УДК 524.354.6-33

В.С. Секержицкий[1], Е.М. Хомич[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. общей и теоретической физики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

[2]магистрант каф. общей и теоретической физики Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: otf@brsu.brest.by

СВЕРХПЛОТНОЕ ЭЛЕКТРОННО-ПРОТОННОЕ ВЕЩЕСТВО В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Сформулированы оценочные критерии устойчивости твердого состояния плотного замагниченного электронно-протонного вещества. Получено уравнение состояния сверхплотного электронно-протонного вещества в присутствии магнитного поля.

Нахождение уравнений состояния вещества при плотностях, превышающих порог его полной ионизации, имеет важное значение для физики сверхплотных астрофизических объектов, в частности, для построения теоретических моделей, позволяющих не только объяснять отдельные наблюдаемые эффекты, но и обосновывать предположения и гипотезы о строении и энергетике указанных небесных тел. Теоретически обоснованная и подтвержденная наблюдательными данными (по крайней мере, косвенными) возможность существования в сверхплотных звездах весьма сильных магнитных полей делает актуальной задачу об учете их влияния на физические свойства сверхплотного вещества. В настоящей работе сформулированы оценочные критерии устойчивости твердого состояния плотного электронно-протонного вещества в сильном магнитном поле и получены его уравнения состояния.

Рассмотрим сначала вопрос о фазовом состоянии электронно-протонного вещества (водорода при плотностях, превышающих порог полной ионизации). Как отмечалось в [1], вследствие кулоновских взаимодействий ядра такого вещества могут совершать колебания относительно некоторых точек равновесия. В этом случае следует говорить о твердом состоянии. Следуя приближенным оценкам [1], полагаем, что при определенных условиях протоны образуют упорядоченную структуру, обладающую некоторыми свойствами твердого тела (не принципиально в данном случае аморфное или кристаллическое вещество рассматривается).

Оценим области значений массовой плотности, при которых твердое состояние замагниченного электронно-протонного вещества при низких и высоких температурах устойчиво (не переходит в плазменное состояние). Предположим, что в электронно-протонном замагниченном веществе имеет место фаза твердого тела. Воспользуемся для оценки ее границ приближенным методом, изложенным в [1] для незамагниченного сверхплотного водорода и использованном в [2] для электронно-протонного вещества в сильном магнитном поле. Следуя [1; 2], разделим среду на нейтральные сферические ячейки с одним протоном и равномерно распределенным электронным зарядом в каждой, упакованные максимально плотно. Как отмечалось в [1], отклонения от равномерного распределения электронного заряда для предстоящих оценок несущественны. Также пренебрегаем в первом приближении взаимодействием протона с соседними ячейками [1]. Радиус такой ячейки $R \approx \left(\frac{3m_p}{4\pi\rho}\right)^{1/3}$, где m_p – масса протона, ρ – массовая плотность вещества. Выражение для кулоновского взаимодействия протона с электронным «облаком» своей ячейки в отсутствие магнитного поля имеет вид:

$$U(r) = -\frac{3e^2}{2R} + \frac{e^2}{2R^3} r^2 . \tag{1}$$

Протон находится в электростатической трехмерной потенциальной яме, граница которой, определяемая условием $r = R$, выше дна на величину $U_0 = e^2 / (2R)$.

При оценочных расчетах для случая малых колебаний протон в ячейке можно (с определенной степенью точности) отождествить с изотропным гармоническим осциллятором, частота нулевых колебаний которого дается выражением:

$$\omega_0 = \frac{e}{m_p^{1/2} R^{3/2}} = \frac{e}{m_p} \sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho} . \tag{2}$$

Средняя энергия рассматриваемого осциллятора при температуре T [1; 3]:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} \hbar\omega_0 \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_0}{2kT} . \tag{3}$$

Условие малости величины $\langle \varepsilon \rangle$ по сравнению с U_0 принято в [1; 3] в качестве критерия устойчивости твердого состояния вещества. При $T = 0$ из (3) имеем энергию нулевых колебаний протона $\varepsilon_0 = 1,5\hbar\omega_0$.

Следует заметить, что модель изотропного гармонического осциллятора некорректна при $r \sim R$ (и тем более при $r \geq R$), а электронное «облако» весьма чувствительно к движению протона. Однако даже с помощью такой грубой модели можно провести приближенные оценки границ фазы твердого тела в замагниченном электронно-протонном веществе.

