УДК 539.12:530.145

В.А. Плетюхов[1], А.И. Шелест[2]

[1]*д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики*
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]*магистрант физико-математического факультета*
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: otf@brsu.brest.by

О СПИНОРНОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ РВУ ДЛЯ МИКРООБЪЕКТА СО СПИНОМ ½ И СПЕКТРОМ МАСС

Полученное ранее [1] релятивистское волновое уравнение (РВУ) для микрообъекта со спином s=1/2 и тремя различными массами записано в явной спинорной форме. Обсуждается возможность описания на основе данного РВУ поколений нейтрино или кварков в рамках стандартной теории поля.

В работе [1] предложено релятивистское волновое уравнение (РВУ) для микрообъекта со спином ½ и тремя различными значениями массы. При построении указанного РВУ используется набор неприводимых представлений группы Лоренца

$$\left(0,\frac{1}{2}\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)'\oplus\left(1,\frac{1}{2}\right)\oplus\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(\frac{1}{2},0\right)'\oplus\left(\frac{1}{2},1\right), \tag{1}$$

где знак «штрих» введен для различения кратных компонент. Матрично-дифференциальная формулировка этого РВУ имеет вид:

$$\left(\Gamma_\mu\partial_\mu + m\right)\psi(x) = 0, \tag{2}$$

где $\psi\left(x\right)$ – 20-компонентная волновая функция, преобразующаяся по представлению (1), Γ_μ – квадратные матрицы размерности 20×20, m – массовый параметр.

В базисе Гельфанда – Яглома [2], который используется в [1], матрица Γ_μ, играющая основную роль для уравнения (2), характеризуется структурой

$$\Gamma_4 = \left(C^{1/2}\otimes I_2\right)\oplus I_8. \tag{3}$$

Здесь $C^{1/2}$ – спиновый блок, отвечающий спину ½ в том смысле, что если собственные значения блока $C^{1/2}$ (хотя бы одно) отличны от нуля, то микрочастица обладает спином ½. При этом собственные значения $\pm\lambda_i$ $(i=1,2,3)$ связаны с возможными значениями массы m_i рассматриваемого микрообъекта соотношением

$$m_i = \frac{m}{\left|\lambda_i\right|}. \tag{4}$$

После наложения стандартных требований релятивисткой и P-инвариантности, а также возможности лагранжевой формулировки теории блок $C^{1/2}$ может быть приведен к виду [1]:

$$C^{1/2} = \sigma_1 \otimes C, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & c_3 \\ 0 & c_2 & c_4 \\ fc_3^* & gc_4^* & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где c_1, c_2 – произвольные вещественные; c_3, c_4 – произвольные комплексные параметры; $f, g = \pm 1$. Минимальное уравнение блока $C^{1/2}$ (5) имеет следующий вид:

$$\lambda^3 - \lambda^2 (c_1 + c_2) + \lambda \left(c_1 c_2 - f |c_3|^2 - g |c_4|^2 \right) + f c_2 |c_3|^2 + g c_1 |c_4|^2 = 0. \tag{6}$$

Отсюда получается спектр возможных массовых состояний.

Обсуждаемое уравнение может претендовать на описание поколений нейтрино или кварков методами теории РВУ. Для проверки данного предположения необходимо исследовать вытекающие из него физические следствия. Для указанной цели во многих случаях более удобен не базис Гельфанда – Яглома, а спинорный базис. В связи с этим в настоящей работе ставится задача получения системы спинорных уравнений, эквивалентной матрично-дифференциальному РВУ (1) – (3), (5).

