УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик[1], С.В. Сидак[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики
и информатики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]ассистент каф. информатики и прикладной математики
Брестского государственного технического университета,
магистрант Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: priclmath@brsu.brest.by

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА ПРИ ПОМОЩИ НЕЯВНОГО МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ В СЛУЧАЕ ПРИМЕНЕНИЯ ПРАВИЛА ОСТАНОВА ПО МАЛОСТИ НЕВЯЗКИ

Для решения линейных уравнений с положительным ограниченным и самосопряжённым оператором в гильбертовом пространстве предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по невязке, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получены оценка погрешности метода и оценка для момента останова.

1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения уравнения (1) предлагается неявный итерационный метод:

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_{n+1} = \left(E - \alpha A^2\right)x_n + 2\alpha Ay,\ x_0 = 0,\ k \in N. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближенной правой части $y_\delta, \|y - y_\delta\| \le \delta$. В этом случае метод (2) примет вид:

$$\left(E + \alpha A^2\right)x_{n+1,\delta} = \left(E - \alpha A^2\right)x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = 0,\ k \in N. \tag{3}$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т.е.

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\inf_n \left\|x - x_{n,\delta}\right\|\right) = 0 .$$

Для метода (3) при условии $\alpha > 0$ доказана сходимость при точной и приближённой правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т.е. $x = A^s z$, $s > 0$, получена априорная оценка погрешности [1]. Эта априорная оценка погрешности оптимизирована и найден априорный момент останова.

В [2] изучен случай неединственного решения операторного уравнения (1) и исследована сходимость метода (3) в энергетической («ослабленной») норме гильбертова пространства.

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод (3) становится неэффективным, так как тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова. Тем не менее этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по малости невязки, аналогичным [3–6].

2. Правило останова по малости невязки

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова условиями

$$\left\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon,\ (n < m),$$
$$\left\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\right\| \le \varepsilon,\ \ \varepsilon = b\delta,\ b > 1. \tag{4}$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\left\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\right\| > \varepsilon.$ Ниже метод итерации (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{m}\left\|x - x_{m,\delta}\right\|\right) = 0$. Покажем, что правило останова по невязке (4) применимо к методу (3).

Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \dfrac{\left(1-\alpha\lambda^2\right)^n}{\left(1+\alpha\lambda^2\right)^n}\right] \ge 0$. Нетрудно показать, что для $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\left|g_n(\lambda)\right| \le 4(n\alpha)^{1/2},\ n > 0, \tag{5}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le 1,\ n > 0, \tag{6}$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \to 0,\ \ n \to \infty,\ \ \forall\lambda \in (0, M], \tag{7}$$

$$\sup_{0\le\lambda\le M}\lambda^s\left|1 - \lambda g_n(\lambda)\right| \le \left(\frac{s}{2n\alpha e}\right)^{s/2},\ n > 0,\ \ 0 \le s < \infty. \tag{8}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0,$ $\|A\| \le M$. *Тогда для любого* $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \to 0,\ n \to \infty.$

Доказательство.

Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int\limits_0^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – спектральная функция оператора A, получим

$$(E - Ag_n(A)\omega = \int\limits_0^M (1-\lambda g_n(\lambda))dE_\lambda\omega = \int\limits_0^{\varepsilon_0}(1-\lambda g_n(\lambda))dE_\lambda\omega + \int\limits_{\varepsilon_0}^M (1-\lambda g_n(\lambda)dE_\lambda\omega.$$

Так как $1-\lambda g_n(\lambda) = \left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^n$ и $\left|\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right| \le q(\varepsilon_0) < 1$ для всех $\lambda \in (0, M]$ и $\alpha > 0$,

то $\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^M (1-\lambda g_n(\lambda))dE_\lambda\omega\right\| \le q^n(\varepsilon_0)\left\|\int\limits_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda\omega\right\| \le q^n(\varepsilon_0)\|\omega\| \to 0,\ n\to\infty$.

Из (6) имеем $\left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0}(1-\lambda g_n(\lambda)dE_\lambda\omega\right\| \le \left\|\int\limits_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda\omega\right\| = \left\|E_{\varepsilon_0}\omega\right\| \to 0,\ \varepsilon_0 \to 0$ в силу свойств спектральной функции. Следовательно, $(E - Ag_n(A))\omega \to 0,\ n\to\infty$. Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$. *Тогда для* $\forall v \in \overline{R(A)}$ *имеет место соотношение* $n^{\frac{s}{2}}\left\|A^s(E - Ag_n(A))v\right\| \to 0,$ *при* $n\to\infty,\ 0\le s<\infty.$

Доказательство. Так как верно неравенство (8), то получим

$$n^{\frac{s}{2}}\left\|A^s(E - Ag_n(A))\right\| \le n^{\frac{s}{2}} \sup_{0\le\lambda\le M} \lambda^s\left|1-\lambda g_n(\lambda)\right| \le n^{\frac{s}{2}}\gamma_s n^{\frac{-s}{2}} = \gamma_s,$$

где $\gamma_s = \left(\frac{s}{2\alpha e}\right)^{\frac{s}{2}}$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [7, с. 151], по которой сходимость $B_n u \to Bu$ при $n\to\infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1, 2, \ldots,$ ограничены независящей от *n* постоянной.