В сверхсильном магнитном поле с индукцией B глубина потенциальной ямы изменяется на величину

$$\Delta U_0 = \frac{e^2 B^2 R^2}{8 m_p c^2} \sin^2 \varphi , \tag{4}$$

где φ – угол между направлениями вектора индукции и движения протона. При этом разность высот границы потенциальной ямы и ее дна равна

$$U_0(B) = U_0 + \Delta U_0 \approx U_0 \left(1 + \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2} \sin^2 \varphi \right) = U_0 \left(1 + \frac{\omega_B^2}{\omega_0^2} \sin^2 \varphi \right), \ \ \omega_B = \frac{eB}{2 m_p c} . \tag{5}$$

Энергетический спектр протона, совершающего колебания около положения равновесия в присутствии постоянного и однородного магнитного поля с индукцией B, определяется выражением [4]:

$$\varepsilon = \hbar\sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} \left(2l + |m| + 1 \right) + \hbar\omega_B m + \hbar\omega_0 \left(g + \frac{1}{2} \right), \tag{6}$$

где $l = 0, 1, 2, ...$; $m = 0, \pm 1, \pm 2,...$; $g = 0, 1, 2,...$ – квантовые числа. При нулевой температуре $l = m = g = 0$ и энергия нулевых колебаний протона в магнитном поле

$$\varepsilon_0(B) = \hbar\sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \approx \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \left(1 + 2\sqrt{1 + \frac{3B^2}{16\pi\rho c^2}} \right). \tag{7}$$

При B = 0 имеем $\varepsilon_0\left(B\right)=\varepsilon_0$. Из (4) и (7) следует, что при значениях $\sin^2\varphi \neq 0$ увеличение $U_0\left(B\right)$ с ростом индукции магнитного поля превалирует над увеличением $\varepsilon_0\left(B\right)$.

Средняя энергия колеблющегося при температуре T в магнитном поле с индукцией B протона может быть представлена в виде [2]:

$$\left\langle \varepsilon\left(B\right)\right\rangle = \hbar\omega\cdot\mathrm{cth}\alpha+\frac{1}{2}\hbar\omega_0\cdot\mathrm{cth}\alpha_0. \qquad (8)$$

Здесь $\alpha=\dfrac{\hbar\omega}{2kT}$, $\alpha_0=\dfrac{\hbar\omega_0}{2kT}$. При B = 0 имеем $\omega=\omega_0$, и (8) переходит в (3). Для низких температур (если ω_B не превышает значительно ω_0) $\mathrm{cth}\alpha\approx 1$, $\mathrm{cth}\alpha_0\approx 1$ и $\left\langle \varepsilon\left(B\right)\right\rangle\approx\varepsilon_0\left(B\right)$. Для высоких температур $\mathrm{cth}\alpha\approx 1/\alpha$, $\mathrm{cth}\alpha_0\approx 1/\alpha_0$ и $\left\langle \varepsilon\left(B\right)\right\rangle\approx 3kT\approx\left\langle\varepsilon\right\rangle$.

Твердое состояние замагниченного электронно-протонного вещества является устойчивым и не переходит в плазменное при $\left\langle \varepsilon\left(B\right)\right\rangle << U_0\left(B\right)$. Если $\omega_B=u\omega_0$, то условию $\varepsilon_0\left(B\right)=3kT$ соответствует массовая плотность

$$\rho=\rho_0\approx 1,79\cdot 10^{-6}\left(\frac{T}{2\sqrt{1+u^2}+1}\right)^2 \text{ (г/см}^3\text{)}. \qquad (9)$$

Критерии устойчивости твердого состояния замагниченного вещества при низких ($\rho >> \rho_0$) и высоких ($\rho << \rho_0$) температурах имеют соответственно вид:

$$\rho^{1/6} << 50,5\frac{1+u^2\sin^2\varphi}{2\sqrt{1+u^2}+1}, \qquad (10)$$

$$\rho^{1/3} >> 2,65\cdot 10^{-5}\frac{T}{1+u^2\sin^2\varphi}. \qquad (11)$$

При B = 0 из (9)–(11) получаем: $\rho_0\approx 1,98\cdot 10^{-7}T^2$ (г/см^3), $\rho^{1/6}<<16,8$ при $\rho>>\rho_0$, $\rho^{1/3}>>2,65\cdot 10^{-5}T$ при $\rho<<\rho_0$.