Набору представлений (1) соответствует в общем случае система спинорных уравнений первого порядка.

$$\begin{gathered}
\alpha \partial_{a\dot{b}} \psi^{\dot{b}} + \beta \partial^{b}_{\dot{c}} \psi^{\dot{c}}_{(ab)} + m\psi_a = 0, \\
\alpha \partial^{\dot{a}b} \psi_b - \beta \partial^{c}_{\dot{b}} \psi^{(\dot{a}\dot{b})}_{c} + m\psi^{\dot{a}} = 0, \\
\gamma \partial_{a\dot{b}} \varphi^{\dot{b}} + \sigma \partial^{b}_{\dot{c}} \psi^{\dot{c}}_{(ab)} + m\varphi_a = 0, \\
\gamma \partial^{\dot{a}b} \varphi_b - \sigma \partial^{c}_{\dot{b}} \psi^{(\dot{a}\dot{b})}_{c} + m\varphi^{\dot{a}} = 0, \\
f\beta^* \partial^{(\dot{b}}_{a} \psi^{\dot{c})} + g\sigma^* \partial^{(\dot{b}}_{a} \varphi^{\dot{c})} + m\psi^{(\dot{b}\dot{c})}_{a} = 0, \\
-f\beta^* \partial^{\dot{a}}_{(b} \psi_{c)} - g\sigma^* \partial^{\dot{a}}_{(b} \varphi_{c)} + m\psi^{\dot{a}}_{(bc)} = 0.
\end{gathered} \tag{7}$$

В системе (7) ψ_a, φ_a, $\psi^{\dot{a}}$, $\varphi^{\dot{a}}$, $\psi^{(\dot{b}\dot{c})}_{a}$, $\psi^{\dot{a}}_{(bc)}$ – спиноры, соответствующие неприводимым представлениям

$$
\begin{gathered}
\psi_a \sim \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad \varphi_a \sim \left(0, \frac{1}{2}\right)', \quad \psi^{\dot{a}} \sim \left(\frac{1}{2}, 0\right), \\
\varphi^{\dot{a}} \sim \left(\frac{1}{2}, 0\right)', \quad \psi_a^{\left(\dot{b}\dot{c}\right)} \sim \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad \psi_{(bc)}^{\dot{a}} \sim \left(\frac{1}{2}, 1\right),
\end{gathered} \tag{8}
$$

и использованы обозначения спинорных производных [3]:

$$
\begin{gathered}
\partial_{a\dot{b}} = \frac{1}{i} \partial_\mu \left(\sigma^\mu\right)_{a\dot{b}}, \; \partial^{\dot{a}b} = \frac{1}{i} \partial_\mu \left(\sigma^\mu\right)^{\dot{a}b} \; \left(x_4 = ict\right), \\
\left(\sigma^1\right)_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \left(\sigma^2\right)_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \left(\sigma^3\right)_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \left(\sigma^4\right)_{a\dot{b}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \\
\left(\sigma^1\right)^{\dot{a}b} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \left(\sigma^2\right)^{\dot{a}b} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \left(\sigma^3\right)^{\dot{a}b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \left(\sigma^4\right)^{\dot{a}b} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \\
\partial_{a\dot{b}} = \frac{1}{i} \partial_\mu \left(\sigma^\mu\right)_{a\dot{b}}, \qquad \partial^{\dot{a}b} = \frac{1}{i} \partial_\mu \left(\sigma^\mu\right)^{\dot{a}b} \; \left(x_4 = ict\right).
\end{gathered} \tag{9}
$$

Систему (7) можно записать в матрично-дифференциальной форме (2). Выбрав следующий порядок расположения компонент волновой функции

$$
\begin{gathered}
\psi = \Big(\psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2, \psi_1^{(\dot{1}\dot{2})}, \psi_2^{(\dot{1}\dot{2})}, \psi_1^{(\dot{2}\dot{2})}, \psi_2^{(\dot{1}\dot{1})}, \; \psi^{\dot{1}}, \psi^{\dot{2}}, \\
\varphi^{\dot{1}}, \varphi^{\dot{2}}, \psi_{(12)}^{\dot{1}}, \psi_{(12)}^{\dot{2}}, \psi_{(22)}^{\dot{1}}, \psi_{(11)}^{\dot{2}}, \psi_1^{(\dot{1}\dot{1})}, \psi_2^{(\dot{2}\dot{2})}, \psi_{(11)}^{\dot{1}}, \psi_{(22)}^{\dot{2}}\Big),
\end{gathered} \tag{10}
$$

получим для матрицы Γ_4 выражение:

$$
\Gamma_4 = \left(\begin{array}{cc|c} & \Gamma^{(8)} & \\ \Gamma^{(8)} & & \\ \hline & & O_4 \end{array}\right), \tag{11}
$$