Возьмём в качестве плотного в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s+1$. Тогда для каждого $v = A\omega \in R(A)$ имеем

$$n^{\frac{s}{2}}\left\|A^s(E - Ag_n(A))v\right\| = n^{\frac{s}{2}}\left\|A^{s+1}(E - Ag_n(A))\omega\right\| \le n^{\frac{s}{2}}\left(\frac{s+1}{2\alpha e}\right)^{\frac{s+1}{2}} *$$

$$* n^{\frac{-(s+1)}{2}}\|\omega\| = \gamma_{s_1} n^{\frac{-1}{2}}\|\omega\| \to 0,$$

при $n\to\infty$, так как $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. *Пусть* $A = A^* \ge 0,\ \|A\| \le M$. *Если для некоторой последовательности* $n_p < \overline{n} = const$ *и* $v_0 \in \overline{R(A)}$ *при* $p\to\infty$ *имеем* $\omega_p = A\left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0$, *то* $\upsilon_p = \left(E - Ag_{n_p}(A)\right)\upsilon_0 \to 0.$

Доказательство. В силу (6) последовательность υ_p ограничена $\|\upsilon_p\| \le \gamma_0 \|\upsilon_0\|, \gamma_0 = 1, p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\upsilon_p - \to \upsilon, (p \in N' \subseteq N)$, тогда $A\upsilon_p - \to A\upsilon, (p \in N')$. Но по условию $\omega_p = A\upsilon_p \to 0$, $p \to \infty$, следовательно, $A\upsilon = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A, то $\upsilon = 0$. Тогда

$$\|\upsilon_p\|^2 = \left(\upsilon_p, (E - Ag_{n_p}(A))\upsilon_0\right) = (\upsilon_p, \upsilon_0) - (\upsilon_p, Ag_{n_p}(A)\upsilon_0) =$$
$$= (\upsilon_p, \upsilon_0) - \left(A\upsilon_p, g_{n_p}(A)\upsilon_0\right) = (\upsilon_p, \upsilon_0) - \left(\omega_p, g_n(A)\upsilon_0\right) \to (\upsilon\ \ , \upsilon_0),$$

так как $\omega_p \to 0$, $p \to \infty$, $\upsilon = 0$ и, по условию (5), $\left\|g_{n_p}(A)\right\| \le 4\left(n_p\alpha\right)^{1/2} < 4\left(\bar{n}\alpha\right)^{1/2}$. Следовательно, $\|\upsilon_p\| \to 0$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности υ_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $\upsilon_p \to 0$, $p \to \infty$. Лемма 3 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4). *Тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Доказательство. По индукции легко показать [1], что выполняется равенство $x_{n,\delta} = A^{-1}\left[E - \left(E - \alpha A^2\right)^n \left(E + \alpha A^2\right)^{-n}\right] y_\delta$. Следовательно,

$$x_{n,\delta} - x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x. \tag{9}$$

Отсюда

$$Ax_{n,\delta} - y_\delta = -A[E - Ag_n(A)]x - [E - Ag_n(A)](y_\delta - y). \tag{10}$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \ n \to \infty, \tag{11}$$

$$\sigma_n = n^{1/2} \|A(E - Ag_n(A))x\| \to 0, \ n \to \infty. \tag{12}$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \le 4(n\alpha)^{1/2}\delta, \tag{13}$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \le 1. \tag{14}$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le b\delta$, $b > 1$, и из (10) и (14) получим

$$\left\|A\left(E-Ag_m(A)\right)x\right\| \le \left\|Ax_{m,\delta}-y_\delta\right\| + \left\|\left(E-Ag_m(A)\right)\left(y_\delta - y\right)\right\| \le (b+1)\delta. \tag{15}$$

Для любого $n < m$ $\left\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\right\| > \varepsilon,$ поэтому

$$\left\|A(E-Ag_n(A))x\right\| \ge \left\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\right\| - \left\|(E-Ag_n(A))(y-y_\delta)\right\| \ge (b-1)\delta .$$

Итак, для $\forall n < m$

$$\left\|A(E-Ag_n(A))x\right\| \ge (b-1)\delta . \tag{16}$$

Из (12) и (16) при $n = m-1$ получим $\dfrac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/2}} = \left\|A(E-Ag_{m-1}(A))x\right\| \ge (b-1)\delta$,