Выражение в правой части неравенства (10) при B = const имеет наименьшее значение, если φ = 0. Тогда при оценочных расчетах в качестве критерия устойчивости твердого состояния холодного замагниченного электронно-протонного вещества можно принять условие:

$$\rho^{1/6}\leq 0,1\frac{50,5}{2\sqrt{1+u^2}+1}, \text{ или } \rho\leq\frac{1,56\cdot 10^4}{\left(2\sqrt{1+u^2}+1\right)^6} \text{ (г/см}^3\text{)}. \qquad (12)$$

Таким образом, сильное магнитное поле уменьшает диапазон значений массовой плотности, при которых твердое состояние является устойчивым: локализуя движение протона в плоскости, перпендикулярной вектору индукции, магнитное поле одновременно облегчает выход протона из электростатической потенциальной ямы вдоль линий индукции.

Аналогично для горячего замагниченного электронно-протонного вещества из (11) находим:

$$\rho^{1/3} \geq 2{,}65 \cdot 10^{-4} T \text{, или } \rho \geq 1{,}86 \cdot 10^{-11} T^3 \text{ (г/см}^3\text{)}, \tag{13}$$

что совпадает с условием устойчивости твердого состояния в отсутствие магнитного поля.

Отметим, что в веществе сверхплотных сильно замагниченных астрофизических объектов индукция магнитного поля вряд ли может превышать значение $B_{\max} = 2c\sqrt{2\pi\rho}$, поскольку при $B > B_{\max}$ плотность энергии магнитного поля будет больше плотности энергии покоя вещества. Это означает, что в приведенных выше соотношениях допустимы значения $u^2 < 1{,}5$.

При термодинамическом описании сверхплотного замагниченного водорода необходимо учитывать возможность реализации как твердого, так и плазменного состояний электронно-протонного вещества. Мы рассмотрим здесь уравнения состояния ионизованного замагниченного водорода при различных значениях массовой плотности для модели «неподвижных» протонов и ферми-газов остальных компонентов (приближенное описание фазы твердого тела). Частично этот вопрос обсуждался в [5; 6].

При плотности вещества $\rho \leq 10^6$ г/см^3 (концентрация протонов $n_p \leq 10^{30}$ см$^{-3}$) электроны нерелятивистские. В этом случае давление и плотность энергии вещества связаны с соответствующими характеристиками его электронного и протонного компонентов соотношениями:

$$P = P_e; \quad w = w_p + w_e, \tag{14}$$

где

$$P_e(B) = P_e(0)\frac{R_{5/2}(x_e)}{R_{3/2}^{5/3}(x_e)}, \quad w_e(B) = m_e c^2 n_e + P_e(0)\frac{2{,}5 x_e R_{3/2}(x_e) - R_{5/2}(x_e)}{R_{3/2}^{5/3}(x_e)}, \tag{15}$$

$$P_e(0) = \frac{2}{5} n_e \zeta_e(0), \; \zeta_e(0) = \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}\hbar^2}{2m_e} n_e^{2/3}, \; x_e = \frac{\zeta_e(B)}{\mu_B B}, \; \zeta_e(B) = \zeta_e(0)\frac{x_e}{R_{3/2}^{2/3}(x_e)}, \tag{16}$$

$$R_a(x_e) = a\sum_{n=0}^{l}\left(\left(x_q - 2n - 2\right)^{a-1} + \left(x_e - 2n\right)^{a-1}\right), \tag{17}$$

a = 3/2, 5/2, B – индукция магнитного поля, n_e – концентрация электронов, m_e – масса электрона, $\zeta_e = \chi_e - m_e c^2$, χ_e – химический потенциал, μ_B – магнетон Бора, n – номер квантового уровня Ландау, $w_p = m_p c^2 n_p$ (энергией колебательного движения протонов пренебрегаем). В силу свойств функции распределения Ферми – Дирака суммирование в (17) ведется до тех пор, пока выражение под знаком соответствующего радикала неотрицательно. При вычислениях полагаем среду электронейтральной ($n_p = n_e$).