где $\Gamma^{(8)}$ – матрица 8×8 вида

$$\Gamma^{(8)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & -\sigma & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \sigma & -\sigma & 0 \\ -f\beta^* & 0 & -g\sigma^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f\beta^* & 0 & g\sigma^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f\beta^* & 0 & -g\sigma^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f\beta^* & 0 & g\sigma^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Ненулевые собственные значения матрицы Γ_4 (11) с точностью до знака совпадают с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ блока $\Gamma^{(8)}$ (12). Последние являются решениями кубического уравнения:

$$\lambda^3 - \lambda^2(\alpha-\gamma) + \lambda\left(\alpha\gamma - 2f|\beta|^2 - 2g|\sigma|^2\right) + 2f\gamma|\beta|^2 + 2g\alpha|\sigma|^2 = 0. \tag{13}$$

Сравнивая (13) с аналогичным уравнением (6) для блока C (5), находим связь между параметрами c_1, c_2, c_3, c_4 и $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$:

$$\alpha = c_1, \quad \gamma = c_2, \quad \beta = \frac{c_3}{\sqrt{2}}, \quad \sigma = \frac{c_4}{\sqrt{2}}. \tag{14}$$

Таким образом, в спинорной форме система уравнений, эквивалентная матрично-дифференциальному РВУ (1) – (3), (5), имеет вид:

$$\begin{gathered}
c_1\partial_{a\dot{b}}\psi^{\dot{b}} + \frac{1}{\sqrt{2}}c_3\partial^b_{\dot{c}}\psi^{\dot{c}}_{(ab)} + m\psi_a = 0,\\
c_2\partial_{a\dot{b}}\varphi^{\dot{b}} + \frac{1}{\sqrt{2}}c_4\partial^b_{\dot{c}}\psi^{\dot{c}}_{(ab)} + m\varphi_a = 0,\\
c_1\partial^{\dot{a}b}\psi_b - \frac{1}{\sqrt{2}}c_3\partial^c_{\dot{b}}\psi_c^{(\dot{a}\dot{b})} + m\psi^{\dot{a}} = 0,\\
c_2\partial^{\dot{a}b}\varphi_b - \frac{1}{\sqrt{2}}c_4\partial^c_{\dot{b}}\psi_c^{(\dot{a}\dot{b})} + m\varphi^{\dot{a}} = 0,\\
\frac{1}{\sqrt{2}}fc_3^*\partial_a^{(\dot{b}}\psi^{\dot{c})} + \frac{1}{\sqrt{2}}gc_4^*\partial_a^{(\dot{b}}\varphi^{\dot{c})} + m\psi_a^{(\dot{b}\dot{c})} = 0,\\
-\frac{1}{\sqrt{2}}fc_3^*\partial^{\dot{a}}_{(b}\psi_{c)} - \frac{1}{\sqrt{2}}gc_4^*\partial^{\dot{a}}_{(b}\varphi_{c)} + m\psi^{\dot{a}}_{(bc)} = 0.
\end{gathered} \tag{15}$$

Изучение системы (15) с точки зрения возможности описания на ее основе реально существующих микрообъектов является предметом исследования авторов в настоящее время. Результаты этого исследования будут опубликованы в последующем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гугнюк, М. Л. Описание поколений нейтрино в подходе теории релятивистских волновых уравнений / М. Л. Гугнюк, В. А. Плетюхов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2017. – № 1. – С. 5–11.

2. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1948. – Вып. 8, т. 18. – С. 703–733.

3. Паули, В. Труды по квантовой теории / В. Паули. – М. : Наука, 1977. – 696 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 05.02.2018

***Pletyukhov V.A., Shelest A.I.* On the Spinor Formulation RWE for a Microobject with Spin ½ and Spectrum of Masses**

The recently derived [1] relativistic wave equation (RWE) for a microobject with spin ½ and three different masses is formulated in the explicit spinor form. The possibility to describe neutrino and quark generations on the basis of this RWE in the framework of the standard field theory is discussed.