричную положительно определенную матрицу, то с помощью предельного перехода нетрудно проверить, что $\lim_{\delta \to 0} u_\delta = u^{опт}$, где u_δ определяется по формуле (15), а $u^{опт}$ является единственным нормальным оптимальным управлением исходной задачи.

Замечание 4. Неотрицательность матриц M использовалась лишь как условие, достаточное для выпуклости исходного функционала $I(u)$. Если решение системы (8) записывают в виде $x = Hu + x_0$, с матрицей H, то для выпуклости функционала $I(u)$ достаточно более слабое условие неотрицательности матриц $K + H^* MH$, а при наличии в функционале $I(u)$ дополнительных членов $x^* Lu + u^* L^* x$ (см. замечание 2) – неотрицательности матриц $K + H^* MH + L^* H + H^* L$.

Замечание 5. Выпуклость исходного функционала I тоже использовалась нами не по существу, а лишь как достаточное его слабой полунепрерывности снизу. Если таковая может быть получена из иных соображений, то выпуклость исходного функционала не нужна. При этом нормальные управления могут образовывать неодноточечное подмножество N_0, к которому и будут сильно β-сходиться [13] субоптимальные управления u_δ при $\delta \to 0$, то есть непременно будут существовать и притом именно в подмножестве N_0 сильные предельные точки субоптимальных управлений u_δ.

Замечание 6. Симметричность возмущений матриц K_δ существенна, поскольку речь идет об эффективном синтезе управлений, основанном на результатах, полученных выше. Точно так же можно исследовать и случай симметричных малых возмущений матриц *M* и произвольных малых возмущений прочих данных задачи, и если мы ограничились рассмотрением возмущений только матриц *K,* то исключительно ради простоты и краткости изложения. При несимметричных возмущениях матриц *K* или *M* неизвестен способ эффективного синтеза субоптимальных управлений, хотя для управлений, минимизирующих точно или даже приближённо функционал $I_\delta(u)$, остаются в силе результаты, подобные теореме 3 (см. [13]).

Рассмотренная в начале статьи оптимизационная задача являлась линейной по фазовой координате. Переходим к рассмотрению случая, когда оптимизационная задача нелинейна по фазовой координате.

Рассмотрим управляемый почти периодический процесс:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(x,t)u, t \in (-\infty,\infty) \tag{31}$$

с критерием качества:

$$J(x,u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (u^*Ku + x^*L^*u + u^*Lx + x^*Mx)dt \,/. \tag{32}$$

Будем осуществлять поиск оптимального управления для нелинейной по фазовой координате системе с квадратичным критерием качества.

Относительно системы (31) – (32) полагаем: $x(t)$ почти периодическая n-мерная вектор-функция, $x(t)\in E^n, u(t)$ – непрерывная почти периодическая p-мерная вектор-функция, $u(t)\in E^p, B(x,t)$ – непрерывная по *x, t*, почти периодическая по t равномерно по x матрица размерности $n\times p$ со свойством $B(0,t)=0;\ A(t), \hat{E}(t), L(t), M(t)$ – непрерывные почти периодические матрицы соответствующих размерностей, при этом $\hat{E}(t), M(t)$ – симметричные, а $\hat{E}(t)$ – положительно определенная матрица. Символ * – символ транспонирования.

Из всего множества почти периодических $u(t)\in E^p$ будем рассматривать такие $u(t)\in U\in E^p$, которым соответствует по крайней мере одно почти периодическое решение $x(t)$ уравнения (1), и функционал (2) принимает конечное значение. Будем искать такие $\overline{u}(t)\in U$ и соответствующие им решения $x(t)$ уравнения (1), чтобы выполнялось условие:

$$j(\overline{x},\overline{u}) = \inf j(x,u). \tag{33}$$

Определенные таким образом $\overline{u}(t)$ будем называть оптимальным управлением.

Наиболее интересен случай синтеза оптимального управления, когда оптимальное управление является функцией соответствующего ему решения $x(t)$.

Для нахождения оптимального управления $\overline{u} = \overline{u}(\overline{x},t)$ задачи (31) – (32) используем технику, предложенную нами в работах [4; 6]. Для этого сделаем естественные предположения:

1) множество управлений *U* не пусто,

2) система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial N}{dt} = NB(x,t)K^{-1}B^*(x,t)N^* + N\left[B(x,t)K^{-1}L^* - A\right] + \left[LK^{-1}B^*(x,t) - A^*\right]N + LK^{-1}L^* - M$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax - B(x,t)K^{-1}B^*(x,t)Nx - B(x,t)K^{-1}L^*x \tag{34}$$

имеют хотя бы одно почти периодическое решение $\left(\bar{x}(t), \bar{N}(t)\right)$.

Покажем, что матрица $N(t)$, фигурирующая в (34), является симметричной, для чего рассмотрим первое уравнение системы (34). Транспонируя ей обе части этого уравнения, имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial N}{dt} = NB(x,t)K^{-1}B^*(x,t)N^* + N\left[B(x,t)K^{-1}L^* - A\right] + \\ +\left[LK^{-1}B^*(x,t) - A^*\right]N + LK^{-1}L^* - M.\end{gathered} \tag{35}$$

Полагаем, что уравнение (35) имеет хотя бы одно почти периодическое решение. Пусть $\widetilde{N}(t)$ – решение уравнения (35). Вычитая (34) из (35), имеем что $\widetilde{N}(t) = \widetilde{N}^*(t) + P$, где P – постоянная матрица со свойствами $P + P^* = 0$.