или $(m-1)^{1/2}\delta \le \dfrac{\sigma_{m-1}}{b-1} \to 0,\ \delta \to 0$ (так как из (12) $\sigma_m \to 0, m \to \infty$). Если при этом $m \to \infty$ при $\delta \to 0$ то, используя (9), получим

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\| \le \left\|(E-Ag_m(A))x\right\| + \left\|g_m(A)(y_\delta - y)\right\| \le$$
$$\le \left\|(E-Ag_m(A))x\right\| + 4(m\alpha)^{1/2}\delta \to 0,\ m\to\infty,\ \delta\to 0,$$

так как из (11) $\left\|(E-Ag_m(A))x\right\| \to 0, m \to \infty.$

Если же для некоторых $\delta_n \to 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \to x,\ \delta_n \to 0.$ Действительно, из (15) имеем $\left\|A(E-Ag_{m(\delta_n)}(A))x\right\| \le (b+1)\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0$. Отсюда, по лемме 3, получаем, что $(E-Ag_{m(\delta_n)}(A))x \to 0, \delta_n \to 0.$ Поэтому

$$\left\|x_{m(\delta_n),\delta_n}-x\right\| \le \left\|(E-Ag_{m(\delta_n)}(A))x\right\| + 4\left(m(\delta_n)\alpha\right)^{\frac{1}{2}}\delta_n \to 0,\ \delta_n \to 0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Оценка погрешности.

Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x = A^s z$, $s > 0$. *Тогда справедливы оценки* $m \le 1 + \dfrac{s+1}{2\alpha e}\left[\dfrac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}$,

$$\left\|x_{m,\delta}-x\right\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 4\alpha^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}\right\}^{\frac{1}{2}}\delta. \tag{17}$$

Доказательство. Так как $x = A^s z$, $s > 0$, то

$$\left\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\right\| = \left\|A^{s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\right\| = \left\|\int_0^M \lambda^{s+1}\left(\frac{1-\alpha\lambda^2}{1+\alpha\lambda^2}\right)^{m-1} dE_\lambda z\right\| \le$$

$$\le (s+1)^{\frac{s+1}{2}}(2(m-1)\alpha e)^{\frac{-(s+1)}{2}}\|z\|.$$

Воспользовавшись (16), получим $(b-1)\delta \le (s+1)^{\frac{s+1}{2}}\left[2(m-1)\alpha e\right]^{\frac{-(s+1)}{2}}\|z\|$, отсюда $m \le 1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}$. При помощи неравенства моментов оценим

$$\left\|(E - Ag_m(A))x\right\| \le \left\|A^{s+1}(E - Ag_m(A))z\right\|^{s/(s+1)}\left\|(E - Ag_m(A))z\right\|^{1/(s+1)} \le$$

$$\le \left\|A(E - Ag_m(A))x\right\|^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \le \left[(b+1)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} \text{ (см. (15))}.$$

Так как соотношение (9) справедливо для любых n, то

$$\left\|x_{m,\delta} - x\right\| \le \left\|(E - Ag_m(A))x\right\| + \left\|g_m(A)(y_\delta - y)\right\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} +$$

$$+ 4\alpha^{1/2}\left\{1 + \frac{s+1}{2\alpha e}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{2}{s+1}}\right\}^{1/2}\delta.$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. *Порядок оценки* (17) *есть* $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$, *и, как следует из* [4], *он оптимален в классе задач с истокопредставимыми решениями.*

Замечание 2. *Используемое в формулировке теоремы* 2 *предположение порядка* $s > 0$ *истокопредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова* (4)*. И тем не менее в теореме* 2 *утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m, обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже если истоко-представимость точного решения отсутствует, останов по малости невязки* (4)*, как показывает теорема* 1*, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявного итерационного процесса решения некорректных уравнений первого рода / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2016. – № 2. – С. 71–76.

2. Матысик, О. В. Регуляризация некорректных задач I рода в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик, С. В. Сидак // Весн. Брэсц. тэхн. ун-та. Сер. Фізіка. Матэматыка. Вылічальная тэхніка. – 2016. – № 5. – С. 13–21.

3. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. –1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.

4. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.

5. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.

6. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 188 с.

7. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 12.02.2017

Matysik O.V., Sidak S.V. **On the Regularization of Operator Equations of First Kind by Implicit Iteration Method Rules in the Case of Stop in Smallness of the Inviscid**

In the Hilbert space for solving linear equations with affirmative limited and self–conjugate operator the implicite iteration method is proposed. The application of a rule residual stop for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. In work the convergence of the iteration method is proved, the estimation of an error of the method and estimation the moment of stop are received.