Тогда уравнение состояния крайне вырожденного замагниченного электронно-протонного вещества можно представить в виде:

$$w = K_{11}P + K_{12}P^{3/5}. \tag{18}$$

Здесь

$$K_{11} = \frac{5}{2}\frac{x_e R_{3/2}\left(x_e\right)}{R_{5/2}\left(x_e\right)} - 1, \qquad K_{12} = \frac{5^{3/5} R_{3/2}\left(x_e\right)\cdot\left(m_p + m_e\right)c^2}{\left(3\pi^2\hbar^3\right)^{2/5}}\left(\frac{m_e}{R_{5/2}\left(x_e\right)}\right)^{3/5}. \qquad (19)$$

Для описания термодинамических свойств нерелятивистской водородной плазмы целесообразно вести отсчет энергии от величины энергии покоя фермиона и рассматривать лишь первое слагаемое уравнения (18). Тогда уравнение состояния

$$P = D_{11} w, \qquad D_{11} = 1/K_{11}. \qquad (20)$$

Для астрофизических расчетов, связанных с оценками интегральных параметров плотных магнитных звезд, в (18) можно пренебречь первым слагаемым, учитывая, что энергия покоя нерелятивистского фермиона много больше его кинетической энергии. Тогда уравнение состояния

$$P = D_{12} w^{5/3}, \qquad D_{12} = K_{12}^{-5/3}. \qquad (21)$$

Уравнение состояния (21) записано в виде, удобном для непосредственной подстановки в формулы теории тяготения, с помощью которых можно установить, в частности, оценочную зависимость между массой и радиусом астрофизической конфигурации с магнитным полем.

При плотности вещества ($10^6 \le \rho \le 10^7$) г/см^3 электроны релятивистские. Уравнение состояния определяется в этом случае следующим выражением:

$$w = K_{51} P + K_{52} P^{3/4}, \qquad (22)$$

где

$$K_{51} = 2\sqrt{X_e^2 + Y_e}\,\frac{R_2}{R_1} - 1, \qquad K_{52} = \frac{2^{3/4} m_p c^2 R_2}{\left(3\pi^2\hbar^3 c^3\right)^{1/4} R_1^{3/4}}. \qquad (23)$$

$$X_e^2 = \frac{\chi_e^2\left(B\right) - m_e^2 c^4}{2 m_e c^2 \mu_B B}; \qquad Y_e = \frac{m_e c^2}{2\mu_B B}, \qquad (24)$$

$$\chi_e^2\left(B\right) - m_e^2 c^4 \equiv \xi_e\left(B\right) = \xi_e\left(0\right)\frac{X_e}{R_2^{1/3}\left(X_e\right)} = \left(3\pi^2\right)^{1/3} c\hbar n_e^{1/3}\frac{X_e}{R_2^{1/3}\left(X_e\right)}, \qquad (25)$$

$$R_2\left(X_e\right) = \frac{3}{2}\left(X_e + 2\sum_{n=1}^{l}\sqrt{X_e^2 - 2n}\right),$$

$$R_1\left(X_e, Y_e\right) = \frac{3}{2}\left(X_e\sqrt{X_e^2 + Y_e} - \frac{Y_e}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + X_e}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - X_e}\right| + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{l}\left(\sqrt{X_e^2 + Y_e}\sqrt{X_e^2 - 2n} - \frac{Y_e + 2n}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{X_e^2 + Y_e} + \sqrt{X_e^2 - 2n}}{\sqrt{X_e^2 + Y_e} - \sqrt{X_e^2 - 2n}}\right|\right)\right). \qquad (26)$$

При этом суммирование в (26) ведется до тех пор, пока выражения под соответствующими радикалами неотрицательные.

Как показано в [7], с ростом индукции сверхсильного магнитного поля порог нейтронизации водорода смещается в сторону более высоких плотностей. При плотностях, незначительно превышающих этот порог, необходимо учитывать парциальное давление и плотность энергии нейтронного компонента вещества:

$$P = P_e + P_n; \qquad w = w_p + w_e + w_n; \tag{27}$$

нуклонные газы нерелятивистские. Записать уравнение состояния в форме, аналогичной (18) или (22), не представляется возможным: оно определяется системой параметрических уравнений.