Так как этому свойству удовлетворяет нуль-матрица, то одним из решений уравнения (35) будет $\widetilde{N}(t) = \widetilde{N}^*(t)$

Симметричность матрицы $N(t)$ используем для преобразования подынтегрального выражения, для чего, следуя методике работы [6], выразим *M* из первого уравнения системы (34), *Ax* из (31) и, учитывая симметричность матриц *K, M, N,* после несложных преобразований [4] имеем

$$\begin{gathered}x^*Mx = x^*NBK^{-1}B^*Nx + x^*NBK^{-1}L^*x + x^*NBu + x^*LK^{-1}B^*Nx + \\ +u^*B^*Nx + x^*LK^{-1}L^*x - \frac{d\left(x^*Nx\right)}{dt}.\end{gathered} \tag{36}$$

Используя (6) и условие равномерной ограниченности почти периодической функции $x^*(t)'N(t)x(t)$ на всей действительной оси [3], перепишем $j(x, y)$ в виде

$$\begin{gathered}j(x,u) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left[\left[u + K^{-1}\right]\left(L^* + B^*N\right)x\right]\times \\ \times K\left[u + K^{-1}\left(L^* + B^*N\right)x\right]dt.\end{gathered} \tag{37}$$

В силу положительной определенности матрицы из соотношения (37) следует, что $j(x,u) \geq 0$ и $\inf j(x,u) = j(\bar{x},\bar{u}) = 0$ достигается на векторе, определяемом из соотношения

$$\bar{u} + K^{-1}\left[L^* + B^*N\right]\bar{x} = 0. \tag{38}$$

то есть

$$\bar{u}(\bar{x},t) = K^{-1}\left[L^* + B^*(\bar{x},t)N\right]\bar{x}. \tag{39}$$

Подставляя (38) в (31), получим второе уравнение системы (34), дающее возможность определить оптимальное решение $\bar{x}(t)$, соответствующее оптимальному управлению $\bar{u}(t)$.

Таким образом, нами может быть сформулирована

Теорема 4. Пусть относительно системы нелинейных уравнений (34) справедливы приведенные выше условия. Тогда синтезирующее оптимальное управление задачи (31) – (32) существует и вычисляется по правилу (39).

Замечание 7. Условие $B(0,t)=0$ дает условия существования сопряженного оператора $B^*(x,t)$.

Замечание 8. Результат, приведенный выше, относительно синтеза оптимального управления в задаче (31) – (33) рассмотрен в [14], однако при условии существования единственного решения нелинейной системы дифференциальных уравнений во всем функциональном пространстве, что является практически нереальным требованием.

Замечание 9. Нелинейную систему (4) дифференциальных уравнений будем решать разностными методами. После дискретизации дифференциальная задача сводится к разностной задаче, которую можно эффективно решать с помощью полулокальных алгоритмов, описанных в [9].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ройтенберг, Я. Н. Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. – М. : Наука, 1978. – 551 с.
2. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1969.– 455 с.
3. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1975. – 376 с.
4. Мадорский, В. М. О синтезе оптимального управления некоторыми периодическими решениями / Б. И. Крюков, В. М. Мадорский // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 8. – С. 28–32.
5. Halanay, A. Optimal Control of Periodic Solutions / A. Halanay // Rev. Ruom. Math. Pures et Appl. – 1974. – Vol. XIX, № 1. – P. 3–16.
6. Мадорский, В. М. Об одном подходе к решению задач оптимального управления / В. М. Мадорский, В. В. Анисович, Б. И. Крюков // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 251, № 2. – С. 265–268.
7. Брайсон, А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального уравнения / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М. : Мир, 1972. – 432 с.
8. Миллер, Б. М. Задача оптимального управления линейной системой с вырожденным квадратичным критерием качества / Б. М. Миллер, А. П. Серебровский // Автоматика и телемеханика. – 1979. – № 3. – С. 23–34.
9. Мадорский, В. М. Локализация решений нелинейных уравнений / В. М. Мадорский // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2002. – Т. 11. – С. 84–90.
10. Мадорский, В. М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В. М. Мадорский. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2005. – 186 с.
11. Летов, А. М. Динамика полета и управления / А. М. Летов. – М. : Наука, 1969. – 342 с.
12. Лисковец, О. А. Вариационные методы решение неустойчивых задач / О. А. Лисковец. – Минск : Наука и техника, 1981. – 343 с.
13. Данилин, Ю. М. О методах минимизации с ускоренной сходимостью / Ю. М. Данилин, Б. Н. Пшеничный // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1970.– Т. 10, № 6. – С. 1342–1353.

14. Анисович, В. В. Об оптимизации нелинейных почти периодических колебательных процессов / В. В. Анисович // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 3. – С. 190–192.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 30.03.2017

Madorsky V.M. **On the Synthesis of Optimum Control of Some Optimization Problems**

Linear and nonlinear periodic and almost periodic optimization problems with a quadratic quality criterion are considered. Methods are given for obtaining optimal controls for regular optimization problems, for problems with a degenerate control board, and for nonlinear optimization problems.