При плотностях, существенно превышающих порог нейтронизации, основной вклад в концентрацию нуклонов среды вносят нейтроны, и уравнение состояния вещества (нейтронного газа) в магнитном поле можно записать следующим образом:

$$w = K_{31}P + K_{32}P^{3/5}, \tag{28}$$

где

$$K_{31} = \frac{5}{2}\frac{x_n R_{3/2}(x_n)}{R_{5/2}(x_n)} - 1, \qquad K_{32} = \frac{5^{3/5} m_n c^2 R_{3/2}(x_n)}{\left(3\pi^2\hbar^3\right)^{2/5}}\left(\frac{m_n}{R_{5/2}(x_n)}\right)^{3/5}, \tag{29}$$

$$P_n(0) = \frac{2}{5}n_n\zeta_n(0),\ \zeta_n(0) = \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}\hbar^2}{2m_n}n_n^{2/3},\quad x_n = \frac{\zeta_n(B)}{\mu_{ÿ}B},\quad \zeta_n(B) = \zeta_n(0)\frac{x_n}{R_{3/2}^{2/3}(x_n)}, \tag{30}$$

$$R_a(x_n) = \frac{1}{2}\left(\left(x_n - \sigma_n\right)^a + \left(x_n + \sigma_n\right)^a\right), \tag{31}$$

a = 3/2, 5/2, σ_n = 1,913, n_n – концентрация нейтронов, m_n – масса нейтрона, $\mu_{ÿ}$ – ядерный магнетон, $\zeta_n = \chi_n - m_n c^2$, χ_n – химический потенциал нейтронов.

Наличие внешнего магнитного поля вносит коррективы в критерий устойчивости фазы твердого тела для холодного электронно-протонного вещества и практически не оказывает влияния на соответствующий критерий для горячего вещества.

Поскольку некоторые энергетические характеристики невырожденных ферми-газов зависят от индукции магнитного поля, целесообразно все же рассмотреть влияние последнего на уравнения состояния горячего электронно-протонного вещества. Здесь мы ограничимся случаем нерелятивистских электронов.

Расчеты показывают, что фаза твердого тела в горячем нерелятивистском электронно-протонном веществе может быть реализована при $T \ll 10^6$ K, если при этом массовая плотность $\rho \geq 1{,}86\cdot10^{-11}T^3$ г/см^3. Давление в этом случае определяется электронным газом и при заданной концентрации от индукции магнитного поля не зависит:

$$P = P_e = n_e kT, \tag{32}$$

а кинетическая энергия колебательного движения протона значительно меньше энергии покоя:

$$w(B) = n_p\left(m_p + m_e\right)c^2 + n_p kT\left(\frac{1}{2} + \alpha_e \mathrm{cth}\alpha_e - \alpha_e \mathrm{th}\alpha_e\right) \approx n_p m_p c^2 + n_p kT\left(\frac{1}{2} + \frac{2\alpha_e}{\mathrm{sh}(2\alpha_e)}\right). \tag{33}$$

Если $B \neq 0$, то $\mathrm{sh}(2\alpha_e) > 2\alpha_e$. При $T < 10^6$ K $\frac{3}{2}kT < 2\cdot10^{-10}$ эрг $\ll m_p c^2 \approx 1{,}5\cdot10^{-3}$ эрг

и

$$w(B) \approx w(0) \approx n_p m_p c^2. \tag{34}$$

Уравнение состояния замагниченного электронно-протонного вещества в этом случае такое же, как и в отсутствие магнитного поля:

$$P = \frac{kT}{m_p c^2} w. \tag{35}$$

Для любых значений массовой плотности, соответствующих электронно-протонному веществу, при $T > 10^6$ K имеет место плазменная фаза.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киржниц, Д. А. О внутреннем строении сверхплотных звезд / Д. А. Киржниц // Журн. эксперим. и теор. физ. – 1960. – Т. 38, № 2. – С. 503–508.
2. Секержицкий, В. С. О критериях устойчивости твердого состояния электронно-протонного вещества в магнитном поле / В. С. Секержицкий, Е. А. Саванчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 44–47.
3. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
4. Дубнер, В. М. Заряженный осциллятор в магнитном поле / В. М. Дубнер // Изв. вузов. Физика. – 1966. – № 4. – С. 167–168.
5. Секержицкий, В. С. Об уравнении состояния сверхплотного водорода в сильном магнитном поле / В. С. Секержицкий // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та. – 2010. – Вып. 6, ч. 2. – С. 47–56.
6. Секержицкий, В. С. К вопросу об уравнении состояния холодного нерелятивистского электронно-протонного вещества в сверхсильном магнитном поле / В. С. Секержицкий, В. В. Климович, Е. А. Саванчук // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 2. – С. 29–32.
7. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях / В. С. Секержицкий. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 07.03.2017

Sekerzhitsky V.S., Khomich E.M. **Superdense Electron-Proton Matter in Strong Magnetic Field**

An appreciation of criterions of stability solid state of magnetized electron-proton matter is formulated. The states equation of superdense electron-proton matter in presence magnetic field is receive.